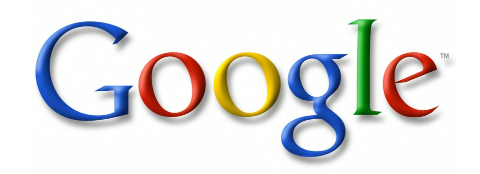


OEUVRES COMPLÈTES

DE

N. H. ABEL,

MATHÉMATICIEN,

AVEC DES NOTES ET DÉVELOPPEMENTS,

RÉDIGÉES PAR ORDRE DU ROI,

PAR

B. HOLMBOE,

professeur de mathématiques à l'université de Christiania, membre de la société physiographique à Christiania et de l'académie royale des sciences de guerre à Stockholm.

TOME PREMIER

contenant les oeuvres de l'auteur qui ont été publiées auparavant.

CHRISTIANIA.

Chez *Chr. Gröndahl*, Imprimeur-Libraire.

1839.

AVERTISSEMENT.

C'est à la libéralité généralement reconnue du gouvernement de Norvége et à l'activité qu'il met à la propagation des lumières, des sciences et des arts, qu'est due la publication de cette édition des ouvrages de notre illustre compatriote. La proposition que je fis de rédiger et de faire publier une édition des oeuvres complètes de notre auteur, en recueillant ce qu'il avait déjà fait publier, et ce qui restait encore inédit parmi les papiers qu'il avait laissés, ayant été appuyée par le sénat académique, le Roi donna ordre pour que tous les frais résultant de la publication de cet ouvrage, fussent payés sur les fonds du bureau de l'instruction publique. Ce premier volume contient les ouvrages de l'auteur qui ont déjà été publiés auparavant. Ils se trouvent insérés dans les quatre premiers volumes du journal de M. Crelle (Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin 1826—1829), *excepté les mémoires XIII et XIV, qui ont été consignés dans les numéros 138 et 147 du journal d'astronomie de M. Schumacher* (Astronomische Nachrichten. Altona 1828). *L'auteur les a originairement écrits en français, mais les neuf premiers mémoires ont été traduits par M. Crelle en allemand, d'où on les a de nouveau traduits en français. Quant aux originaux des oeuvres publiées de notre auteur, on n'en a point trouvé dans ses papiers. Dans la révision de ces mémoires il m'a été nécessaire de faire plusieurs calculs et développements dont j'ai fait un extrait, que j'ai ajouté la fin du volume. J'espère que ces développements jetteront du jour sur les endroits les plus difficils de l'auteur, de sorte qu'ils faciliteront la lecture de l'ouvrage, et qu'ils le réndront accessible à un grand nombre de lecteurs qui, sans ces développements, le trouveraient trop abstrait. Le temps et les soins que j'a dû mettre à la rédaction de cet ouvrage, je les regarderai toujours comme le loisir le mieux employé de ma vie, s'il peut contribuer à répandre cet ouvrage, la plus importante production de nos*

jours en son genre. Par l'immense étendue de ses problèmes et par l'extrême rigueur de sa méthode suivant l'exemple de l'illustre M. Cauchy, l'auteur à donné aux mathématiques un accroissement que sans lui cette science n'aurait peut-être eu dans un siècle, et frayé des routes avant lui inconnues, qui doivent donner une nouvelle face au calcul infinitésimal et à l'analyse en général. C'est pourquoi les oeuvres de notre auteur appartiennent au premier rang de celles que nul mathématicien, pour peu qu'il désire se mettre au fait de sa science, ne pourra se dispenser de lire. Le tome second, qui contiendra les oeuvres inédites de l'auteur, est sous la presse, et paraîtra le plus tôt possible.

Christiania le 31 décembre 1838.

B. HOLMBOE.

NOTICES SUR LA VIE DE L'AUTEUR.

(PAR L'EDITEUR.)

Niels Henrik (Nicolas Henri) *Abel*, Norvégien naquit le 5 août*) 1802 au presbytère de Findöe, paroisse située dans le diocèse de Christiansand où son père *Sören Georg Abel* était curé (ministre protestant). Son père ayant été nommé curé de Gjerrestad en 1803, le jeune Nicolas l'y suivit avec un frère ainé, avec lequel il commença dans la suite ses premières études sous les auspices de son père. En 1815 son père le fit entrer dans l'école cathédrale de Christiania où, pendant les premières années de son cours élémentaire, il ne s'attira aucune attention particulière, jusqu'à ce qu'en 1818, époque d'où date ma nomination de professeur de mathématiques à ladite école, on accorda aux disciples quelques heures exprès pour les exercer à résoudre des problèmes algébriques ou géométriques. Ce fut alors que le talent d'*Abel* se développa d'une manière éclatante. Il fallut bientôt lui réserver des problèmes tout-exprès. Depuis ce temps il se voua aux mathématiques avec ardeur, et y fit des progrès énormes, et avec une rapidité qui n'appartient qu'au génie. Ayant rapidement passé le cours élémentaire, je lui donnai, sur sa démande, des leçons en particulier sur le calcul infinitésimal. Après l'avoir initié dans les éléments de cette science, je parcourus avec lui l'introduction et les institutions du calcul diff. et intégr. d'*Euler*. Dès-lors il commença à marcher seul. Il étudia les ouvrages de *Lacroix*, *Francoeur*, *Poisson*, *Gauss* et surtout ceux de *Lagrange*, et fit déjà lui même quelques essais. En juillet 1821 ayant quitté l'école cathédrale, il fut reçu à l'université de Christiania, après avoir subi l'examen dit d'artium. A l'école cathédrale il avait déjà obtenu un gratis, et son père étant mort, sans laisser à la veuve les moyens d'entretenir son fils à l'université, quelques-uns des professeurs, frappés des talents extraordinaires qu'il annonçait pour les mathématiques, se cotisèrent pour lui procurer les moyens d'une existence indépendante et conforme à ses talents supérieurs. Après avoir joui de ce soutien pendant 2 ans, le gouvernement, sur la proposition du sénat académique, lui accorda sur le trésor 200 Sp. par an, pour continuer ses études pendant 2 ans à l'université. Ces gra-

*) Dans le nécrologe de N. Abel par M. Crelle, inséré dans le 4me volume de son Journal, le 25 août es cité comme le jour de naissance de notre auteur. Cette faute, que je prends ici la liberté de corriger, dérive d'une inadvertance de ma part dans les renseignements communiqués à M. Crelle. Par une faute d'impression le lieu de sa naissance y est appelé Frindoë. Dans le Journal anglais "The Athenæum", Abel est appelé Suédois ("the celebrated young Swedish philosopher, Abel").

tifications tant privées que publiques qu'on lui décréta pendant son séjour à l'université, il les employa consciencieusement à se perfectionner dans sa science. A cette époque il écrivit plusieurs traités dont quelques-uns sont insérés dans le journal *"Magazin for Naturvidenskaberne"*. Le problème qui l'occupait alors plus particulièrement, fut de trouver la résolution générale des équations du 5me degré, problème qui depuis long temps a occupé presque tous les mathématiciens d'un rang distingué. *Abel* se flatta une fois d'avoir trouvé cette résolution, mais malheureusement il y avait commis une erreur dont il s'aperçut lui même le premier. Cependant cela ne le rebuta point; au contraire il se proposa de trouver cette résolution, ou d'en démontrer l'impossibilité. Pour cette dernière tâche elle lui réussit, et il en écrivit la démonstration en français, langue dont il se servit dans la suite pour écrire ses mémoires ou traités, et qu'il fit publier à Christiania en 1824 sous titre *"Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré"*. Ainsi ce fut *Abel* qui le premier parvint à débrouiller cette partie importante de la théorie des équations algébriques, découverte qui, comme l'a dit *Legendre*, doit être regardée comme la plus grande qui restait à faire dans l'analyse.

En juillet 1825 il sollicita auprès du gouvernement un bénéfice de 600 Sp. par an pour continuer ses recherches dans l'étranger, et notamment à Paris, pendant deux ans. On lui accorda aussitôt sa demande, et le même été il partit pour Berlin, suivi de quelques jeunes littérateurs et savants Norvégiens. Son premier plan avait été d'aller d'abord à Paris, mais il l'abandonna dans la suite pour profiter de la compagnie de ses amis et compatriotes. Dans la première lettre qu'il m'adressa de Berlin, il se félicite d'avoir pris la route de Berlin avant celle de Paris, ayant eu la satisfaction de faire à Berlin la connaissance de *Mr. Crelle*, dont il ne sait pas assez vanter l'accueil prévenant et la bienveillance. Il devint bientôt l'ami intime de *Mr. Crelle*, et la correspondance qui s'établit entre eux, dura jusqu'à sa mort. Ce qui contribua d'abord à sa célébrité littéraire, c'est le journal de *Mr. Crelle* dont le premier cahier parut pendant le séjour d'*Abel* à Berlin au commencement de 1826, et dont *Abel* devint un des collaborateurs les plus actifs, chaque cahier contenant un ou deux de ses traités, lesquels à leur tour ne contribuèrent pas peu à établir la réputation bien méritée de ce journal.

Vers la fin de février il quitta Berlin et après s'être arrêté par intervalles à Léipsic, Friberg, Dresde et Prague, il arriva vers la mi-avril à Vienne. Il apporta de *Mr. Crelle* des lettres de recommandation pour *Mrs. Littrow* et *Burg*. Vers la fin du mois de mai il quitta Vienne, traversa une partie de l'Italie et de la Suisse, et arriva au mois de juillet à Paris, muni de lettres de recommandation de *Mrs. Littrow* et *Crelle* pour *Mrs. Bouvard* et *Hachette*. Il y fit en même temps la connaissance de plusieurs mathématiciens, parmi lesquels se trouvait l'illustre *Mr. Cauchy*.

En janvier 1827 il quitta Paris pour se rendre à Berlin, d'où il alla à Copenhague, et de là il arriva à Christiania au mois de mai.

Il désirait alors obtenir une chaire de mathématiques à l'université; mais comme l'université avait déjà deux professeurs en mathématiques et que le gouvernement ne le trouvait pas convenable d'en nommer un troisième, il resta sans place jusqu'en 1828, lorsqu'on lui confera les fonctions de *Mr. Hansteen* pendant son absence dans un voyage en Sibérie. En septembre 1827 on le nomma membre de la société royale des sciences à Throndhjem.

Depuis son retour en Norvége il poursuivit infatigablement ses recherches scientifiques, et peut-être que, surtout la dernière année de sa vie, il y mit trop d'activité et d'efforts, étant naturellement souffrant et d'une constitution faible et sensible. En décembre 1828 au fort de l'hiver il entreprit un voyage pour les fonderies de fer de Froland près d'Arendal, où se trouvait alors sa future *Mad[elle] Kemp* (à présent *M[dme] Keilhau*). Vers la mi-janvier 1829 il y tomba malade, et malgré les soins prodigués par sa fiancée et par la famille de la maison (*Mr. S. Smith* était alors propriétaire desdites fonderies de fer), il mourut d'une phtisie le 6 avril alité depuis trois mois*).

Les travaux d'*Abel* qui commencèrent à fixer l'attention des savants furent d'abord son mémoire sur l'impossibilité de la résolution générale des équations algébriques qui passent le quatrième degré mentionné plus haut, et dont le mémoire No. II. de cette édition n'est qu'une nouvelle rédaction avec des développements ulterieurs, et ensuite ses recherches sur les fonctions elliptiques. En même temps que notre *Abel*, et sans connaître les ouvrages de ce dernier, *Mr. Jacobi* de Koenigsberg commença à traiter la théorie des fonctions elliptiques. Ainsi une rivalité s'établit entre ces deux génies supérieurs dans leurs traités sur lesdites fonctions. *Abel* me dit que lors de son séjour à Paris en 1826, il avait déjà achevé la partie essentielle des principes qu'il avançait dans la suite sur ces fonctions, et qu'il aurait bien voulu remettre la publication de ses découvertes jusqu'à ce qu'il en eût pu composer une théorie complète, si en attendant *Mr. Jacobi* ne s'était mis sur les rangs.

Mr. Crelle dans une lettre, adressée à *M. Abel* en date du 18 mai 1828, s'exprime comme suit:

> "Depuis quelque temps on commence à apprécier vos ouvrages de plus en plus. *Mr. Fuss* m'écrit de St. Petersbourg qu'il en a été ravi. Voici ce que m'écrit *Mr. Gauss* de Goettingue que j'avais également prié de m'envoyer quelque chose sur les fonctions elliptiques dont il s'occupe, comme j'ai appris, plus de 30 ans. ""D'autres occupations m'empêchent pour le moment de rédiger ces recherches. *Mr. Abel* m'a prévenu au moins d'un tiers. Il vient d'enfiler précisement la même route dont je suis sorti en 1798. Ainsi je ne m'étonne nullement de ce que, pour la majeure partie, il en soit venu aux mêmes résultats. Comme d'ailleurs dans sa déduction il a mis tant

---

*) Un journal français dont je ne me rappelle pas le titre, m'est venu sous les yeux, où l'on a rapporté qu' Abel est mort dans la misère. On voit par les détails ci-dessus que ce rapport n'est pas conforme à la vérité.

de sagacité de pénétration et d'élégance, je me crois par cela même dispensé de la rédaction de mes propres recherches."" Cet avis de *Mr. Gauss* m'a fait un grand plaisir".

Dans une lettre du 10 septembre 1828 *Mr. Crelle* communique à *Abel* la déclaration suivante de *Legendre*:

"Ce que vous me dites du jeune *Mr. Abel* est absolument conforme à l'idée que je m'étais formée de ses grands talens en parcourant le cahier de votre journal où est inséré son charmant traité sur les fonctions elliptiques. *Mr. Poisson* m'a fait parvenir l'année passée le cahier que vous lui aviez envoyé peu de temps aprés que j'eus reçu communication de la belle découverte de *Mr. Jacobi* par le journal de *Mr. Schumacher* et par une lettre de l'auteur. Ces productions de deux jeunes savans qui m'étaient inconnus jusqu'alors, m'ont donné autant d'admiration que de satisfaction. Je vis par là que sous différens rapports ils avaient chacun de son côté perfectionné cette théorie dont je m'occupais presque exclusivement depuis plusieurs années, et que les mathématiciens de mon pays avaient regardée avec indifférence,"

Les deux lettres suivantes de *Legendre* font encore voir la haute opinion que cet illustre mathématicien avait adoptée de notre *Abel*.

Paris le 25 octobre 1828.

"Monsieur, j'ai recu et lu avec beaucoup de plaisir la lettre fort interessante que vous m'avez adressée en date du 3 de ce mois. Je vous félicite bien cordialement des grands succès que vous avez obtenus dans vos travaux sur la théorie des fonctions elliptiques. J'avais déjà connaissance des beaux mémoires que vous avez publiés dans les journaux de *M. M. Crelle* et *Schumacher*; les nouveaux détails que vous voulez bien me donner sur la suite de vos recherches, augmentent encore, s'il est possible, les titres que vous avez acquis à l'estime des savans et surtout à la mienne. En rendant justice, comme je le dois, au mérite de vos découvertes, je ne puis me défendre du sentiment d'orgueil qui m'associe en quelque sorte à vos triomphes et à ceux de votre digne émule, *M. Jacobi*, puisque c'est en grande partie par l'étude de mes ouvrages que vous avez eu occasion l'un et l'autre de développer les grands talens que la nature vous a départis. Dans une de ses dernières lettres, *M. Jacobi* s'exprime en ces termes sur votre mémoire imprimé dans le n° 138 du journal de *M. Schumacher*:

""Ce n° contient une *déduction* rigoureuse des théorèmes de transformation dont le défaut s'était fait sentir dans mes annonces sur le même objet. *Elle est au-dessus de mes éloges, comme elle est au-dessus de mes travaux*."

Un pareil aveu, exprimé avec tant de candeur, est aussi honorable pour *M. Jacobi* que pour vous. Vous serez sans doute dignes l'un de l'autre par la noblesse de vos sentimens et par la justice que vous vous rendrez réciproquement.

Je voudrais bien Monsieur, pouvoir vous offrir un exemplaire de mon traité des fonctions elliptiques en deux volumes in 4° qui a paru en janvier 1827 et qui con-

tient un bon nombre de choses qui ne sont pas dans les Exerc. d. Calc. int. Mais la difficulté est de vous faire passer cet exemplaire avec sûreté. Je ne vous apprendrai rien dans cet ouvrage; c'est au contraire sur vous deux, Messieurs, que je compte pour l'enrichir de beaucoup de découvertes précieuses auxquelles je ne serait jamais parvenu par mes propres travaux; car j'ai atteint un âge où le travail devient bien difficile ou même impossible.

La fin de votre lettre me confond par la généralité que vous avez su donner à vos recherches sur les fonctions elliptiques, et même sur des fonctions plus compliquées. Il me tarde beaucoup de voir les méthodes qui vous ont conduit à de si beaux résultats; je ne sais si je pourrais les comprendre, mais ce qu'il y a de sûr, c'est que je n'ai aucune idée des moyens que vous avez pu employer pour vaincre de pareilles difficultés. Quelle tête que celle d'un jeune Norvégien!

Une partie de ce que vous dites sur les transformations m'est déjà connue, et se trouve développée dans mon premier supplément; mais dans le reste la sphère de vos connaissances est beaucoup plus étendue que la mienne, et il me resterait surtout à éclaircir ce qui concerne les transformations imaginaires, sur quoi j'attends un ouvrage de 200 pag. in 4° que doit publier *M. Jacobi* et dont l'impression est déjà commencée. Peut-être n'êtes vous pas à portée maintenant de publier un semblable ouvrage qui contienne l'ensemble de vos découvertes; il nous intéresserait beaucoup, Monsieur. J'éspère que vous nous en dédomagerez par de nouvelles publications dans les journaux de *Mrs. Crelle* et *Schumacher*, en donnant la démonstration de vos théorèmes.

Il y a un point très intéressant à mes yeux où vous ne semblez pas vous accorder entièrement avec *M. Jacobi*. Dans le cas où n est un nombre premier, *M. Jacobi* dit que l'équation modulaire entre ce que vous appelez c_1 et c est du degré $n+1$, et il donne pag. 193 du 3 Vol de *M. Crelle*, l'expression en série des $n+1$ racines dont deux sont réelles et les $n-1$ autres imaginaires. Cela semble s'accorder avec les résultats connus pour les cas de $n=3$ et $n=5$, où l'équation dont il s'agit est du 4me et du 6me degré. Vous, Monsieur, Vous annoncez que le nombre des modules est six fois plus grand. Il y aurait donc 36 modules c_1 dans le cas de $n=5$, et cependant l'équation modulaire n'est que du 6me degré. C'est une difficulté que je vous soumets et sur laquelle je vous demandrais deux mots d'éclaircissemens, quand vous aurez occasion de m'écrire, ou que vous pourriez insérer dans le prochain mémoire que vous destinez au journal de *M. Crelle*.

Agréez, Monsieur, l'expression de mes sentimens les plus distingués".

Le Gendre.

Paris le 16 janvier 1829.

"Monsieur, j'ai remis à la maison *Schubart*, que vous m'avez indiquée, un exemplaire de mon traité qu'elle s'est chargée de vous transmettre avec le premier supplé-

2

ment qui commence le tome III; il est en route maintenant, et ne tardera pas à vous parvenir. Je vous l'offre comme un hommage bien dû à vos travaux; ils ajoutent beaucoup de prix aux miens, surtout lorsque j'aurai pu en faire entrer une partie dans les autres supplémens que je me propose de publier successivement, si le ciel m'accorde encore quelques années d'existence. J'ai trouvé dans votre lettre du 25 novembre beaucoup de choses qui m'intéressent au plus haut degré, et dont une partie se trouve déjà insérée dans le journal de *Mr. Crelle*. Vous y développez d'une manière très satisfaisante et très générale la question du nombre des modules dans lesquels peut être transformé un module, sur laquelle je vous avais demandé des éclaircissemens. Mais le mémoire imprimé sous le *n°* 30 ayant pour titre *Remarques sur quelques propriétés générales* etc.*) me paraît surpasser tout ce que vous avez publié jusqu'à présent par la profondeur de l'analyse qui y règne, ainsi que par la beauté et la généralité des résultats. Ce mémoire occupe peu de place, mais il contient un grand nombre de choses; il est rédigé en général avec beaucoup d'élégance et de concision; s'il eût pu être plus développé, j'aurais préféré que vous eussiez suivi un ordre inverse en finissant par les cas les plus généraux. Quoi qu'il et soit je ne puis que vous féliciter d'avoir entrepris de vaincre de pareilles difficultés et surtout d'y avoir si bien réussi; car quoique je n'aie pas pu me livrer au travail nécessaire pour vérifier tous vos résultats, d'autant qu'un pareil travail surpasse les forces d'un vieillard presqu'octogénaire, cependant je les ai assez examinés pour être persuadé qu'ils sont parfaitement exacts.

L'article de votre lettre où vous me communiquez quelques résultats de vos recherches sur le développement de la fonction inverse λx en série, à l'aide des deux fonctions φx et fx dont vous faites connaître plusieurs belles propriétés; cet article dis-je, a beaucoup de rapport avec ce que *M. Jacobi* a publié sur les fonctions qu'il appelle $\Theta(q,x)$, $H(q,x)$ (voy. le *n°* 27 du journal de *M. Schumacher* an 1828), et qui lui ont servi à sommer d'une manière fort élégante, un grand nombre de séries. Au moyen de la fonction $\Theta(q,x)$, *M. Jacobi* est parvenu à exprimer par une formule tres simple la fonction de troisième espèce $\int\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$ dont le parametre $-k^2.\sin^2\alpha$ se rapporte à la forme que j'ai appelée *logarithmique*, en opposition à l'autre forme $\cot^2\alpha$ ou $-1+k'^2\sin^2\alpha$ que j'ai nommée *circulaire*. Ainsi les fonctions de la troisième espèce à parametre logarithmique, sont susceptibles d'être réduites en tables, comme les fonctions de la 1re et de la 2de espèce, puisqu'elles ne dépendent que de la fonction $\Theta(q,x)$ à deux quantités seulement. Ce résultat de *M. Jacobi*, me paraît une découverte majeure dans la théorie des fonctions elliptiques de la troisième espèce surtout si on pouvait en trouver un semblable pour les autres fonctions de cette espèce à parametre circulaire. *M. Jacobi* a avancé que la chose

*) Le mémoire XV de cette édition.

était possible, mais quand j'ai voulu faire le calcul, c'est-à-dire supposer a ou x imaginaire dans la quantité $\frac{1}{2}.\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$, j'ai vu que j'étais conduit inévitablement à une fonction de trois quantités. En effet c'est une règle générale dans l'analyse que si dans une fonction de plusieurs quantités réelles vous mettez l'imaginaire $r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$, à la place d'une des variables ou constantes de la fonction, votre fonction contiendra un élément de plus. Le calcul dont je viens de parler, n'a donc pas rempli mon but, ni celui que *M. Jacobi* annonçait; j'en ai pu seulement tirer avec assez de facilité les théorèmes de transformation, et les expressions de la fonction complète que j'avais précédemment données dans le chap. XXIII de mon traité Tom. I.

Mais de là nait une difficulté sur la division générale des fonctions elliptiques. Admettrons-nous cette différence énorme entre les fonctions de 3me espèce à parametre logarithmique et les fonctions à parametre circulaire, savoir que les premières peuvent s'exprimer par une fonction de deux variables, facilement réductible en table, et que les autres ne le peuvent pas? Il y aurait donc par le fait quatre espèces de fonctions elliptiques au lieu de trois, et la quatrième serait bien plus composée que la troisième. C'est un point qui mérite d'être examiné et mis au clair. Je le recommande à votre investigation et à celle de *M. Jacobi*.

Vous m'annoncez, Monsieur, un très beau travail sur les équations algébriques, qui a pour objet de donner la résolution de toute équation numérique proposée, lorsqu'elle peut être développée en radicaux, et de déclarer insoluble sous ce rapport, toute équation qui ne satisferait pas aux conditions exigées; d'où résulte comme conséquence nécessaire que la résolution générale des équations au delà du quatrième degré, est impossible. Je vous invite à publier le plutôt que vouz pourrez, cette nouvelle théorie; elle vous fera beaucoup d'honneur, et sera généralement regardée comme la plus grande découverte qui restait à faire dans l'analyse.

Adieu, Monsieur, vous êtes heureux par vos succès, dans les objets de vos travaux, je désire que vous le soyez encore par une position sociale; qui vous permette de vous livrer tout entier aux inspirations de votre génie,

Votre dévoué serviteur
Le Gendre.

P. S. J'ai recu il y a quelque temps une lettre de *M. Humboldt* dans laquelle il me marque que le ministre de l'institution publique à Berlin a recu du roi l'autorisation de former un séminaire pour l'étude des hautes mathématiques et de la physique, dans lequel vous serez appelé comme professeur avec *M. Jacobi.*"

Mr. Crelle a fait un nécrologe d'*Abel*, qui est inséré dans le 4me volume de son journal de mathématiques dont voici la fin:

"J'avais déjà depuis long-temps conçu le projet du présent journal, mais ce qui me décida à le mettre en exécution, ce fut surtout l'importance des nombreux mé-

moires déjà préparés par *Mr. Abel*, qui consentit à leur publication, et celle des ouvrages de *Mr. Steiner*, depuis zélé et très distingué collaborateur pour les premiers tomes qui ont paru de ce journal. C'est ainsi en partie à *Mr. Abel* qu'il doit son existence. Il en est resté jusqu'à sa fin un des collaborateurs les plus assidus et les plus fidèles.

Les mémoires dont il a enrichi ce journal, et quelques autres très importans, insérés dans le journal d'astronomie de *Mr. Schumacher*, ainsi que ceux qu'il a présentés à l'académie royale de Paris, prouvent que ce jeune géomètre était doué d'un talent vraiment supérieur, et que la perte, que les mathématiques viennent d'éprouver par sa mort, est très grande et d'autant plus déplorable qu'il commençait à peine sa carrière.

Tous les travaux de *Mr. Abel* portent l'empreinte d'une sagacité et d'une force de tête extraordinaire et souvent vraiment étonnante, même sans considérer la jeunesse de l'auteur. Il pénétrait, pour ainsi dire, souvent jusqu'au fond des choses, avec une force qui semblait irrésistible, les saisissait avec une énergie si extraordinaire, il les prenait de si haut et s'élevait tellement au dessus de leur état actuel, que les difficultés semblaient s'évanouir devant la puissance victorieuse de son génie. Si l'on se rappèle le mémoire inséré dans le premier tome de ce journal sur l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations de degrés supérieurs au quatrième, ses travaux sur les fonctions elliptiques, son mémoire sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes (tome III.) etc. tous ouvrages par lesquels il a effectivement reculé les bornes de l'analyse: on trouvera que nous n'en avons pas trop dit. Aussi les talens extraordinaires de *Mr. Abel* ont ils été reconnus généralement dans les derniers temps, et certes, s'il eût été contemparain de *Newton*, celui-ci aurait dit de lui ce qu'il disait de *Cotes:* "s'il avait vécu plus long-temps, nous aurions pu apprendre encore beaucoup de lui." Les géomètres les plus distingués de notre temps, parmi lesquels il suffit de nommer *Mr. Legendre*, ce digne vétéran, auteur de la théorie des fonctions elliptiques, ont apprécié également *Mr. Abel*, en s'honorant par là autant eux mêmes que leur jeune protégé.

Il est remarquable que *Mr. Abel* et *Mr. Jacobi* de *Königsberg*, cet autre jeune géomètre d'un talent extraordinaire, ont toujours marché également et comme de front dans leurs recherches sur les fonctions elliptiques, sans cependant se connaitre l'un l'autre non plus que leurs travaux, et sans se rencontrer ni se toucher dans leur route.

M. Abel, de retour dans sa patrie, n'y trouva pas d'abord un emploi convenable: ce ne fut que peu de temps avant sa mort qu'il jouit d'appointemens fixes. Mais aussitôt que la réputation de son talent et de ses mérites dans les mathématiques eurent percé, on vit les hommes qui aiment les sciences et qui sont à même de les protéger, s'intéresser à son sort. Le gouvernement prussien, attentif à tout ce qui peut faire prospérer connaissances utiles, et avancer les sciences, songeait à attirer *Mr. Abel* à son service, dans le cas où celui-ci l'aurait désiré. En même temps plusieurs

membres de l'académie royale des sciences de Paris s'adressèrent au Roi de Suède, pour l'engager à appeler à Stockholm, près de l'académie, cet homme distingué. Le gouvernement de Prusse exécuta le premier le projet d'améliorer le sort de *Mr. Abel.* J'avais été chargé de m'instruire d'avance si *Mr. Abel* accepterait une place à Berlin, dans le cas où elle lui serait offerte; et sur sa réponse affirmative, Monseigneur le ministre du culte et de l'instruction publique à Berlin avait résolu de lui envoyer une invitation honorable. J'avais l'ordre d'écrire au jeune géomètre préalablement, que cette invitation était prète à partir. J'exécuta cet ordre à l'heure même. Mais malheureusement il était déjà trop tard. La lettre arriva peu de jours après sa mort. Un travail infatigable, joint aux soucis que lui avait long-temps donnés l'incertitude de son avenir, avaient miné sa santé délicate; il était tombé malade à la campagne où il se trouvait alors; son indisposition tourna en une pulmonie, qui dégénéra en phtisie et lui coûta la vie. J'en recus la nouvelle presque le même jour où l'invitation faite à *Mr. Abel* venait d'être expédiée. J'en fis mon rapport. Le digne ministre, qui protège et fait prospérer les sciences dans notre pays avec un zèle et une ardeur au dessus de tout éloge, exprima ses vifs regrets de cette perte prématurée, en m'écrivant "qu'il avait eu effectivement le dessein d'appeler *Mr. Abel* à Berlin, pour lui ouvrir une carrière honorable près de l'université, en lui accordant des appointemens convenables et ses frais de voyage; qu'il regrettait d'autant plus de voir son dessein échoué, qu'il avait vivement désiré l'admission de *Mr. Abel* au service de Prusse, à cause des grandes espérances que ses rares talens avaient déjà données."

Mais ce ne sont pas les grands talens seuls de *Mr. Abel* qui le rendaient si respectable et qui feront toujours regretter sa perte. Il était également distingué par la pureté et la noblesse de son caractère, et par une rare modestie qui le rendait aussi aimable, que son génie était extraordinaire. La jalousie du mérite d'autrui lui était tout à fait étrangère. Il était bien éloigné de cette avidité d'argent ou de titres, ou même de renommée, qui porte souvent à abuser de la science en en faisant un moyen de parvenir. Il appréciait trop bien la valeur des vérités sublimes qu'il cherchait, pour les mettre à un prix si bas. Il trouvait la récompense de ses efforts dans leur résultat même. Il se réjouissait presque également d'une nouvelle découverte, soit quelle eût été faite par lui ou par un autre. Les moyens de se faire valoir lui étaient inconnus: il ne faisait rien pour lui-même, mais tout pour sa science chérie. Tout ce qui à été fait pour lui, provient uniquement de ses amis, sans la moindre coopération de sa part. Peut-être une telle insouciance est-elle un peu déplacée dans le monde. Il a sacrifié sa vie pour la science, sans songer à sa propre conservation. Mais personne ne dira qu'un tel sacrifice soit moins digne et moins généreux que celui qu'on fait pour tout autre grand et noble objet, et auquel on n'hésite pas d'accorder les plus grands honneurs. Gloire donc à la mémoire de cet homme également distingué par les talens les plus extraordinaires et par la pureté de son caractère, d'un de ces êtres rares, que la nature produit à peine une fois dans un siècle"!

Berlin le 20 juin 1829. *Crelle.*

Abel fut enterré près de l'église de Froland. Plusieurs de ses amis et de ses admirateurs lui firent ériger un monument en fer de fonte. Après sa mort la famille du défunt récut une lettre de l'Institut de France que voici:

"Institut de France

Académie Royale de sciences.

Paris le 24 juillet 1830.

Le secrétaire perpétuel de l'Académie.

A la famille représentant *Mr. Abel*, savant mathématicien de Christiania.

Messieurs, je m'empresse de vous annoncer que l'académie royale des sciences, dans sa séance publique du 26 du courant, décernera solennellement son grand prix de mathématiques. Ce prix de la valeur de 3000 francs a été partagé entre feu *M. Abel* et *M. Jacobi*, professeur de mathématiques à Koenigsberg.

Je saisis avec empressement cette occasion de vous témoigner, Messieurs, les vifs regrets que la perte de votre illustre parent a fait éprouver à l'académie.

J'ai l'honneur de vous prévenir que vous pourrez faire recevoir la somme de quinze cents francs au secrétariat de l'Institut; elle sera remise à la personne munie de vos pouvoirs, et autorisée suffisamment à signer la quittance.

Agréez, Messieurs, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Arago."

Lesdits 1500 francs furent acceptés avec reconnaissance de sa famille c'est-à-dire de sa mère, d'une soeur et de plusieurs frères.

Table des matières

contenues dans ce volume.

I.

Recherche des fonctions de deux quantités variables indépendantes x et y, telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de z, x, et y.

Si l'on désigne p. ex. les fonctions $x+y$ et xy par $f(x, y)$, on a pour la première $f(z, f(x, y)) = z + f(x, y) = z + x + y$ et pour la seconde $f(z, f(x, y)) = z \, . \, f(x, y) = zxy$. La fonction $f(x, y)$ a donc dans l'un et l'autre cas la propriété remarquable que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique des trois variables indépendantes z, x et y. Je vais chercher dans ce mémoire la forme générale des fonctions, qui jouissent de cette propriété.

L'équation fondamentale est celle-ci:

1. $f(z, f(x, y)) =$ une fonction symétrique de x, y et z.

Une fonction symétrique reste la même lorsqu'on y échange entre elles d'une manière quelconque les quantités variables dont elle dépend. On a donc les équations suivantes:

$$2. \quad \begin{cases} f(z, f(x, y)) = f(z, f(y, x)), \\ f(z, f(x, y)) = f(x, f(z, y)), \\ f(z, f(x, y)) = f(x, f(y, z)), \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(x, z)), \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(z, x)). \end{cases}$$

La première équation ne peut avoir lieu à moin qu'on n'ait

$$f(x, y) = f(y, x)$$

c'est-à-dire $f(x, y)$ doit être une fonction symétrique de x et y. Par cette raison les équations (2.) se réduisent aux deux suivantes:

$$3. \quad \begin{cases} f(z, f(x, y)) = f(x, f(y, z)) \\ f(z, f(x, y)) = f(y, f(z, x)). \end{cases}$$

Soit pour abréger $f(x, y) = r$; $f(y, z) = v$; $f(z, x) = s$; on aura

$$4. \quad f(z, r) = f(x, v) = f(y, s)$$

En différentiant successivement par rapport à x, y, z, on aura

$$f'(r)\cdot\left(\frac{dr}{dx}\right)=f'(s)\cdot\left(\frac{ds}{dx}\right),$$
$$f'(v)\cdot\left(\frac{dv}{dy}\right)=f'(r)\cdot\left(\frac{dr}{dy}\right),$$
$$f'(s)\cdot\left(\frac{ds}{dz}\right)=f'(v)\cdot\left(\frac{dv}{dz}\right).$$

Si l'on multiplie ces équations membre par membre et divise les produits par $f'(r)\,.\,f'(v)\,.\,f'(s)$, on obtiendra cette équation

5. $$\left(\frac{dr}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dy}\right)\cdot\left(\frac{ds}{dz}\right)=\left(\frac{dr}{dy}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dz}\right)\cdot\left(\frac{ds}{dx}\right)$$

ou bien

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)\cdot\frac{\left(\frac{dv}{dy}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)}=\left(\frac{dr}{dy}\right)\cdot\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)}{\left(\frac{ds}{dz}\right)}.$$

Si l'on fait z invariable, $\left(\frac{dv}{dy}\right):\left(\frac{dv}{dz}\right)$ se réduira à une fonction de y seule. Soit $\varphi(y)$ cette fonction, on aura donc en même temps $\left(\frac{ds}{dx}\right):\left(\frac{ds}{dz}\right)=\varphi(x)$; car s est la même fonction de z et x que v de z et y.

Donc

6. $$\left(\frac{dr}{dx}\right)\varphi y=\left(\frac{dr}{dy}\right)\,.\,\varphi x\,.$$

On en tirera, en intégrant, la valeur générale de r,

$$r=\psi\left(\int\varphi x\,.\,dx+\int\varphi y\,.\,dy\right)$$

ψ étant une fonction arbitraire. En écrivant pour abréger φx pour $\int\varphi x dx$ et φy pour $\int\varphi y dy$, on aura

7. $$r=\psi(\varphi x+\varphi y),\quad\text{ou}\quad f(x,y)=\psi(\varphi x+\varphi y).$$

Voila donc la forme, que doit avoir la fonction cherchée. Mais elle ne peut pas dans toute sa généralite satisfaire à l'equation (4.). En effet l'équation (5.), qui donne la forme de la fonction $f(x,y)$, est beaucoup plus générale que l'équation (4.), à laquelle elle doit satisfaire. Il s'agit donc des restrictions auxquelles l'équation générale est assujettie.

On a $$f(z,r)=\psi(\varphi z+\varphi r).$$

Or $r=\psi(\varphi x+\varphi y)$, donc $f(z,r)=\psi(\varphi z+\varphi\psi(\varphi x+\varphi y))$.

Cette expression doit être symétrique par rapport à x, y et z. Donc $\varphi z+\varphi\psi(\varphi x+\varphi y)=\varphi x+\varphi\psi(\varphi y+\varphi z)$. Soit $\varphi z=0$ et $\varphi y=0$, on aura

$$\varphi\psi(\varphi x) = \varphi x + \varphi\psi(0) = \varphi x + c,$$

donc en faisant $\varphi x = p$,

$$\varphi\psi(p) = p + c.$$

En désignant donc par φ_1 la fonction inverse de celle exprimée par φ de sorte que

$$\varphi\varphi_1(x) = x,$$

on trouvera

$$\psi(p) = \varphi_1(p + c).$$

La forme générale de la fonction cherchée $f(x, y)$ sera donc

$$f(x, y) = \varphi_1(c + \varphi x + \varphi y),$$

et cette fonction a en effet la propriété demandée.

On tire de là

$$\varphi f(x, y) = c + \varphi x + \varphi y$$

ou en mettant $\psi x - c$ à la place de φx et par conséquent $\psi y - c$ à la place de φy et $\psi(f(x, y)) - c$ à la place de $\varphi(f(x, y))$,

$$\psi f(x, y) = \psi(x) + \psi(y).$$

Cela donne le théorème suivant:

Lorsqu' une fonction $f(x, y)$ de deux quantités variables indépendentes x et y a la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de x, y et z, il y aura toujours une fonction ψ pour laquelle on a

$$\psi f(x, y) = \psi(x) + \psi(y).$$

La fonction $f(x, y)$ étant donnée on trouvera aisément la fonction ψx. En effet on aura en différantiant l'équation ci-dessus suivant x et suivant y, et faisant pour abréger $f(x, y) = r$:

$$\psi'(r) \cdot \left(\frac{dr}{dx}\right) = \psi' x,$$

$$\psi'(r) \cdot \left(\frac{dr}{dy}\right) = \psi' y,$$

donc en éliminant $\psi'(r)$,

$$\left(\frac{dr}{dy}\right) \psi'(x) = \left(\frac{dr}{dx}\right) \psi' y.$$

d' où

$$\psi' x = \psi' y \cdot \frac{\left(\frac{dr}{dx}\right)}{\left(\frac{dr}{dy}\right)}.$$

Multipliant donc par dx et intégrant, on aura

$$\psi x = \psi' y \,.\int \frac{\left(\frac{dr}{dx}\right)}{\left(\frac{dr}{dy}\right)}\, dx\,.$$

Soit par exemple

$$r = f(x, y) = xy\,,$$

il se trouvera donc une fonction ψ, pour laquelle

$$\psi\,(xy) = \psi x + \psi y\,.$$

Or $r = xy$, donc $\frac{dr}{dx} = y$, $\frac{dr}{dy} = x$,

donc $$\psi x = \psi' y \int \frac{y}{x}\, dx = y\psi' y \log\,(cx),$$

ou puisque la quantité y est supposée constante,

$$\psi x = a \log\,(cx)\,.$$

Cela donne $\psi y = a \log\,(cy)$, $\psi\,(xy) = a \log\,(cxy)$;
on doit donc avoir: $a \log\,(cxy) = a \log\,(cx) + a \log\,(cy)$;
ce qui a effectivement lieu pour $c = 1$.

Par un procédé semblable au précédent on peut aussi trouver des fonctions de deux quantités variables, qui satisfont à des équations données à trois variables. Savoir on peut par des différentiations successives par rapport aux différentes quantités variables trouver des équations, desquelles on peut éliminer autant de fonctions inconnues qu'on voudra, jusqu' à ce qu'on est parvenu à une équation qui ne contient qu'une seule fonction inconnue. Cette équation sera une équation différentielle partielle à deux variables indépendentes. L'expression, que donne cette équation, contiendra donc un certain nombre de fonctions arbitraires d'une seule quantité variable. Lorsque les fonctions inconnues trouvées de cette manière seront substituées dans l'équation donnée, on trouvera une équation entre plusieurs fonctions d'une seule quantité variable. Pour trouver ces fonctions on doit différentier de nouveau et on parviendra par là à des équations différentielles ordinaires, desquelles on trouvera les fonctions, qui ne sont plus arbitraires. De cette manière on trouvera la forme de toutes les fonctions inconnues, à moins qu'il ne soit impossible de satisfaire à l'équation donnée.

II.

Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré

On peut, comme on sait, résoudre les équations générales jusqu'au quatrième degré, mais les équations d'un degré plus élevé seulement dans des cas particuliers, et, si je ne me trompe, on n'a pas encore répondu d'une manière satisfaisante à la question:

"Est-il possible de résoudre en général les équations algébriques, qui "passent le quatrième degré?"

Ce mémoire a pour but de répondre à cette question.

Résoudre algébriquement une équation ne veut dire autre chose, que d'exprimer ses racines par des fonctions algébriques des coefficiens. D'abord il faut donc considérer la forme générale des fonctions algébriques, et chercher ensuite, s'il est possible de satisfaire à l'équation donnée en mettant l'expression d'une fonction algébrique au lieu de l'inconnu.

§. I.

Sur la forme générale des fonctions algébriques.

Soient x', x'', x''' ... un nombre fini de quantités quelconques. On dit que v est une fonction algébrique de ces quantités, s'il est possible d'exprimer v en x', x'', x''' ... à l'aide des opérations suivantes. 1. par l'addition; 2. par la multiplication soit des quantités dépendentes de x', x'', x''' ... soit des quantités, qui n'en dependent pas; 3. par la division; 4. par l'extraction des racines avec des exposans premiers. Parmi ces opérations nous n'avons pas compté la soustraction, l'élévation à des puissances entières et l'extraction des racines avec des exposants composés, car elles sont évidemment comprises dans les quatre opérations mentionnées.

Lorsque la fonction v peut se former par les trois premières des opérations ci-dessus, elle est dite *rationnelle;* et si les deux premières opérations

sont seules nécessaires, elle est dite *rationnelle et entière*, ou seulement *entière*

Soit $f(x', x'', x''' \dots)$ une fonction quelconque, qui peut s' exprimer par une somme d'un nombre fini de termes de la forme

$$Ax'^{m_1} . x''^{m_2} \dots\dots$$

où A est une quantité indépendente de x', x'' etc. et m_1, m_2 etc. signifient des nombres entiers positifs; il est clair, que l'opération désignée par $f(x', x'', x''' \dots)$ est un cas particulier des deux prémières opérations ci-dessus. On peut donc considérer les fonctions entières suivant leur définition comme résultantes d'un nombre limité de répétitions de cette opération. Donc en désignant par v', v'', v''' etc. plusieurs fonctions des quantités x', x'', $x''' \dots$, de la même forme que $f(x', x'', \dots)$, la fonction $f(v', v'', \dots)$ sera évidemment de la même forme que $f(x', x'' \dots)$. Or $f(v', v'' \dots)$ est l'expression générale des fonctions résultantes par l'opération $f(x', x'', \dots)$ deux fois répétée. On trouvera donc toujours le même résultat en répétant cette opération autant de fois qu'on voudra. Il suit de là, que toute fonction entière de plusieurs quantités x', $x'' \dots\dots$ peut être exprimée par une somme de plusieurs termes de la forme $Ax'^{m_1} . x''^{m_2} \dots\dots$

Considérons maintenant les fonctions rationnelles. Lorsque $f(x', x'' \dots)$ et $\varphi(x', x'' \dots)$ sont deux fonctions entières, il est évident, que le quotient

$$\frac{f(x', x'' \dots.)}{\varphi(x', x'' \dots.)}$$

est un cas particulier du résultat des trois premières opérations, qui donnent des fonctions rationnelles. On peut donc considérer une fonction rationnelle comme le résultat de la répétition de cette opération. Si l'on désigne par v', v'', v''' etc. plusieurs fonctions de la forme $\frac{f(x', x'' \dots)}{\varphi(x', x'' \dots)}$, on voit aisément, que la fonction $\frac{f(v', v'' \dots)}{\varphi(v', v'' \dots)}$ peut être réduite à la même forme. Il suit de là, que toute fonction rationnelle de plusieurs quantités x', $x'' \dots\dots$ peut toujours être réduite à la forme

$$\frac{f(x', x'' \dots.)}{\varphi(x', x'' \dots.)}$$

où le numérateur et le dénominateur sont des fonctions entières.

Nous allons ensuite chercher la forme générale des fonctions algébriques.

Désignons par $f(x', x'' \dots)$ une fonction rationnelle quelconque, il est clair que toute fonction algébrique peut être composée à l'aide de l'opération

désignée par $f(x', x'' \ldots)$ combinée avec l'opération $\sqrt[m]{r}$, où m est un nombre premier. Donc, si $p', p'' \ldots$ sont des fonctions rationnelles de $x', x'' \ldots$

$$p_1 = f(x', x'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots)$$

sera la forme générale des fonctions algébriques de $x', x'' \ldots$ dans lesquelles l'opération exprimée par $\sqrt[m]{r}$ affecte seulement des fonctions rationnelles. Les fonctions de la forme p_1 seront dites fonctions algébriques *du premier ordre.* En désignant par p_1', p_1'' plusieurs quantités de la forme p_1, l'expression,

$$p_2 = f(x', x'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots \sqrt[n_1']{p_1'}, \sqrt[n_1'']{p_1''} \ldots)$$

sera la forme générale des fonctions algébriques de $x', x'' \ldots$, dans lesquelles l'opération $\sqrt[m]{r}$ affecte seulement des fonctions rationnelles et des fonctions algébriques du premier ordre. Les fonctions de la forme p_2 seront dites fonctions algébriques *du deuxième ordre.* De la même manière l'expression

$$p_3 = f(x', x'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots \sqrt[n_1']{p_1'}, \sqrt[n_1'']{p_1''}, \ldots \sqrt[n_2']{p_2'}, \sqrt[n_2'']{p_2''} \ldots)$$

dans laquelle p_2', p_2'' sont des fonctions du deuxième ordre, sera la forme générale des fonctions algébriques de $x', x'' \ldots$ dans lesquelles l'opération $\sqrt[m]{r}$ n'affecte que des fonctions rationnelles, et des fonctions algébriques du premier et du deuxième ordre.

En continuant de cette manière, on obtiendra des fonctions algébriques du troisième, du quatrième ... du $\mu^{\text{ième}}$ ordre, et il est clair, que l'expression des fonctions du $\mu^{\text{ième}}$ ordre sera l'expression générale des fonctions algébriques.

Donc en désignant par μ l'ordre d'une fonction algébrique quelconque et par v la fonction même, on aura

$$v = f(r', r'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots)$$

où p', p'' sont des fonctions de l'ordre $\mu - 1$; $r', r'' \ldots$ des fonctions de l'ordre $\mu - 1$ ou des ordres moins élevés, et $n', n'' \ldots$ des nombres premiers. f signifie toujours une fonction rationnelle des quantités comprises entre les parenthèses.

On peut évidemment supposer, qu'il est impossible d'exprimer une des quantités $\sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots$ par une fonction rationnelle des autres et des quantités $r', r'' \ldots$; car dans le cas contraire la fonction v aurait cette forme plus simple,

$$v = f(r', r'' \ldots \sqrt[n']{p'}, \sqrt[n'']{p''} \ldots)$$

où le nombre des quantités $\sqrt[n']{p'}$, $\sqrt[n'']{p''}$ ... serait diminué au moins d'une unité. En réduisant de cette manière l'expression de v autant que possible, on parviendrait ensuite ou à une expression irréductible, ou à une expression de la forme

$$v = f(r' r'', r''' \ldots)$$

mais cette fonction serait seulement du $(\mu - 1)^{me}$ ordre, tandis que v doit être du $\mu^{ième}$ ordre, ce qui est une contradiction.

Si dans l'expression de v le nombre des quantités $\sqrt[n']{p'}$, $\sqrt[n'']{p''}$ ... est égal à m, nous dirons, que la fonction v est du $\mu^{ième}$ *ordre* et du $m^{ième}$ *degré*. On voit donc, qu'une fonction de l'ordre μ et du degré 0 est la même chose qu'une fonction de l'ordre $\mu - 1$, et qu'une fonction de l'ordre 0 est la même chose qu'une fonction rationnelle.

Il suit de là, qu'on peut poser

$$v = f(r', r'' \ldots \sqrt[n]{p})$$

où p est une fonction du $(\mu - 1)^{me}$ ordre, mais $r', r'' \ldots$ des fonctions du μ^{me} ordre et tout au plus du $(m - 1)^{me}$ degré, et on peut toujours supposer qu'il est impossible d'exprimer $\sqrt[n]{p}$ par une fonction rationnelle de ces quantités.

Dans ce qui précéde nous avons vu, qu'une fonction rationnelle de plusieurs quantités peut toujours être réduite à la forme

$$\frac{s}{t}$$

où s et t sont des fonctions entières des mêmes quantités variables. On conclut de là, que v peut toujours être exprimée comme il suit,

$$v = \frac{\varphi(r', r'' \ldots \sqrt[n]{p})}{\tau(r', r'' \ldots \sqrt[n']{p})}$$

où φ et τ signifient des fonctions entières des quantités $r', r'' \ldots$ et $\sqrt[n]{p}$. En vertu de ce, que nous avons trouvé plus haut, toute fonction entière de plusieurs quantités $s, r', r'' \ldots$ peut s'exprimer par la forme

$$t_0 + t_1 s + t_2 s^2 + \ldots t_m s^m$$

$t_0, t_1 \ldots t_m$ étant des fonctions entières de $r', r'', r''' \ldots$ sans s. On peut donc poser

$$v = \frac{t_0 + t_1 p^{\frac{1}{n}} + t_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots t_m p^{\frac{m}{n}}}{v_0 + v_1 p^{\frac{1}{n}} + v_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots v_{m'} p^{\frac{m'}{n}}} = \frac{T}{V}$$

où $t_0, t_1 \ldots t_m$ et $v_0, v_1 \ldots v_{m'}$ sont des fonctions entières de r', r'', r''' etc.

Soient $V_1, V_2 \ldots V_{n-1}$ les $n-1$ valeurs de V, qu'on trouve en mettant successivement $\alpha p^{\frac{1}{n}}, \alpha^2 p^{\frac{1}{n}}, \alpha^3 p^{\frac{1}{n}} \ldots \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}}$ au lieu de $p^{\frac{1}{n}}$, α étant une racine différente de l'unité de l'équation $\alpha^n - 1 = 0$; on trouvera en multipliant la fraction $\frac{T}{V}$ en haut et en bas par $V_1 . V_2 . V_3 \ldots V_{n-1}$

$$v = \frac{T . V_1 . V_2 \ldots V_{n-1}}{V . V_1 . V_2 \ldots V_{n-1}}.$$

Le produit $V . V_1 \ldots V_{n-1}$ peut, comme on sait, s'exprimer par une fonction entière de p et des quantités $r', r'' \ldots$, et le produit $T . V_1 \ldots V_{n-1}$ est, comme on voit, une fonction entière de $\sqrt[n]{p}$ et de $r', r'' \ldots$ En posant ce produit égal à

$$s_0 + s_1 p^{\frac{1}{n}} + s_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots s_k p^{\frac{k}{n}},$$

on trouvera

$$v = \frac{s_0 + s_1 p^{\frac{1}{n}} + s_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots s_k p^{\frac{k}{n}}}{m}$$

ou en écrivant $q_0, q_1, q_2 \ldots$ au lieu de $\frac{s_0}{m}, \frac{s_1}{m}, \frac{s_2}{m}$ etc.

$$v = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots q_k p^{\frac{k}{n}}$$

où $q_0, q_1 \ldots q_k$ sont des fonctions rationnelles des quantités p, r', r'' etc.

Soit μ un nombre entier quelconque, on peut toujours poser

$$\mu = an + \alpha$$

a et α étant deux nombres entiers et $\alpha < n$. Il suit de là, que

$$p^{\frac{\mu}{n}} = p^{\frac{an+\alpha}{n}} = p^a . p^{\frac{\alpha}{n}}.$$

En mettant donc cette expression au lieu de $p^{\frac{\mu}{n}}$ dans l'expression de v, on obtiendra,

$$v = q_0 + q_1 p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

q_0, q_1, q_2 étant encore des fonctions rationnelles de $p, r', r'' \ldots$ et par conséquent des fonctions du μ^{me} ordre et au plus du $(m-1)^{me}$ degré et liées entre elles de manière qu'il soit impossible d'exprimer $p^{\frac{1}{n}}$ rationnellement par ces quantités.

Dans l'expression de v ci-dessus, on peut toujours faire $q_1 = 1$. Car si q_1 n'est pas nul, on obtiendra en faisant $p_1 = p . q_1^n$

$$p = \frac{p_1}{q_1^n} \text{ et } p^{\frac{1}{n}} = \frac{p_1^{\frac{1}{n}}}{q_1}, \text{ donc}$$

$$v = q_0 + p_1^{\frac{1}{n}} + \frac{q_2}{q_1^2} \cdot p_1^{\frac{2}{n}} \dots + \frac{q_{n-1}}{q_1^{n-1}} \cdot p_1^{\frac{n-1}{n}},$$

expression de la même forme que la précédente, seulement que $q_1 = 1$. Si $q_1 = 0$, soit q_μ une des quantités $q_1, q_2 \dots q_{n-1}$, qui n'est pas nulle, et soit $q_\mu^n \cdot p^\mu = p_1$. On conclut de là, $q_\mu^\alpha \cdot p^{\frac{\alpha\mu}{n}} = p_1^{\frac{\alpha}{n}}$. Donc en prenant deux nombres entiers α et β, qui satisfont à l'équation $\alpha\mu - \beta n = \mu'$, μ' étant un nombre entier, on aura

$$q_\mu^\alpha \cdot p^{\frac{\beta n + \mu'}{n}} = p_1^{\frac{\alpha}{n}} \text{ et } p^{\frac{\mu'}{n}} = q_\mu^{-\alpha} \cdot p^{-\beta} \cdot p_1^{\frac{\alpha}{n}}.$$

En vertu de cela et en remarquant que $q_\mu p^{\frac{\mu}{n}} = p_1^{\frac{1}{n}}$, v aura la forme

$$v = q_0 + p_1^{\frac{1}{n}} + q_2 p_1^{\frac{2}{n}} \dots q_{n-1} p_1^{\frac{n-1}{n}}.$$

De tout ce qui précède on conclut:

Si v est une fonction algébrique de l'ordre μ et du degré m, on peut toujours poser:

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + q_3 p^{\frac{3}{n}} \dots q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}};$$

où n est un nombre premier, $q_0, q_2 \dots q_{n-1}$ sont des fonctions algébriques de l'ordre μ et du degré $m-1$ au plus, p est une fonction algébrique de l'ordre $\mu - 1$, et $p^{\frac{1}{n}}$ ne peut s'exprimer rationnellement en $q_0, q_1 \dots q_{n-1}$.

§. II.

Propriétés des fonctions algébriques, qui satisfont à une équation donnée.

Soit

$$c_0 + c_1 y + c_2 y^2 \dots + c_{r-1} y^{r-1} + y^r = 0. \quad \dots\dots\dots \quad 1.$$

une équation quelconque du degré r, où $c_0, c_1 \dots$ sont des fonctions rationnelles de $x', x'' \dots$, $x', x'' \dots$ étant des quantités indépendantes quelconques. Supposons, qu'on peut satisfaire à cette équation en mettant au lieu de y une fonction algébrique de $x', x'' \dots$ Soit

$$y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 2.$$

cette fonction. En substituant cette expression de y dans l'équation proposée, on obtiendra, en vertu de ce qui précède, une expression de la forme

$$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 3.$$

où $r_0, r_1, r_2, .., r_{n-1}$ sont des fonctions rationnelles des quantités $p, q_0, q_1 \ldots q_{n-1}$.

Or je dis, que l'équation (3) ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait séparément

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 0 \ldots r_{n-1} = 0.$$

En effet dans le cas contraire, on aurait en posant $p^{\frac{1}{n}} = z$, les deux équations

$$z^n - p = 0, \quad \text{et}$$

$$r_0 + r_1 z + r_2 z^2 \ldots + r_{n-1} z^{n-1} = 0$$

qui auraient une ou plusieurs *racines communes.* Soit k le nombre de ces racines, on peut, comme on sait, trouver une équation, qui a pour racines les k racines mentionnées, et dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles de $p, r_0, r_1 \ldots r_{n-1}$. Soit

$$s_0 + s_1 z + s_2 z^2 \ldots + s_{k-1} z^{k-1} + z^k = 0$$

cette équation, et

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 \ldots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^{\mu}$$

un facteur de son prémier membre, où t_0, t_1 etc. sont des fonctions rationnelles de $p, r_0, r_1 \ldots r_{n-1}$, on aura de même

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 \ldots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^{\mu} = 0,$$

et il est clair, qu'on peut supposer, qu'il est impossible de trouver une équation de la même forme d'un degré moins élevé. Cette équation a ses μ racines communes avec l'équation $z^n - p = 0$. Or toutes les racines de l'équation $z^n - p = 0$, sont de la forme αz, où α est une racine quelconque de l'unité. Donc en remarquant, que μ ne peut pas être moindre que 2, parce qu'il est impossible d'exprimer z en fonction rationnelle des quantités $p, r_0, r_1 \ldots r_{n-1}$, il s'ensuit, que deux équations de la forme

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 \ldots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^{\mu} = 0 \quad \text{et}$$

$$t_0 + \alpha t_1 z + \alpha^2 t_2 z^2 \ldots + \alpha^{\mu-1} t_{\mu-1} z^{\mu-1} + \alpha^{\mu} z^{\mu} = 0$$

doivent avoir lieu. De ces équations on tire en éliminant z^{μ}

$$t_0(1 - \alpha^{\mu}) + t_1(\alpha - \alpha^{\mu}) z \ldots + t_{\mu-1}(\alpha^{\mu-1} - \alpha^{\mu}) z^{\mu-1} = 0.$$

Mais cette équation étant du degré $\mu - 1$, et l'équation $z^{\mu} + t_{\mu-1} z \ldots = 0$ étant irréductible et que par conséquent t_0 ne peut être égal à zéro, on doit avoir $\alpha^{\mu} - 1 = 0$, ce qui ne peut pas avoir lieu. On doit donc avoir

$$r = 0, \quad r_1 = 0 \ldots r_{n-1} = 0.$$

Maintenant, ces équations ayant lieu, il est clair qu'on satisfera à l'équation proposée en attribuant à $p^{\frac{1}{n}}$ toutes les valeurs $\alpha p^{\frac{1}{n}}$, $\alpha^2 p^{\frac{1}{n}} \ldots \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}}$. On voit aisément, que toutes ces valeurs de y seront différentes entre elles; car dans le cas contraire on aurait une équation de la même forme que (3), mais une telle équation conduit, comme on vient de voir, à des contradictions.

En désignant donc par y_1, $y_2 \ldots y_n$ les n racines de l'équation (1), on aura

$$y_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

$$y_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + \alpha^2 q_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots\ldots + \alpha^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = q_0 + \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + \alpha^{n-2} q_2 p^{\frac{2}{n}} \ldots + \alpha q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

De ces n équations on tirera sans peine

$$q_0 = \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + y_n)$$

$$p^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} (y_1 + \alpha^{n-1} y_2 + \alpha^{n-2} y_3 \ldots + \alpha y_n)$$

$$q_2 p^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n} (y_1 + \alpha^{n-2} y_2 + \alpha^{n-4} y_3 \ldots + \alpha^2 y_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} (y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3 \ldots\ldots + \alpha^{n-1} y_n)$$

On voit par là, que toutes les quantités $p^{\frac{1}{n}}$, q_0, $q_2 \ldots q^{n-1}$ sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

En effet on a

$$q_\mu = n^{\mu-1} \cdot \frac{y_1 + \alpha^{-\mu} y_2 + \alpha^{-2\mu} y_3 \ldots + \alpha^{-(n-1)\mu} y_n}{(y_1 + \alpha^{-1} y_2 + \alpha^{-2} y_3 \ldots + \alpha^{-(n-1)} y_n)^\mu}.$$

Considérons maintenant l'équation générale du degré m

$$0 = a + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_{m-1} x^{m-1} + x^m$$

et supposons qu'elle soit résoluble algébriquement. Soit

$$x = s_0 + v^{\frac{1}{n}} + s_2 v^{\frac{2}{n}} \ldots + s_{n-1} v^{\frac{n-1}{n}}.$$

En vertu de ce qui précède les quantités v, s_0, s_2 etc. peuvent s'exprimer

rationnellement en x_1, $x_2 \ldots x_m$, en désignant par x_1, $x_2 \ldots x_m$ les racines de l'équation proposée.

Considérons une de ces quantités quelconque v, s_0, s_2 etc. par exemple v. Soient v_1, $v_2 \ldots v_{n'}$ les valeurs différentes de v, qu'on trouve lorsqu'on échange entre elle les racines x_1, $x_2 \ldots x_m$ de toutes les manières possibles, on peut donc former une équation du degré n', dont les coefficiens, sont des fonctions rationnelles de a, $a_1 \ldots a_{m-1}$ et dont les racines sont les quantités v_1, $v_2 \ldots v_{n'}$ qui sont des fontions rationnelles des quantités x_1, $x_2 \ldots x_m$.

Il faut mettre les a, a_1, a_2, ... a_{m-1} à la place de x, x', x'', (§ I)

Donc si l'on pose

$$v = t_0 + u^{\frac{1}{\nu}} + t_2 u^{\frac{2}{\nu}} \ldots + t_{\nu-1} u^{\frac{\nu-1}{\nu}}$$

toutes les quantités $u^{\frac{1}{\nu}}$, t_0, $t_2 \ldots . t_{\nu-1}$ seront des fonctions rationnelles de v_1, $v_2 \ldots . v_{n'}$, et par conséquent de x_1, $x_2 \ldots . x_m$. En traitant les quantités u, t_0, t_2 etc. de la même manière on en conclut:

Si une équation est résoluble algébriquement, on peut toujours donner à la racine une telle forme, que toutes les fonctions algébriques, dont elle est composée peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles des racines de l'equation proposée.

§. III.

Sur le nombre des valeurs différentes, qu'une fonction de plusieurs quantités peut acquérir, lorsqu' on y échange entre elles les quantités qu'elle renferme.

Soit v une fonction rationnelle de plusieurs quantités indépendantes x_1 x_2 $\ldots x_n$. Le nombre des valeurs différentes, dont cette fonction est susceptible par la permutation des quantités, dont elle dépende, ne peut pas surpasser le produit $1 . 2 . 3 \ldots n$. Soit μ ce produit.

Soit maintenant

$$v\begin{pmatrix}\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \ldots .\\ a\,b\,c\,d \ldots .\end{pmatrix}$$

la valeur, qu'une fonction quelconque v reçoit lorsqu' on y substitue x_a, x_b, x_c, x_d etc. au lieu de x_α, x_β, x_γ, x_δ etc. il est clair qu'en désignant par A_1, $A_2 \ldots A_\mu$ les diverses permutations au nombre de μ que l'on peut former avec les indices $1, 2, 3, \ldots n$, les valeurs différentes de v pourront être exprimées par

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_1\end{pmatrix},\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix},\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_3\end{pmatrix} \ldots .\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_\mu\end{pmatrix}$$

Supposons que le nombre des valeurs différentes de v soit moindre que μ, il faut que plusieurs valeurs de v soient égales entre elles en sorte qu'on ait par exemple

$$v\binom{A_1}{A_1} = v\binom{A_1}{A_2} \ldots = v\binom{A_1}{A_m}.$$

Si l'on fait subir à ces quantités la permutation désignée par $\binom{A_1}{A_{m+1}}$, on aura cette nouvelle série de valeurs égales

$$v\binom{A_1}{A_{m+1}} = v\binom{A_1}{A_{m+2}} \ldots = v\binom{A_1}{A_{2m}}$$

valeurs qui sont différentes des premières mais en même nombre. En changeant de nouveau ces quantités par la permutation désignée par $\binom{A_1}{A_{2m+1}}$, on aura un nouveau système de quantités égales mais différentes des précédentes. En continuant ce procédé jusqu'à ce qu'on ait achevé toutes les permutations possibles, les valeurs de v au nombre de μ seront partagées en plusieurs groupes, dont chacun contiendra un nombre de m valeurs équivalentes. Il suit de là que si l'on représente le nombre des valeurs différentes de v par ϱ, nombre égal à celui des groupes, on aura

$$\varrho m = 1 . 2 . 3 \ldots n$$

c'est-à-dire:

Le nombre des valeurs différentes, qu'une fonction de n quantités peut acquérir par toutes les permutations possibles de ces quantités est nécessairement un diviseur du produit $1 . 2 . 3 \ldots n$. Cela est connu.

Soit maintenant $\binom{A_1}{A_m}$ une permutation quelconque. Supposons qu'en applicant celle-ci plusieurs fois de suite à la fonction v on obtient la suite des valeurs

$$v, \; v_1, \; v_2 \ldots v_{p-1}, \; v_p$$

il est clair que v sera nécessairement répété plusieurs fois. Lorsque v revient après un nombre p de changements, nous dirons que v est une *permutation récurrente de l'ordre p*. On a donc cette série périodique

$$v, \; v_1, \; v_2 \ldots v_{p-1}, \; v, \; v_1, \; v_2 \ldots$$

ou bien, si l'on représente par $v\binom{A_1}{A_m}^r$ la valeur de v qui résulte après avoir répété r fois de suite la permutation désignée par $\binom{A_1}{A_m}$ on a la série

$$v\binom{A_1}{A_m}^0, \; v\binom{A_1}{A_m}^1, \; v\binom{A_1}{A_m}^2 \ldots v\binom{A_1}{A_m}^{p-1}, \; v\binom{A_1}{A_m}^0.$$

Il suit de là

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{\alpha p+r}=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r}$$
$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{\alpha p}=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{0}=v.$$

Or, soit p le plus grand nombre premier contenu dans n, et le nombre des valeurs différentes de v soit moindre que p, il faut que d'un nombre p de valeurs quelconques de v deux soient nécessairement égales éntre elles.

Il faut donc que deux des p valeurs

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{0},\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{1},\ v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{2}\dots v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{p-1}$$

soient égales entre elles. Soit par exemple

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r}=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r'}$$

on en conclut

$$v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r+p-r}=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r'+p-r}.$$

Ecrivant r au lieu de $r'+p-r$ et remarquant que $v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{p}=v$, on en tire

$$v=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r}$$

où r évidemment n'est pas multiple de p. La valeur de v n'est donc pas changée par la substitution $\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r}$ ni par conséquent non plus par la répétition de la même substitution. On a donc

$$v=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{r\alpha}$$

α étant un nombre entier. Maintenant si p est un nombre premier, on pourra évidemment toujours trouver un nombre entier β de la sorte que

$$r\alpha=p\beta+1$$

donc

$$v=p\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{p\beta+1}.$$

et puisque $$v=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}^{p\beta}$$

on aura $$v=v\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}.$$

La valeur de v ne sera donc pas changée par la permutation recurrente $\begin{pmatrix}A_1\\A_m\end{pmatrix}$ du degré p.

Or, il est clair que

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\delta\dots\zeta\eta\\\beta\gamma\delta\varepsilon\dots\eta\alpha\end{pmatrix}\ \text{et}\ \begin{pmatrix}\beta\gamma\delta\varepsilon\dots\eta\alpha\\\gamma\alpha\beta\delta\dots\zeta\eta\end{pmatrix}$$

sont des permutations récurrentes du degré p, lorsque p est le nombre des indices $\alpha, \beta, \gamma \ldots \eta$. La valeur de v ne sera donc changée non plus par la combinaison de ces deux permutations. Ces deux permutations sont évidemment équivalentes à cette unique

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\gamma\\ \gamma\alpha\beta\end{pmatrix}$$

et celle-ci aux deux suivantes appliquées successivement

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \beta\alpha\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}\beta\gamma\\ \gamma\beta\end{pmatrix}.$$

La valeur de v ne sera donc pas changée par la combinaison de ces deux permutations.

Donc $$v = v\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \beta\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\gamma\\ \gamma\beta\end{pmatrix}$$

de même $$v = v\begin{pmatrix}\beta\gamma\\ \gamma\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\delta\\ \delta\gamma\end{pmatrix}$$

d'où l'on tire $$v = v\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \beta\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\delta\\ \delta\gamma\end{pmatrix}.$$

On voit par là que la fonction v n'est pas changée par deux permutations successives de la forme $\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \beta\alpha\end{pmatrix}$, α et β étant deux indices quelconques. Si l'on désigne une telle permutation sous le nom de *transposition*, on peut conclure qu'une valeur quelconque de v ne sera pas changée par un nombre pair de transpositions, et que par conséquent toutes les valeurs de v qui résultent d'un nombre impair de transpositions sont égales. Toute permutation des élemens d'une fonction peut s'opérer à l'aide d'un certain nombre de transpositions; donc la fonction v ne peut avoir plus que deux valeurs différentes. De là on tire le théorème suivant:

Le nombre des valeurs différentes que peut obtenir une fonction de n quantités ou ne peut être abaissé au dessous du plus grand nombre premier compris entre les facteurs de n, ou seulement à 2 ou à 1.

Il est donc impossible de trouver une fonction de 5 quantités qui ait 3 ou 4 valeurs différentes.

La démonstration de ce théorème est prise d'un mémoire de *M. Cauchy* inséré dans le 17[me] cahier du Journal de l'école polytechnique pag. 1 etc.

Soient v et v' deux fonctions, dont chacune aura deux valeurs différentes, il suit de ce qui précède qu'en désignant par v_1, v_2 et v_1', v_2' ces doubles valeurs, les deux expressions

$$v_1 + v_2 \text{ et } v_1 v_1' + v_2 v_2'$$

seront des fonctions symétriques. Soit

$$v_1 + v_2 = t \quad \text{et} \quad v_1 v_1' + v_2 v_2' = t_1,$$

on en tire

$$v_1 = \frac{t \cdot v_2' - t_1}{v_2' - v_1'}.$$

Soit maintenant le nombre des quantités $x_1, x_2, \ldots x_m$ égal à cinq, le produit $\varrho = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$ sera évidemment une fonction qui a deux valeurs différentes; la seconde valeur étant la même fonction avec le signe opposé. Donc en posant $v_1' = \varrho$, on aura $v_2' = -\varrho$. L'expression de v_1 sera donc

$$v_1 = \frac{t_1 + \varrho t_2}{2\varrho}, \text{ ou bien}$$

$$v_1 = \tfrac{1}{2} t_2 + \frac{t_1}{2\varrho^2} \cdot \varrho$$

où $\frac{1}{2} t_2$ est une fonction symétrique; ϱ a deux valeurs qui ne diffèrent que par rapport au signe de sorte que $\frac{t_1}{2\varrho^2}$ soit également une fonction symétrique. Donc en posant $\frac{1}{2} t_2 = p$ et $\frac{t_1}{2\varrho^2} = q$ il s'ensuit

> que toute fonction de cinq quantités, qui a deux valeurs différentes, pourra être mise sous la forme, $p + q \cdot \varrho$, où p et q sont deux fonctions symétriques et $\varrho = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_4 - x_5)$.

Pour notre but nous avons encore besoin de la forme générale des fonctions de cinq quantités, qui ont cinq valeurs différentes. On peut la trouver comme il suit.

Soit v une fonction rationnelle des quantités x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 qui a la propriété d'être invariable lorsqu'on échange entre elles quatre des cinq quantités quelconques par exemple x_2, x_3, x_4, x_5. Sous cette condition v sera évidemment symétrique par rapport à x_2, x_3, x_4, x_5. On peut donc exprimer v par une fonction rationnelle de x_1 et par des fonctions symétriques de x_2, x_3, x_4, x_5. Mais toute fonction symétrique de ces quantités peut s'exprimer par une fonction rationnelle des coefficiens d'une équation du quatrième degré, dont les racines sont x_2, x_3, x_4, x_5. Donc en posant

$$(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s$$

la fonction v peut s'exprimer rationnellement en x_1, p, q, r, s. Mais si l'on pose $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) = x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e$, on aura

$$(x-x_1)(x^4-px^3+qx^2-rx+s)=x^5-ax^4+bx^3-cx^2+dx-e=$$
$$x^5-(p+x_1)x^4+(q+px_1)x^3-(r+qx_1)x^2+(s+rx_1)x-sx_1,$$

d'où l'on tire

$$p=a-x_1$$
$$q=b-ax_1+x_1^2$$
$$r=c-bx_1+ax_1^2-x_1^3$$
$$s=d-cx_1+bx_1^2-ax_1^3+x_1^4,$$

la fonction v peut donc s'exprimer rationnellement en x_1, a, b, c, d et e.

Il suit de là, que la fonction v peut être mise sous la forme

$$v=\frac{t}{\varphi(x_1)}$$

où t et $\varphi(x_1)$ sont deux fonctions entières de x_1, a, b, c, d et e. En multipliant cette fonction en haut et en bas par $\varphi(x_2).\varphi(x_3).\varphi(x_4).\varphi(x_5)$, on aura

$$v=\frac{t.\varphi(x_2).\varphi(x_3).\varphi(x_4).\varphi(x_5)}{\varphi(x_1).\varphi(x_2).\varphi(x_3).\varphi(x_4).\varphi(x_5)}.$$

Or, $\varphi(x_2).\varphi(x_3).\varphi(x_4).\varphi(x_5)$ est, comme on voit, une fonction entière et symétrique de x_2, x_3, x_4, x_5. On peut donc exprimer ce produit en fonction entière de p, q, r, s et par suite en fonction entière de x_1, a, b, c, d, e Le numérateur de la fraction ci-dessus est donc une fonction entière des mêmes quantités; le dénominateur est une fonction symétrique de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et par conséquent il peut s'exprimer en fonction rationnelle de a, b, c, d, e. On peut donc poser

$$v=r_0+r_1x_1+r_2x_1^2\ldots+r_mx_1^m.$$

En multipliant l'équation

$$x_1^5=ax^{14}-bx_1^3+cx_1^2-dx_1+e$$

successivement par x_1, $x_1^2\ldots x_1^{m-5}$, il est clair qu'on obtiendra un nombre de $m-4$ équations, desquelles on tirera les valeurs de x_1^5, $x_1^6\ldots x_1^m$ en des fonctions de la forme

$$\alpha+\beta x_1+\gamma x_1^2+\delta x_1^3+\varepsilon x_1^4,$$

où α, β, γ, δ, ε sont des fonctions rationnelles de a, b, c, d, e.

On peut donc réduire v à la forme

$$v=r_0+r_1x_1+r_2x_1^2+r_3x_1^3+r_4x_1^4 \qquad \text{(a)}$$

où r_0, r_1, r_2 etc. sont des fonctions rationnelles de a, b, c, d, e, c'est-à-dire des fonctions symétriques de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Voilà la forme générale des fonctions qui ne sont pas altérées lorsqu'on

y échange entre elles les quantités x_2, x_3, x_4, x_5. Ou elles ont cinq valeurs différentes entre elles ou elles sont symétriques.

Soit maintenant v une fonction rationnelle de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, qui a les cinq valeurs suivantes v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Considérons la fonction $x_1^m v$. En y échangeant entre elles de toutes les manières possibles les quatre quantités x_2, x_3, x_4, x_5 la fonction $x_1^m v$ aura toujours une des valeurs suivantes

$$x_1^m v_1, \quad x_1^m v_2, \quad x_1^m v_3, \quad x_1^m v_4, \quad x_1^m v_5.$$

Or je dis, que le nombre des valeurs différentes de $x_1^m v$ résultantes par ces changements sera moindre que cinq. En effet, si toutes les cinq valeurs avaient lieu, on tirerait de ces valeurs en échangeant x_1 successivement avec x_2, x_3, x_4, x_5, 20 valeurs nouvelles, qui seraient nécessairement différentes entre elles et des précédentes. La fonction aurait donc en tout 25 valeurs différentes, ce qui est impossible, car 25 n'est pas diviseur du produit 1.2.3.4.5. En désignant donc par μ le nombre des valeurs que peut prendre v lorsqu'on y échange entre elles les quantités x_2, x_3, x_4, x_5 de toutes les manières possibles, μ doit avoir l'une des quatre valeurs suivantes 1, 2, 3, 4.

1. Soit $\mu = 1$, d'après ce qui précède v sera de la forme (a)
2. Soit $\mu = 4$, la somme $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ sera une fonction de la forme (a). Or on a

$v_5 = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) - (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) =$ à une foncrion symétrique moins $(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$; donc v_5 est de la forme (a).

3. Soit $\mu = 2$, donc $v_1 + v_2$ sera une fonction de la forme (a). Soit donc

$$v_1 + v_2 = r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + r_3 x_1^3 + r_4 x_1^4 = \varphi(x_1).$$

En échangeant successivement x_1 avec x_2, x_3, x_4, x_5 on aura

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= \varphi(x_1) \\ v_2 + v_3 &= \varphi(x_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{m-1} + v_m &= \varphi(x_{m-1}) \\ v_m + v_1 &= \varphi(x_m) \end{aligned}$$

où m est un des nombres 2, 3, 4, 5. Pour $m = 2$, on aura $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, ce qui est impossible, car le nombre des valeurs de $\varphi(x_1)$ doit être cinq. Pour $m = 3$ on aura

$$v_1 + v_2 = \varphi(x_1), \quad v_2 + v_3 = \varphi(x_2), \quad v_3 + v_1 = \varphi(x_3) \text{ d'où l'on tire}$$

$$2v_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \varphi(x_3).$$

Mais le second membre de cette équation a plus de 5 valeurs, savoir elle en

a 30. On prouvera de la même manière que m ne peut être égal à 4 ni à 5. Il suit de là que μ n'est pas égal à 2.

.4. Soit $\mu = 3$. Dans ce cas $v_1 + v_2 + v_3$ et par conséquent $v_4 + v_5 = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) - (v_1 + v_2 + v_3)$ aura cinq valeurs. Mais on vient de voir que cette supposition n'a pas lieu. Donc μ ne peut pas non plus être égal à 3.

De tout cela on conclut le Théorème:

Toute fonction rationnelle de cinq quantités, qui a cinq valeurs différentes, aura nécessairement la forme

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4$$

où r_0, r_1, r_2 etc. sont des fonctions symétriques, et x une des cinq quantités quelconque.

De l'équation

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 = v$$

on trouvera aisément, en faisant usage de l'équation proposée, pour la valeur de x la forme suivante

$$x = s_0 + s_1 v + s_2 v^2 + s_3 v^3 + s_4 v^4$$

où s_0, s_1, s_2 etc. de même que r_0, r_1, r_2 etc. sont des fonctions symétriques.

Soit v une fonction rationnelle qui a m valeurs différentes v_1, v_2, $v_3 \ldots v_m$. En posant

$$(v - v_1)(v - v_2)(v - v_3) \ldots (v - v_m)$$
$$= q_0 + q_1 v + q_2 v^2 \ldots + q_{m-1} v^{m-1} + v^m = 0$$

on sait que q_0, q_1, $q_2 \ldots$ sont des fonctions symétriques, et les m racines de l'équation sont v_1, v_2, $v_3 \ldots v_m$. Or je dis, qu'il est impossible d'exprimer la valeur de v en racine d'une équation de la même forme mais d'un degré moins élevé. En effet soit

$$t_0 + t_1 v + t_2 v^2 \ldots + t_{\mu-1} v^{\mu-1} + v^\mu = 0$$

une telle équation où t_0, t_1 etc. sont des fonctions symétriques, et soit v_1 une valeur de v qui satisfait à cette équation, on aura

$$v^\mu + t_{\mu-1} v^{\mu-1} \ldots = (v - v_1) P_1 .$$

En échangeant entre eux les élémens de la fonction, on trouvera la série suivante d'équations:

$$v^\mu + t_{\mu-1}v^{\mu-1}\ldots = (v-v_2)P_2,$$
$$v^\mu + t_{\mu-1}v^{\mu-1}\ldots = (v-v_3)P_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v^\mu - t_{\mu-1}v^{\mu-1}\ldots = (v-v_m)P_m.$$

On en conclut que $v-v_1$, $v-v_2$, $v-v_3\ldots v-v_m$ seront toutes ensemble des facteurs de $v^\mu+t_{\mu-1}v^{\mu-1}\ldots$ et que par conséquent μ doit nécessairement être égal à m. On en tire le théorème suivant:

Lorsqu'une fonction de plusieurs quantités a m valeurs différentes, on peut toujours trouver une équation du degré m, dont les coefficiens sont des fonctions symétriques, et qui ont ces valeurs pour racines; mais il est impossible de trouver une équation de la même forme d'un degré moins élevé qui ait une ou plusieurs de ces valeurs pour racines.

§. IV.

Démonstration de l'impossibilité de la résolution générale de l'équation du cinquième degré.

En vertu des propositions trouvées plus haut on peut énoncer le théorème:

"Il est impossible de résoudre en général les équations du cinquième "degré."

D'après §. II toutes les fonctions algébriques desquelles une expression algébrique des racines est composée peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

Comme il est impossible en général d'exprimer la racine d'une équation par une fonction rationnelle des coefficiens, on doit avoir

$$R^{\frac{1}{m}} = v$$

où m est un nombre premier et R une fonction rationnelle des coefficiens de l'équation proposée, c'est-à-dire une fonction symétrique des racines; v est une fonction rationnelle des racines. On en conclut

$$v^m - R = 0.$$

En vertu du §. II il est impossible d'abaisser le degré de cette équation, la fonction v doit donc, d'après le dernier théorème du paragraphe précédent, avoir m valeurs différentes. Le nombre m devant être diviseur du produit $1.2.3.4.5$ ce nombre peut être égal à 2 ou à 3 ou à 5. Or suivant (§. III) il n'existe pas de fonction de cinq variables qui ait 3 valeurs: il faut donc

qu'on ait $m = 5$ ou $m = 2$. Soit $m = 5$, on aura en vertu du paragraphe précédent,

$$\sqrt[5]{R} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4$$

et par là

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}}.$$

Suivant (§. II) on en tire

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5)$$

où $\alpha^5 = 1$. Cette équation est impossible, attendu que le second membre ait 120 valeurs et que pourtant il doit être racine d'une équation du cinquième degré $z^5 - s_1^{\,5} R = 0$.

On doit donc avoir $m = 2$.

On aura donc d'après (§. II)

$$\sqrt{R} = p + qs$$

où p et q sont des fonctions symétriques et

$$s = (x_1 - x_2) \ldots (x_4 - x_5).$$

On en tire en échangeant x_1 et x_2 entre eux

$$-\sqrt{R} = p - qs$$

d'où l'on trouve $p = 0$ et $\sqrt{R} = qs$. On voit par là, que toute fonction algébrique du premier degré, qui se trouve dans l'expression de la racine, doit nécessairement avoir la forme $\alpha + \beta\sqrt{s^2} = \alpha + \beta s$, où α et β sont des fonctions symétriques. Or il est impossible d'exprimer les racines par une fonction de la forme $\alpha + \beta\sqrt{R}$, il doit donc y avoir une équation de la forme

$$\sqrt[m]{(\alpha + \beta\sqrt{s^2})} = v$$

où α et β ne sont pas nul, m est un nombre premier, α et β sont des fonctions symétriques et v une fonction rationnelle des racines. Cela donne

$$\sqrt[m]{(\alpha + \beta s)} = v_1 \quad \text{et} \quad \sqrt[m]{(\alpha - \beta s)} = v_2,$$

où v_1 et v_2 sont des fonctions rationnelles. On aura en multipliant v_1 par v_2,

$$v_1 v_2 = \sqrt[m]{(\alpha^2 - \beta^2 s^2)}.$$

Or $\alpha^2 - \beta^2 s^2$ est une fonction symétrique. Si maintenant $\sqrt[m]{(\alpha^2 - \beta^2 s^2)}$ n'est pas une fonction symétrique le nombre m, d'après ce qui précède, doit être égal à deux. Mais dans ce cas v sera $= \sqrt{(\alpha + \beta\sqrt{s^2})}$; v aura donc quatre valeurs différentes, ce qui est impossible.

Il faut donc que $\sqrt[m]{(\alpha^2 - \beta^2 s^2)}$ soit une fonction symétrique. Soit γ cette fonction, on aura

$$v_2 v_1 = \gamma \text{ et } v_2 = \frac{\gamma}{v_1}.$$

Soit

$$v_1 + v_2 = \sqrt[m]{(\alpha + \beta\sqrt{s^2})} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{(\alpha+\beta\sqrt{s^2})}} = p = \sqrt[m]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[m]{R}} = R^{\frac{1}{m}} + \frac{\gamma}{R} \cdot R^{\frac{m-1}{m}}.$$

Désignons par $p_1, p_2, p_3 \ldots p_m$ les valeurs différentes de p qui résultent de la substitution successive de $\alpha R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha^2 R^{\frac{1}{m}}$, $\alpha^3 R^{\frac{1}{m}} \ldots \alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}$ à la place de $R^{\frac{1}{m}}$ où

$$\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} \ldots + \alpha + 1 = 0,$$

et faisons le produit

$$(p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_m) = p^m - A p^{m-1} + A_1 p^{m-2} \ldots = 0,$$

on voit sans peine que A, A_1 etc. sont des fonctions rationnelles des coefficiens de l'équation proposée et par conséquent des fonctions symétriques des racines. Cette équation est évidemment irréductible. Il faut donc d'après le dernier théorème du paragraphe précédent que p, étant fonction des racines, ait m valeurs différentes. On en conclut que $m = 5$. Mais dans ce cas p sera de la forme (a.) du paragraphe précédent. Donc on aura

$$\sqrt[5]{R} + \frac{\gamma}{\sqrt[5]{R}} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 = p,$$

et par là

$$x = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + s_3 p^3 + s_4 p^4$$

c'est-à-dire en mettant $R^{\frac{1}{5}} + \frac{\gamma}{R^{\frac{4}{5}}}$ à la place de p,

$$x = t_0 + t_1 R^{\frac{1}{5}} + t_2 R^{\frac{2}{5}} + t_3 R^{\frac{3}{5}} + t_4 R^{\frac{4}{5}}$$

où t_0, t_1, t_2 etc. sont des fonctions rationnelles de R et des coefficiens de l'équation proposée. On en tire en vertu de (§. II)

$$t_1 R^{\frac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5) = p',$$

où $$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

De l'équation $p' = t_1 R^{\frac{1}{5}}$ on trouve $p'^5 = t_1{}^5 R$. Or $t_1{}^5 R$ étant de la forme $u + u'\sqrt{s^2}$ on aura $p'^5 = u + u'\sqrt{s^2}$, ce qui donne

$$(p'^5 - u)^2 = u'^2 s^2.$$

Cette équation donne p' par une équation du dixième degré dont tous les coef-

ficiens sont des fonctions symétriques, mais d'après le dernier théorème du paragraphe précédent cela est impossible; car

$$p' \text{ étant } = \tfrac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5)$$

aurait 120 valeurs différentes, ce qui est une contradiction.

Nous concluons donc:

"Il est impossible de résoudre algébriquement l'équation générale du "cinquième degré."

Il suit immédiatement de ce théorème, qu'il est de même impossible de résoudre algébriquement les équations générales des degré supérieurs au cinquième.

III.

Remarque sur le mémoire Nr. 4, du premier cahier du journal de M. Crelle

---

L'objet de ce mémoire est de trouver l'effet d'une force sur trois points donnés. Les résultats de l'auteur sont très justes, quand les trois points ne sont pas placés dans une même ligne droite; mais dans ce cas ils ne le sont pas. Les trois équations, par lesquelles les trois inconnus Q, Q', Q'' se déterminent, sont les suivantes

$$1. \quad \begin{cases} P = Q + Q' + Q'' \\ Q'b \sin\alpha = Q''c \sin\beta \\ Qa \sin\alpha = -Q''c \sin(\alpha+\beta). \end{cases}$$

Celles-ci ont lieu pour des valeurs quelconques de P, a, b, c, α et β. Elles donnent en général comme l'auteur l'a trouvé,

$$2. \quad \begin{cases} Q = -\frac{bc \sin(\alpha+\beta)}{r} . P, \\ Q' = \frac{ac \sin\beta}{r} . P, \\ Q'' = \frac{ab \sin\alpha}{r} . P, \end{cases}$$

où

$$r = ab \sin\alpha + ac \sin\beta - bc \sin(\alpha+\beta).$$

Or les équations (2) cessent d'être déterminées, lorsque l'une ou l'autre des quantités Q, Q', Q'' prend la forme $\frac{0}{0}$, ce qui a lieu, comme on voit aisément pour la valeur.

$$\alpha = \beta = 180^\circ.$$

Dans ce cas il faut recourir aux équations fondamentales (1.), qui donnent alors

$$P = Q + Q' + Q'',$$
$$Q'b \sin 180^\circ = Q''c \sin 180^\circ,$$
$$Qa \sin 180^\circ = -Q''c \sin 360^\circ.$$

Or les deux dernières équations sont identiques puisque

$$\sin 180^\circ = \sin 360^\circ = 0.$$

Donc dans le cas où

$$\alpha = \beta = 180^\circ,$$

il n'existe qu'une seule équation, savoir

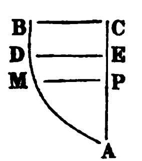
$$P = Q + Q' + Q'',$$

et par suite les valeurs de Q, Q', Q'' ne peuvent pas alors se tirer des équations établies par l'auteur.

IV.

Résolution d'un problème mécanique.

Soit $BDMA$ une courbe quelconque. La ligne BC soit horizontale et CA verticale. Supposons qu'un point mis en mouvement par l'action de la gravité se meuve sur cette courbe, un point quelconque D étant son point de départ. Soit τ le temps qui s'est écoulé quand le mobile est parvenu à un point donné A, et soit a la hauteur EA. La quantité τ sèra donc une certaine fonction de a qui dépendra de la forme de la courbe. Réciproquement la forme de la courbe dépendra de cette fonction. Nous allons examiner comment à l'aide d'une intégrale définie on peut trouver l'équation de la courbe pour laquelle τ est une fonction continue donnée de a.



Soit $AM = s$, $AP = x$, et t le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc DM.

D'après les règles de la mécanique on a $-\frac{ds}{dt} = \sqrt{(a-x)}$, donc $dt = -\frac{ds}{\sqrt{(a-x)}}$. Il suit de là, lorsqu'on prend l'intégrale depuis $x = a$ jusqu'à $x = 0$;

$$\tau = -\int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{(a-x)}} = +\int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(a-x)}},$$

$\int_\alpha^\beta$ désignant que les limites de l'intégrale sont $x = \alpha$ et $x = \beta$. Soit maintenant

$$\tau = \varphi(a)$$

la fonction donnée, et on aura

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(a-x)}},$$

équation par laquelle s doit être trouvé en x. Au lieu de cette équation nous allons considérer cette autre plus générale

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n},$$

de laquelle nous chercherons s en x.

Désignons par $\Gamma(\alpha)$ la fonction

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}$$

on a comme on sait

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} . dy = \frac{\Gamma(\alpha) . \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

où α et β doivent être supérieurs à zéro.

Soit $\beta = 1 - n$, on trouvera

$$\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1} dy}{(1-y)^n} = \frac{\Gamma(\alpha) . \Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)},$$

d'où l'on tire en faisant $z = ay$

$$\int_0^a \frac{z^{\alpha-1} dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma(\alpha) . \Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} a^{\alpha-n}.$$

En multipliant par $\frac{da}{(x-a)^{1-n}}$ et prenant l'intégrale depuis $a=0$ jusqu'à $a = x$, on trouvera:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} . \int_0^a \frac{z^{\alpha-1} dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma(\alpha) . \Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} . \int_0^x \frac{a^{\alpha-n} . da}{(x-a)^{1-n}}$$

En faisant $a = xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\alpha-n} . da}{(x-a)^{1-n}} = x^\alpha \int_0^1 \frac{y^{\alpha-n} dy}{(1-y)^{1-n}} = x^\alpha . \frac{\Gamma(\alpha-n+1) . \Gamma(n)}{\Gamma(\alpha+1)},$$

donc

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} . \int_0^a \frac{z^{\alpha-1} dz}{(a-z)^n} = \Gamma(n) . \Gamma(1-n) . \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} . x^\alpha .$$

Or d'après une propriété connue de la fonction Γ, on a

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha);$$

on aura donc en substituant:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} . \int_0^a \frac{z^{\alpha-1} . dz}{(a-z)^n} = \frac{x^\alpha}{\alpha} . \Gamma(n) . \Gamma(1-n).$$

En multipliant par $\alpha . \varphi(\alpha) . d\alpha$, et intégrant par rapport à α, on trouve:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} . \int_0^a \frac{(\int \varphi(\alpha) . \alpha z^{\alpha-1} d\alpha) dz}{(a-z)^n} = \Gamma(n) . \Gamma(1-n) \int \varphi\alpha . x^\alpha . d\alpha .$$

Soit $\int \varphi(\alpha) . x^\alpha d\alpha = f(x)$,

on tire de là en différentiant

$$\int \varphi(\alpha) . \alpha . x^{\alpha-1} d\alpha = f'(x),$$

donc $\int \varphi(\alpha) . \alpha . z^{\alpha-1} d\alpha = f'(z);$

par conséquent:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \cdot \int_0^a \frac{f'(s).ds}{(a-s)^n} = \Gamma(n).\Gamma(1-n).f(x),$$

ou, puisque

$$\Gamma(n).\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi},$$

1. $$f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \cdot \int_0^a \frac{f'(s)ds}{(a-s)^n}.$$

A l'aide de cette équation il sera facile de tirer la valeur de s de l'équation

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-s)^n}.$$

Qu'on multiplie cette équation par $\frac{\sin n\pi}{\pi} \cdot \frac{da}{(x-a)^{1-n}}$, et qu'on prenne l'intégrale depuis $a=0$ jusqu'à $a=x$, on aura

$$\frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi a . da}{(x-a)^{1-n}} = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \cdot \int_0^a \frac{ds}{(a-s)^n},$$

donc en vertu de l'équation (1)

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi(a).da}{(x-a)^{1-n}}.$$

Soit maintenant $n=\frac{1}{2}$, on obtiendra

$$\varphi(a) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{(a-s)}}$$

et

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\varphi(a).da}{\sqrt{(x-a)}}.$$

Cette équation donne l'arc s par l'abscisse x, et par suite la courbe est entièrement déterminée.

Nous allons appliquer l'expression trouvée à quelques exemples.

I. Soit

$$\varphi(a) = \alpha_0 a^{\mu_0} + \alpha_1 a^{\mu_1} + \ldots + \alpha_m a^{\mu_m} = \Sigma(\alpha a^{\mu}),$$

et la valeur de s sera

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{da}{\sqrt{(x-a)}} \cdot \Sigma(\alpha a^{\mu}) = \frac{1}{\pi} \Sigma\left(\alpha \int_0^x \frac{a^{\mu}da}{\sqrt{(x-a)}}\right).$$

Si l'on fait $a = xy$, on aura

$$\int_0^x \frac{a^{\mu}da}{\sqrt{(x-a)}} = x^{\mu+\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{y^{\mu}dy}{\sqrt{(1-y)}} = x^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\mu+1).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})}$$

donc

$$s = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi} \Sigma \frac{\alpha \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\frac{3}{2})} x^{\mu+\frac{1}{2}},$$

ou puisque $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$s = \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)}\left[\alpha_0 \frac{\Gamma(\mu_0+1)}{\Gamma(\mu_0+\frac{3}{2})} x^{\mu_0} + \alpha_1 \frac{\Gamma(\mu_1+1)}{\Gamma(\mu_1+\frac{3}{2})} x^{\mu_1} + \dots + \alpha_m \frac{\Gamma(\mu_m+1)}{\Gamma(\mu_m+\frac{3}{2})}\right].$$

Si l'on suppose p. ex. que $m=0$, $\mu_0=0$, c'est-à-dire que la courbe cherchée soit isochrone, on trouve

$$s = \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)} \cdot \alpha_0 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\alpha_0}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} \sqrt{\left(\frac{x}{\pi}\right)} = \frac{2\alpha_0}{\pi} \sqrt{x},$$

or $s = \frac{2\alpha_0}{\pi} \sqrt{x}$ est l'équation connue de la cycloide.

II. Soit

φa depuis $a=0$ jusqu'à $a=a_0$, égal à $\varphi_0 a$
φa depuis $a=a_0$ jusqu'à $a=a_1$, égal à $\varphi_1 a$
φa depuis $a=a_1$ jusqu'à $a=a_2$, égal à $\varphi_2 a$
. . . .
φa depuis $a=a_{m-1}$ jusqu'à $a=a_m$, égal à $\varphi_m a$,

on aura

$$\pi s = \int_0^x \frac{\varphi_0 a \,.\, da}{\sqrt{(a-x)}}, \text{ depuis } x=0, \text{ jusqu'à } x=a_0,$$

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a \,.\, da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_0}^x \frac{\varphi_1 a \,.\, da}{\sqrt{(a-x)}}, \text{ depuis } x=a_0, \text{ jusqu'à } x=a_1$$

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a \,.\, da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a \,.\, da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_1}^x \frac{\varphi_2 a \,.\, da}{\sqrt{(a-x)}}, \text{ depuis } x=a_1, \text{ jusqu'à } x=a_2,$$

. . . .

$$\pi s = \int_0^{a_0} \frac{\varphi_0 a \,.\, da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1 a \,.\, da}{\sqrt{(a-x)}} + \dots + \int_{a_{m-2}}^{a_{m-1}} \frac{\varphi_{m-1} a \,.\, da}{\sqrt{(a-x)}} + \int_{a_{m-1}}^x \frac{\varphi_m a \,.\, da}{\sqrt{(a-x)}},$$

depuis $x=a_{m-1}$, jusqu'à $x=a_m$,

où il faut remarquer que les fonctions $\varphi_0 a$, $\varphi_1 a$, $\varphi_2 a \dots \varphi_m a$ doivent être telles que

$$\varphi_0(a_0) = \varphi_1(a_0), \; \varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_1), \; \varphi_2(a_2) = \varphi_3(a_2), \text{ etc.}$$

car la fonction φa doit nécessairement être continue.

V.

Démonstration d'une expression de laquelle la formule binome est un cas particulier.

Cette expression est la suivante:

$$(x+\alpha)^n = x^n + \frac{n}{1}\alpha(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-2}$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu}$$
$$\ldots + \frac{n}{1}\alpha\big(\alpha-(n-1)\beta\big)^{n-2}\big(x+(n-1)\beta\big) + \alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}.$$

x, α et β sont des quantités quelconques, n est un nombre entier positif.

Lorsque $n=0$, l'expression donne

$$(x+\alpha)^0 = x^0,$$

comme il faut. Or on peut, comme il suit, démontrer que si l'expression subsiste pour $n=m$, elle doit aussi subsister pour $n=m+1$, c'est-à-dire elle est vraie en général.

Soit $(x+\alpha)^m = x^m + \frac{m}{1}\alpha(x+\beta)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2}\ldots\ldots$

$$\ldots + \frac{m}{1}\alpha\big(\alpha-(m-1)\beta\big)^{m-2}\big(x+(m-1)\beta\big) + \alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}$$

En multipliant par $(m+1)dx$ et intégrant, on trouvera:

$$(x+\alpha)^{m+1} = x^{m+1} + \frac{m+1}{1}\alpha(x+\beta)^m + \frac{(m+1)m}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-1}$$
$$\ldots + \frac{m+1}{1}\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}(x+m\beta) + C;$$

C étant la constante arbitraire. Pour trouver sa valeur soit

$$x = -(m+1)\beta,$$

et les deux dernières équations donneront:

$$\big(\alpha-(m+1)\beta\big)^m = (-1)^m\Big[(m+1)^m\beta^m - m^m\alpha\beta^{m-1} + \frac{m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-2}$$
$$- \frac{m(m-1)}{2.3}\alpha(\alpha-3\beta)^2(m-2)^{m-3}\beta^{m-3}\ \ldots\Big]$$

$$(\alpha-(m+1)\beta)^{m+1}=(-1)^{m+1}\Big[(m+1)^{m+1}\beta^{m+1}-(m+1)\,m^{m}\alpha\beta^{m}$$
$$+\frac{(m+1)m}{2}(m-1)^{m-1}\alpha(\alpha-2\beta)\beta^{m-1}\ldots\Big]+C.$$

Multipliant la première de ces équations par $(m+1)\beta$ et ajoutant le produit à la seconde, on trouve:

$$C=(\alpha-(m+1)\beta)^{m+1}+(m+1)\beta\,(\alpha-(m+1)\beta)^{m},$$

ou bien $$C=\alpha(\alpha-(m+1)\beta)^{m}.$$

Il suit de là que l'équation proposée subsiste de même pour $n=m+1$. Or elle a lieu pour $n=0$; donc elle aura lieu pour $n=0$, 1, 2, 3 etc. c'est-à-dire pour toute valeur entière et positive de n.

Si l'on fait $\beta=0$, on obtient la formule binome.

Si l'on fait $\alpha=-x$, on trouve

$$0=x^{n}-\frac{n}{1}x(x+\beta)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x(x+2\beta)^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x(x+3\beta)^{n-1}\ldots$$

ou en divisant par x

$$0=x^{n-1}-\frac{n}{1}(x+\beta)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}(x+2\beta)^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(x+3\beta)^{n-1}\ldots$$

ce qui est d'ailleurs connu; car le second membre de cette équation n'est autre chose que

$$(-1)^{n-1}\Delta^{n}(x^{n-1})$$

en faisant la différence constante égale à β.

VI.

Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, R et ϱ étant des fonctions entières.

1.

Si l'on différentie par rapport à x l'expression

$$1) \qquad z = \log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$$

où p, q et R sont des fonctions entières d'une quantité variable x, on obtiendra

$$dz = \frac{dp + d(q\sqrt{R})}{p+q\sqrt{R}} - \frac{dp - d(q\sqrt{R})}{p-q\sqrt{R}}$$

où
$$dz = \frac{(p-q\sqrt{R})\,(dp+d(q\sqrt{R})) - (p+q\sqrt{R})\,(dp-d(q\sqrt{R}))}{p^2 - q^2R}$$

c'est-à-dire

$$dz = \frac{2p\,.\,d(q\sqrt{R}) - 2dp\,q\sqrt{R}}{p^2 - q^2R}.$$

Or
$$d(q\sqrt{R}) = dq\,.\,\sqrt{R} + \tfrac{1}{2}q\,.\,\frac{dR}{\sqrt{R}}$$

donc par substitution

$$dz = \frac{pq\,.\,dR + 2(pdq - qdp)\,.\,R}{(p^2 - q^2R)\,.\,\sqrt{R}}$$

par conséquent en faisant

$$2) \qquad \begin{cases} pq\,.\,\frac{dR}{dx} + 2\left(p\,.\,\frac{dq}{dx} - q\,.\,\frac{dp}{dx}\right).\,R = M \\ et\ p^2 - q^2.R = N \end{cases}$$

on aura 3)
$$dz = \frac{M\,dx}{N\sqrt{R}};$$

où, comme on voit aisément, M et N sont des fonctions entières de x.

Or z étant $= \log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$, on aura en intégrant.

$$4) \qquad \int \frac{M\,dx}{N\sqrt{R}} = \log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right).$$

Il suit de là que dans la différentielle $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$ on peut trouver une infinité de formes différentes pour la fonction rationnelle ρ qui rendent cette différentielle intégrable par des logarithmes, et même par une expression de la forme $\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$. La fonction ρ contient, comme on voit par les équations (2) outre R encore deux fonctions indéterminées p et q et c'est par ces fonctions qu'elle sera déterminée.

On peut renverser la question et demander, s'il est possible de supposer les fonctions p et q telles, que ρ ou $\frac{M}{N}$ prenne une forme déterminée donnée. La solution de ce problème conduit à une foule de résultats intérressants, que l'on doit considérer comme autant de propriétés des fonctions de la forme $\int\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$. Dans ce mémoire je me bornerai au cas où $\frac{M}{N}$ est une fonction entière de x, en essayant de résoudre ce problème général:

"Trouver toutes les différentielles de la forme $\frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$ où ρ et R sont des "fonctions entières de x, dont les intégrales puissent s'exprimer par une "fonction de la forme $\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$.

2.

En différentiant l'équation

$$N=p^2-q^2R,$$

on obtient

$$dN=2pdp-2qdqR-q^2dR,$$

donc en multipliant par p

$$pdN=2p^2dp-2pqdq\,.\,R-pq^2\,.\,dR,$$

c'est-à-dire, lorsqu'on remet à la place de p^2 sa valeur $N+q^2R$,

$$pdN=2Ndp+2q^2dp\,.\,R-2\,pqdq\,.\,R-pq^2\,.\,dR,$$

ou

$$pdN=2Ndp-q\left(2(pdq-qdp)R+pqdR\right),$$

donc, puisque

$$2\,(pdq-qdp)R+pqdR=Mdx\ (2),$$

$$pdN=2Ndp-qMdx$$

ou bien

$$qM=2N\,.\,\frac{dp}{dx}-p\,.\,\frac{dN}{dx}$$

donc

$$5)\qquad \frac{M}{N} = \left(2\frac{dp}{dx} - p \cdot \frac{dN}{Ndx}\right) : q .$$

Maintenant $\frac{M}{N}$ doit être une fonction entière de x; donc en désignant cette fonction par ϱ on aura

$$q\varrho = 2\frac{dp}{dx} - p \cdot \frac{dN}{Ndx}.$$

Il suit de là que $p \cdot \frac{dN}{Ndx}$ doit être une fonction entière de x. En faisant

$$N = (x+a)^m (x+a_1)^{m_1} \dots (x+a_n)^{m_n}$$

on aura

$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{m}{x+a} + \frac{m_1}{x+a_1} \dots + \frac{m_n}{x+a_n}$$

donc

$$p\left(\frac{m}{x+a} + \frac{m_1}{x+a_1} \dots + \frac{m_n}{x+a_n}\right)$$

doit de même être une fonction entière, ce qui ne peut pas avoir lieu à moins que le produit $(x+a)\dots(x+a_n)$ ne soit facteur de p. Il faut donc que

$$p = (x+a)\dots(x+a_n) \cdot p_1$$

où p_1 est une fonction entière.

Or $$N = p^2 - q^2 R,$$

donc

$$(x+a)^m \dots (x+a_n)^{m_n} = p_1^2 (x+a)^2 (x+a_1)^2 \dots (x+a_n)^2 - q^2 R .$$

Comme R n'a pas de facteur de la forme $(x+a)^2$ et comme on peut toujours supposer que p et q n'ont pas de facteur commun, il est clair que

$$m = m_1 = \dots = m_n = 1$$

et $$R = (x+a)(x+a_1)\dots(x+a_n) \cdot R_1$$

où R_1 est une fonction entière.

On a donc $N = (x+a)(x+a_1)\dots(x+a_n)$ et $R = N \cdot R_1$, c'est-à-dire N doit être facteur de R. On a de même $p = Np_1$. En substituant ces valeurs de R et de p dans les équations (2.) on trouvera les deux équations suivantes

$$6)\qquad \left\{\begin{array}{l} p_1^2 N - q^2 R_1 = 1 \\ \frac{M}{N} = p_1 q \frac{dR}{dx} + 2\left(p\frac{dq}{dx} - q\frac{dp}{dx}\right) R_1 = \varrho \end{array}\right\}$$

La première de ces équations détermine la forme des fonctions p_1, q, N, et R_1,

et celles-ci étant déterminées, la seconde équation donnera ensuite la fonction ϱ. On peut aussi trouver cette dernière fonction par l'équation (5).

3.

Maintenant tout dépend de l'équation

$$7) \qquad p_1^2 . N - q^2 . R_1 = 1$$

Cette équation peut bien être résolue par la méthode ordinaire des coefficiens indéterminés, mais l'application de cette méthode serait ici extrêmement prolixe et ne conduirait guère à un résultat général. Je vais donc prendre une autre route semblable à celle qu'on emploie pour la résolution des équations indéterminées du second degré à deux inconnus. La seule différence est, qu'au lieu de nombres entiers, on aura à traiter des fonctions entières. Comme dans la suite nous aurons souvent besoin de parler du degré d'une fonction, je me servirai de la lettre δ pour désigner ce degré, en sorte que δP signifiera le degré de la fonction P. p. ex.

$$\delta(x^m + ax^{m-1} + \ldots) = m,$$

$$\delta\left(\frac{x^5+cx}{x^3+e}\right) = 2,$$

$$\delta\left(\frac{x+e}{x^2+k}\right) = -1, \text{ etc.}$$

D'ailleurs il est clair que les équations suivantes auront lieu:

$$\delta\,(PQ) = \delta P + \delta Q,$$

$$\delta\left(\frac{P}{Q}\right) = \delta P - \delta Q,$$

$$\delta\,(P^m) = m\delta P;$$

de plus $\qquad \delta\,(P + P^1) = \delta P$

si δP^1 est moindre que δP.

De même je désignerai, pour abréger, la partie entière d'une fonction rationnelle u par Eu,

ensorte que $\quad u = Eu + u^1$,

où δu^1 est négatif.

Il est clair que

$$E(s + s^1) = E(s) + E(s^1)$$

donc $\qquad E(s + s^1) = E(s)$ lorsque δs^1 est négatif.

Relativement à ce signe, on aura le théorème suivant:

"Lorsque les trois fonctions rationnelles u, v et z ont la propriéte que

$$u^2 = v^2 + z$$

"on aura $\qquad E(u) = \pm E(v)$ si $\delta z < \delta v$.

En effet on a par la définition,

$$u = E(u) + u'$$
$$v = E(v) + v'$$

où $\delta u'$ et $\delta v'$ sont négatifs; donc en substituant ces valeurs dans l'équation $u^2 = v^2 + z$,

$$(Eu)^2 + 2u'\, Eu + u'^2 = (Ev)^2 + 2v'\, Ev + v'^2 + z.$$

Il suit de là

$$(Eu)^2 - (Ev)^2 = z + v'^2 - u'^2 + 2v' Ev - 2u' Eu = t,$$

ou bien $\qquad (Eu + Ev)\,(Eu - Ev) = t.$

On voit aisément que $\delta t < \delta v$; au contraire $\delta(Eu + Ev)\,(Eu - Ev)$ est au moins égal à δv, si $(Eu + Ev)\,(Eu - Ev)$ n'est égal à zéro. Il faut donc nécessairement que $(Eu + Ev)\,(Eu - Ev)$ soit $= 0$, ce qui donne $\qquad Eu = \pm Ev \quad$ c. q. f. d.

Il est clair que l'équation (7) ne saurait subsister à moins qu'on n'ait $\delta(Np_1^2) = \delta(R_1 q^2)$, c'est-à-dire,

$$\delta N + 2\delta p_1 = \delta R_1 + 2\delta q$$

d'où $\qquad \delta(NR_1) = 2(\delta q - \delta p_1 + \delta R_1).$

Le plus grand exposant de la fonction R doit donc être un nombre pair. Soit $\delta N = n - m$, $\delta R_1 = n + m$.

4.

Cela posé, au lieu de l'équation,

$$p_1^2 . N - q^2 . R_1 = 1, \text{ je vais proposer}$$

la suivante

$$8) \qquad p_1^2 N - q^2 R_1 = v,$$

où v est une fonction entière dont le degré est moindre que $\frac{\delta N + \delta R_1}{2}$.

Cette équation, comme on voit, est plus générale; elle peut être résolue par le même procédé.

Soit t la partie entière de la fonction fractionnaire $\frac{R_1}{N}$ et soit t' le reste; cela posé on aura:

9) $$R_1 = Nt + t',$$

et il est clair que t doit être du $2m^{me}$ degré lorsque $\delta N = n - m$ et $\delta R_1 = n + m$. En substituant cette expression de R_1 dans l'équation (8), on en tirera

10) $$(p_1^2 - q^2 . t)\, N - q^2 . t' = v.$$

Soit maintenant

11) $$t = t_1^2 + t_1',$$

on peut toujours déterminer t_1' de manière que le degré de t_1' soit moindre que m.

Pour cet effet faisons

$$t = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \ldots\ldots\ldots \alpha_{2m} x^{2m}$$
$$t_1 = \beta_0 + \beta_1 x \ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_m x^m$$
$$t_1' = \gamma_0 + \gamma_1 x \ldots\ldots\ldots\ldots + \gamma_{m-1} x^{m-1}$$

cela posé, l'équation (11) donnera:

$$\alpha_{2m} x^{2m} + \alpha_{2m-1} x^{2m-1} + \alpha_{2m-2} x^{2m-2} \ldots + \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 =$$
$$\beta_m^2 x^{2m} + 2\beta_m \beta_{m-1} x^{2m-1} + (\beta_{m-1}^2 + 2\beta_m \beta_{m-2}) x^{2m-2} + (2\beta_m \beta_{m-3} + 2\beta_{m-1}\beta_{m-2}) x^{2m-3} + \text{etc.}$$
$$+ \gamma_{m-1} x^{m-1} + \gamma_{m-2} x^{m-2} \ldots \gamma_1 x + \gamma_0.$$

De cette équation on déduira en comparant les coefficiens entre eux:

$$\alpha_{2m} = \beta_m^2$$
$$\alpha_{2m-1} = 2\beta_m . \beta_{m-1}$$
$$\alpha_{2m-2} = 2\beta_m . \beta_{m-2} + \beta_{m-1}^2$$
$$\alpha_{2m-3} = 2\beta_m . \beta_{m-3} + 2\beta_{m-1} . \beta_{m-2}$$
$$\alpha_{2m-4} = 2\beta_m . \beta_{m-4} + 2\beta_{m-1} . \beta_{m-3} + \beta_{m-2}^2$$
etc.
$$\alpha_m = 2\beta_m . \beta_0 + 2\beta_{m-1} . \beta_1 + 2\beta_{m-2} . \beta_2 + \ldots$$
$$\gamma_{m-1} = \alpha_{m-1} - 2\beta_{m-1} . \beta_0 - 2\beta_{m-2} . \beta_1 - \ldots$$
$$\gamma_{m-2} = \alpha_{m-2} - 2\beta_{m-2} . \beta_0 - 2\beta_{m-3} . \beta_1 - \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\gamma_2 = \alpha_2 - 2\beta_2 . \beta_0 - \beta_1^2$$
$$\gamma_1 = \alpha_1 - 2\beta_1 . \beta_0$$
$$\gamma_0 = \alpha_0 - \beta_0^2.$$

Les $m + 1$ premières de ces équations donnent, comme il est aisé de voir dans tous les cas, les valeurs des $m + 1$ quantités $\beta_m, \beta_{m-1}, \ldots \beta_0$, et les m dernières équations donnent les valeurs de $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_{m-1}$

L'équation supposée (11) est donc toujours possible.

Substituant dans l'équation (10) au lieu de t sa valeur de l'equation (11), on aura:

$$12)\qquad (p_1^2 - q^2 . t_1^2)N - q^2(N . t_1' + t') = v;$$

de là on tire $\left(\frac{p_1}{q}\right)^2 = t_1^2 + t_1' + \frac{t'}{N} + \frac{v}{q^2N}$.

En remarquant que

$$\delta\left(t_1' + \frac{t_1}{N} + \frac{v}{q^2N}\right) < \delta t_1$$

on aura par ce qui précède,

$$E\left(\frac{p_1}{q}\right) = \pm Et_1 = \pm t_1,$$

donc $\qquad p_1 = \pm t_1 . q + \beta$, où $\delta\beta < \delta q$;

et comme on peut prendre t_1 avec le signe qu'on voudra,

$$p_1 = t_1 . q + \beta.$$

En substituant cette expression au lieu de p_1 dans l'équation (12), elle se changera en,

$$13)\qquad (\beta^2 + 2\beta t_1 q)N - q^2 . s = v,$$

où, pour abréger, on a fait $Nt_1' + t' = s$.

De cette équation il est facile de tirer

$$\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1N}{s}\right)^2 = \frac{N(t_1^2N + s)}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}$$

ou, puisque $t_1^2N + s = R_1$ (car $R_1 = tN + t'$, $s = Nt'_1 + t'$, et $t = t_1^2 + t'_1$),

$$\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1N}{s}\right)^2 = \frac{R_1N}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}.$$

Soit maintenant

$$R_1N = r^2 + r',$$
$$\text{où } \delta r' < \delta r$$

on aura:

$$\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1N}{s}\right)^2 = \left(\frac{r}{s}\right)^2 + \frac{r'}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}.$$

Or on voit aisément que

$$\delta\left(\frac{r'}{s^2} - \frac{v}{s\beta^2}\right) < \delta\left(\frac{r}{s}\right)$$

donc $\qquad E\left(\frac{q}{\beta} - \frac{t_1N}{s}\right) = E\left(\frac{r}{s}\right)$

et par suite $\qquad E\left(\frac{q}{\beta}\right) = E\left(\frac{r + t_1N}{s}\right);$

donc en faisant $$E\left(\frac{r+t_1N}{s}\right)=2\mu,$$
on aura
$$q=2\mu\beta+\beta_1,\ \text{où}\ \delta\beta_1<\delta\beta.$$

En substituant cette expression de q dans l'équation (13) on aura,
$$\beta^2.N+2\beta t_1N(2\mu\beta+\beta_1)-s(4\mu^2\beta^2+4\mu\beta_1\beta+\beta_1^2)=v,$$
c'est-a-dire
$$\beta^2(N+4\mu t_1N-4s\mu^2)+2(t_1N-2\mu s)\beta\beta_1-s\beta_1^2=v,$$
ou en faisant pour abréger

14) $$\begin{Bmatrix} s_1=N+4\mu t_1N-4s\mu^2 \\ t_1N-2\mu s=-r_1 \end{Bmatrix}$$

on obtient

15) $$s_1.\beta^2-2r_1.\beta\beta_1-s\beta_1^2=v.$$

Puisque $$E\left(\frac{r+t_1N}{s}\right)=2\mu,\ \text{on a}$$
$$r+t_1N=2s\mu+\varepsilon,\ \text{où}\ \delta\varepsilon<\delta s,$$
par suite la dernière des équations (14) donnera
$$r_1=r-\varepsilon.$$

De plus en multipliant l'expression de s_1 par s, on obtiendra,
$$ss_1=Ns+4\mu t_1Ns-4s^2\mu^2=Ns+t_1^2N^2-(2s\mu-t_1N)^2.$$
Or $2s\mu-t_1N=r_1$, donc $ss_1=Ns+t_1^2N^2-r_1^2$, et $r_1^2+ss_1=N(s+t_1^2N)$;
de même $$s+t_1^2N=R_1,$$
donc 16) $$r_1^2+ss_1=NR_1=R$$
D'après ce qui précède on a $R=r^2+r'$
donc $r^2-r_1^2=ss_1-r'$, ou $(r+r_1)(r-r_1)=ss_1-r'$.
Or $\delta r'$ étant $<\delta r$, il suit de cette équation que
$$\delta(ss_1)=\delta(r+r_1)(r-r_1)$$
c'est-a-dire, puisque $r-r_1=\varepsilon$, où $\delta\varepsilon<\delta r$,
$$\delta s+\delta s_1=\delta r+\delta\varepsilon.$$
Or $$\delta s>\delta\varepsilon$$
donc $$\delta s_1<\delta r.$$
On a de plus,
$$s=Nt_1'+t',\ \text{où}\ \delta t'<\delta N\ \text{et}\ \delta t_1'<\delta t_1,$$
donc $$\delta s<\delta N+\delta t_1.$$

Mais $$R = N(s + t_1^2 N),$$ par conséquent,
$$\delta R = 2\delta t_1 + 2\delta N,$$
et puisque $$\delta R = 2\delta r = 2\delta r_1,$$
on aura $$\delta t_1 + \delta N = \delta r_1.$$
On en conclut $\delta s < \delta r_1$.
L'équation $p_1^2 N - q^2 R_1 = v$ est donc par ce procédé changée en celle-ci,
$$s_1 \beta^2 - 2r_1 \beta\beta_1 - s\beta_1^2 = v,$$
où $\delta r_1 = \frac{1}{2}\delta R = n$, $\delta\beta_1 < \delta\beta$ et $\delta s < n$, $\delta s_1 < n$.
On obtient cette équation, comme on vient de voir, en faisant

17) $$\begin{aligned} p_1 &= t_1 . q + \beta, \\ q &= 2\mu\beta + \beta_1, \end{aligned}$$

t_1 étant déterminé par l'équation,
$$t = t_1^2 + t_1', \text{ où } \delta t_1' < \delta t_1 \text{ et } t = E\left(\frac{R_1}{N}\right),$$
et μ étant déterminé par l'équation,
$$2\mu = E\left(\frac{r + t_1 N}{s}\right),$$
$$\text{où } r^2 + r' = R_1 N, \; s = N t_1' + R_1 - Nt$$
De plus

18) $$\begin{cases} r_1 = 2\mu s - t_1 N, \\ s_1 = N + 4\mu t_1 N - 4s\mu^2, \\ r_1^2 + ss_1 = R_1 N = R. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de l'équation (15).

5.

Résolution de l'équation:
$$s_1 \;\beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\,.\,\beta_1^2 = v,$$
où $$\delta s < \delta r_1, \; \delta s_1 < \delta r_1, \; \delta v < \delta r_1, \; \delta\beta_1 < \delta\beta.$$
Divisant l'équation,

19) $$s_1\beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s\beta_1^2 = v,$$

par $s_1\beta_1^2$, on obtiendra,
$$\frac{\beta^2}{\beta_1^2} - 2\frac{r_1}{s_1}\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{s}{s_1} = \frac{v}{s_1\beta_1^2},$$
donc $$\left(\frac{\beta}{\beta_1} - \frac{r_1}{s_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{s_1}\right)^2 + \frac{s}{s_1} + \frac{v}{s_1\beta_1^2}.$$
On tire de là en remarquant que $\delta\left(\frac{s}{s_1} + \frac{v}{s_1\beta_1^2}\right) < \delta\left(\frac{r_1}{s_1}\right)$,

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}-\frac{r_1}{s_1}\right)=\pm E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

donc
$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right)=E\left(\frac{r_1}{s_1}\right).(1\pm 1),$$

où l'on doit prendre le signe $+$, car l'autre signe ferait $E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right)=0$, donc

$$E\left(\frac{\beta}{\beta_1}\right)=2E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

donc en faisant
$$E\left(\frac{r_1}{s_1}\right)=\mu_1,$$

$$\beta=2\beta_1.\mu_1+\beta_2, \text{ où } \delta\beta_2<\delta\beta_1$$

Substituant cette valeur de β dans l'équation proposée, on aura,

$$s_1(\beta_2^2+4\beta_1\beta_2\mu_1+4\mu_1^2.\beta_1^2)-2r_1\beta_1(\beta_2+2\mu_1\beta_1)-s\beta_1^2=v,$$

ou bien

20)
$$s_2.\beta_1^2-2r_2.\beta_1.\beta_2-s_1.\beta_2^2=-v,$$

où
$$r_2=2\mu_1s_1-r_1,\quad s_2=s+4r_1\mu_1-4s_1\mu_1^2.$$

L'équation $E\left(\frac{r_1}{s_1}\right)=\mu_1$ donne,

$$r_1=\mu_1s_1+\varepsilon_1,\text{ où } \delta\varepsilon_1<\delta s_1.$$

On obtient par là,

$$r_2=r_1-2\varepsilon_1,$$
$$s_2=s+4\varepsilon_1\mu_1,$$

donc il est facile de voir que

$$\delta r_2=\delta r_1,\quad \delta s_2<\delta r_2.$$

L'équation (19) a par conséquent la même forme que l'équation (20); on peut donc appliquer à celle-ci la même opération, c'est-a-dire en faisant

$$\mu_2=E\left(\frac{r_2}{s_2}\right),\ r_2=s_2\mu_2+\varepsilon_2,\ \beta_1=2\mu_2\beta_2+\beta_3,$$

on aura
$$s_3.\beta_2^2-2r_3\beta_2\beta_3-s_2.\beta_3^2=+v,$$

où
$$r_3=2\mu_2s_2-r_2=r_2-2\varepsilon_2,$$

$$s_3=s_1+4r_2\mu_2-4s_2\mu_2^2=s_1+4\varepsilon_2\mu_2,\text{ et } \delta\beta_3<\delta\beta_2.$$

En continuant ce procédé, on obtiendra, après $n-2$ transformations, cette équation:

21)
$$s_n.\beta^2_{n-1}-2r_n.\beta_{n-1}.\beta_n-s_{n-1}.\beta_n^2=(-1)^{n-1}.v,$$
$$\text{où } \delta\beta_n<\delta\beta_{n-1}.$$

Les quantités s_n, r_n, β_n sont déterminées par les équations suivantes:

$$\beta_{n-1}=2\mu_n.\beta_n+\beta_{n+1},$$

$$\mu_n = E\left(\frac{r_n}{s_n}\right),$$

$$r_n = 2\mu_{n-1} \,.\, s_{n-1} - r_{n-1},$$

$$s_n = s_{n-2} + 4r_{n-1} \,.\, \mu_{n-1} - 4s_{n-1} \,.\, \mu^2_{n-1}.$$

A ces équations on peut ajouter celles-ci:

$$r_n = \mu_n s_n + \varepsilon_n,$$

$$r_n = r_{n-1} - 2\varepsilon_{n-1},$$

$$s_n = s_{n-2} + 4\varepsilon_{n-1} \,.\, \mu_{n-1}.$$

Or les nombres $\delta\beta$, $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2, \ldots \delta\beta_n$, etc. formant une série décroissante, on doit nécessairement après un certain nombre de transformations trouver un β_n égal à zéro. Soit donc

$$\beta_m = 0.$$

l'équation (21) donnera en posant $n = m$:

22) $$s_m \,.\, \beta^2_{m-1} = (-1)^{m-1} v.$$

Voilà l'équation générale de condition pour la résolubilité de l'équation (19). s_m dépend des fonctions s, s_1, r_1; et β_{m-1} doit être pris de manière à satisfaire à la condition,

$$\delta s_m + 2\delta\beta_{m-1} < \delta r.$$

L'équation (22) fait voir que pour tous les s, s_1, et r_1 on peut trouver une infinité de valeurs de v, qui satisfont à l'équation (19).

En substituant dans l'équation proposée au lieu de v sa valeur $(-1)^{m-1} \,.\, s_m \,.\, \beta^2_{m-1}$, on obtiendra,

$$s_1 \,.\, \beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s \,.\, \beta_1^2 = (-1)^{m-1} \,.\, s_m \,.\, \beta^2_{m-1},$$

équation toujours résoluble.

On voit aisément que β et β_1 ont le facteur commun β_{m-1}. Donc si l'on suppose que β et β_1 n'ont pas de facteur commun, β_{m-1} sera indépendant de x. On peut donc faire $\beta_{m-1} = 1$, d'où résulte cette équation,

$$s_1 \,.\, \beta^2 - 2r_1\beta\beta_1 - s \,.\, \beta_1^2 = (-1)^{m-1} s_m.$$

Les fonctions β, β_1, $\beta_2, \ldots$ sont déterminées par l'équation,

$$\beta_{n-1} = 2\mu_n\beta_n + \beta_{n+1},$$

en posant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots m-1$ et en remarquant que $\beta_m = 0$. C'est-à-dire:

$$\beta_{m-2} = 2\mu_{m-1} \,.\, \beta_{m-1},$$

$$\beta_{m-3} = 2\mu_{m-2} \,.\, \beta_{m-2} + \beta_{m-1},$$

$$\beta_{m-4} = 2\mu_{m-3} \cdot \beta_{m-3} + \beta_{m-2},$$

. . . .

$$\beta_3 = 2\mu_4 \cdot \beta_4 + \beta_5,$$
$$\beta_2 = 2\mu_3 \cdot \beta_3 + \beta_4,$$
$$\beta_1 = 2\mu_2 \cdot \beta_2 + \beta_3,$$
$$\beta = 2\mu_1 \cdot \beta_1 + \beta_2,$$

Ces équations donnent:

$$\frac{\beta}{\beta_1} = 2\mu_1 + \frac{1}{\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)},$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = 2\mu_2 + \frac{1}{\left(\frac{\beta_2}{\beta_3}\right)},$$

. . . .

$$\frac{\beta_{m-3}}{\beta_{m-2}} = 2\mu_{m-2} + \frac{1}{\left(\frac{\beta_{m-2}}{\beta_{m-1}}\right)},$$

$$\frac{\beta_{m-2}}{\beta_{m-1}} = 2\mu_{m-1}.$$

On en tire par des substitutions successives:

$$\frac{\beta}{\beta_1} = 2\mu_1 + \frac{1}{2\mu_2 + \frac{1}{2\mu_3 + \cdots + \frac{1}{2\mu_{m-2} + \frac{1}{2\mu_{m-1}}}}}$$

On aura donc les valeurs de β et de β_1 en transformant cette fraction continue en fraction ordinaire.

6.

En substituant dans l'équation,

$$p_1^2 \cdot N - q^2 \cdot R_1 = v,$$

pour v sa valeur $(-1)^{m-1} \cdot s_m$, on aura,

$$p_1^2 \cdot N - q^2 \cdot R_1 = (-1)^{m-1} \cdot s_m,$$

où
$$q = 2\mu \cdot \beta + \beta_1,$$
$$p_1 = t_1 q + \beta,$$

donc
$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \frac{\beta}{q} = t_1 + \frac{1}{\left(\frac{q}{\beta}\right)},$$

or
$$\frac{q}{\beta} = 2\mu + \frac{\beta_1}{\beta};$$

par conséquent,

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 \; \ldots \; + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}.$$

L'équation $$p_1^2 N - q^2 . R_1 = v,$$

donne $$\left(\frac{p_1}{q}\right)^2 = \frac{R_1}{N} + \frac{v}{q^2 . N},$$

$$\frac{p_1}{q} = \sqrt{\left(\frac{R_1}{N} + \frac{v}{q^2 . N}\right)};$$

donc en supposant m infini:

$$\frac{p_1}{q} = \sqrt{\frac{R_1}{N}};$$

donc $$\sqrt{\frac{R_1}{N}} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 + \text{etc.}}}}}$$

On trouve donc les valeurs de p_1 et de q par la transformation de la fonction $\sqrt{\frac{R_1}{N}}$ en fraction continue. *)

7.

Soit maintenant $v = a$, et l'on aura,

$$s_m = (-1)^{m-1} a.$$

Donc si l'équation,

$$p_1^2 N - q^2 . R_1 = a,$$

est résoluble, il faut qu'au moins une des quantités,

$$s, \; s_1, \; s_2, \ldots s_m \text{ etc.}$$

soit indépendante de x.

De l'autre part, lorsqu'une de ces quantités est indépendante de x, il est toujours possible de trouver deux fonctions entières p_1 et q qui satisfont à cette équation. En effet lorsque $s_m = a$, on aura les valeurs de p_1 et de q en changeant la fraction continue,

---

*) L'équation ci-dessus n'exprime pas une égalité absolue. Elle indique seulement d'une manière abrégée comment on peut trouver les quantités t_1, μ, μ_1, μ_2 . . . Si toutefois la fraction continue a une valeur, celle-ci sera toujours égale à $\sqrt{\frac{R_1}{N}}$.

$$\frac{p_1}{q} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cdots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}}$$

en fraction ordinaire. Les fonctions s, s_1, s_2 etc. sont en général, comme il est aisé de voir, du degré $(n-1)$, lorsque NR_1 est du degré $2n$. L'équation de condition,

$$s_m = a,$$

donnera donc $n-1$ équations entre les coefficiens des fonctions N et R_1; il n'y a donc que $n+1$ de ces coefficiens qu'on peut prendre arbitrairement, les autres sont déterminés par les équations de condition.

8.

De ce qui précède il suit qu'on trouve toutes les valeurs de R_1 et de N qui rendent la différentielle $\frac{\rho dx}{\sqrt{R_1 N}}$ intégrable par une expression de la forme

$$\log\left(\frac{p + q\sqrt{(R_1 N)}}{p - q\sqrt{(R_1 N)}}\right),$$

en faisant successivement les quantités s, s_1, $s_2 \ldots s_m$ indépendantes de x.

Puisque $p = p_1 N$, on a de même,

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{(R_1 N)}} = \log\left(\frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}}\right);$$

ou bien

$$23)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\rho dx}{\sqrt{(R_1 N)}} = \log\left(\frac{y\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{y\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right) \\ \text{où} \\ y = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 \cdots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}}} \end{cases}$$

en supposant s_m égal à une constante.

Les quantités R_1, N, p_1 et q étant déterminées comme on vient de voir, on trouve ϱ par l'équation (5). Cette équation donne, en mettant $p_1 N$ au lieu de p et ϱ au lieu de $\frac{M}{N}$,

$$\varrho = \left(p_1 \frac{dN}{dx} + 2N \frac{dp_1}{dp}\right) : q.$$

Il suit de là que

$$\delta\varrho = \delta p_1 + \delta N - 1 - \delta q = \delta p - \delta q - 1.$$

Or on a vu que $\delta p - \delta q = n$, donc

$$\delta\varrho = n - 1.$$

Donc si la fonction R ou $R_1 N$ est du degré $2n$, la fonction ϱ sera nécessairement du degré $n-1$.

9.

Nous avons vu plus haut que

$$R = R_1 N,$$

mais on peut toujours supposer que la fonction N est constante. En effet on a,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \log\left(\frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}}\right),$$

et par conséquent,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R_1 N}} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{p_1\sqrt{N}+q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N}-q\sqrt{R_1}}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{p_1^2 N+q^2 R_1+2p_1 q\sqrt{(R_1 N)}}{p_1^2 N+q^2 R_1-2p_1 q\sqrt{(R_1 N)}}\right);$$

c'est-à-dire, en faisant $p_1^2 N + q^2 R_1 = p'$ et $2p_1 q = q'$,

$$\int \frac{2\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{p'+q'\sqrt{R}}{p'-q'\sqrt{R}}\right).$$

Il est clair que p' et q' n'ont pas de facteur commun; on peut donc toujours poser

$$N = 1.$$

Au lieu de l'équation $p_1^2 N - q^2 R_1 = 1$, on a donc celle-ci,

$$p'^2 - q'^2 . R = 1,$$

dont on obtient la solution en faisant $N = 1$ et mettant R au lieu de R_1.

Ayant $N = 1$, on voit aisément que

$$t = R;\ t_1 = r;\ R = r^2 + s;$$

donc

$$24)\quad \begin{cases} \frac{p'}{q'} = r + \frac{1}{2\mu + \frac{1}{2\mu_1 + \frac{1}{2\mu_2 + \dots + \frac{1}{2\mu_{m-1}}}}} \\ R = r^2 + s \\ \mu = E\left(\frac{r}{s}\right);\ r = s.\mu + \varepsilon; \\ r_1 = r - 2\varepsilon;\ s_1 = 1 + 4\varepsilon.\mu, \\ \mu_1 = E\left(\frac{r_1}{s_1}\right);\ r_1 = s_1.\mu_1 + \varepsilon_1 \\ r_2 = r_1 - 2\varepsilon_1;\ s_2 = s + 4\varepsilon_1\mu_1; \\ \dots\dots \\ \mu_n = E\left(\frac{r_n}{s_n}\right);\ r_n = \mu_n s_n + \varepsilon_n, \\ r_{n+1} = r_n - 2\varepsilon_n;\ s_{n+1} = s_{n-1} + 4\varepsilon_n\mu_n, \\ \dots\dots \\ \mu_{m-1} = E\left(\frac{r_{m-1}}{s_{m-1}}\right);\ r_{m-1} = \mu_{m-1}s_{m-1} + \varepsilon_{m-1}, \\ r_m = r_{m-1} - 2\varepsilon_{m-1};\ s_m = s_{m-2} + 4\varepsilon_{m-1}\mu_{m-1} = a. \end{cases}$$

Ayant déterminé les quantités R, r, μ, $\mu_1 \dots \mu_{m-1}$ par ces équations on aura:

$$25)\quad \begin{cases} \int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{p' + q'\sqrt{R}}{p' - q'\sqrt{R}}\right), \\ \text{où} \quad \rho = \frac{2}{q'} \cdot \frac{dp'}{dx}, \end{cases}$$

ce qui résulte de l'équation (5) en y posant $N = 1$.

10.

On peut donner à l'expression $\log\left(\frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}}\right)$ une forme plus simple, savoir la forme,

$$\log\left(\frac{p_1\sqrt{N} + q\sqrt{R_1}}{p_1\sqrt{N} - q\sqrt{R_1}}\right) =$$

$$\log\left(\frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right) + \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}\right) \dots + \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\right),$$

ce qu'on peut démontrer comme il suit:

Soit

$$\frac{\alpha_m}{\beta_m} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu_0 + \cfrac{1}{2\mu_1 \ldots + \cfrac{1}{2\mu_{m-1}}}};$$

on a par la théorie des fractions continues,

$$\alpha_m = \alpha_{m-2} + 2\mu_{m-1} \cdot \alpha_{m-1} \quad (a)$$
$$\beta_m = \beta_{m-2} + 2\mu_{m-1} \cdot \beta_{m-1} \quad (b)$$

De ces équations on tire par l'élimination de μ_{m-1}:

$$\alpha_m \cdot \beta_{m-1} - \beta_m \cdot \alpha_{m-1} = -(\alpha_{m-1} \cdot \beta_{m-2} - \beta_{m-1} \cdot \alpha_{m-2}),$$

donc $\alpha_m \cdot \beta_{m-1} - \beta_m \cdot \alpha_{m-1} = (-1)^{m-1}$, ce qui est connu.

Les deux équations (*a*) et (*b*) donnent encore:

$$\alpha^2_m = \alpha^2_{m-2} + 4\alpha_{m-1} \cdot \alpha_{m-2} \cdot \mu_{m-1} + 4\mu^2_{m-1} \cdot \alpha^2_{m-1},$$
$$\beta^2_m = \beta^2_{m-2} + 4\beta_{m-1} \cdot \beta_{m-2} \cdot \mu_{m-1} + 4\mu^2_{m-1} \cdot \beta^2_{m-1}.$$

Il suit de la

$$\alpha^2_m N - \beta^2_m R_1$$
$$= \alpha^2_{m-2} N - \beta^2_{m-2} R_1 + 4\mu_{m-1}(\alpha_{m-1} \cdot \alpha_{m-2} N - \beta_{m-1} \beta_{m-2} R_1) + 4\mu^2_{m-1}(\alpha^2_{m-1} N - \beta^2_{m-1} R_1).$$

Or on a

$$\alpha^2_m \cdot N - \beta^2_m \cdot R_1 = (-1)^{m-1} \cdot s_m,$$
$$\alpha^2_{m-1} \cdot N - \beta^2_{m-1} \cdot R_1 = (-1)^{m-2} \cdot s_{m-1},$$
$$\alpha^2_{m-2} \cdot N - \beta^2_{m-2} \cdot R_1 = (-1)^{m-3} \cdot s_{m-2},$$

donc en substituant,

$$s_m = s_{m-2} + 4(-1)^{m-1} \cdot \mu_{m-1}(\alpha_{m-1} \cdot \alpha_{m-2} N - \beta_{m-1} \cdot \beta_{m-2} R_1) - 4\mu^2_{m-1} \cdot s_{m-1}.$$

Or, d'après ce qui précède, on a

$$s_m = s_{m-2} + 4\mu_{m-1} \cdot r_{m-1} - 4 s_{m-1} \cdot \mu^2_{m-1},$$

donc

$$r_{m-1} = (-1)^{m-1} \cdot (\alpha_{m-1} \cdot \alpha_{m-2} N - \beta_{m-1} \cdot \beta_{m-2} R_1).$$

Soit

$$z_m = \alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}, \text{ et } z'_m = \alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1},$$

on aura en multipliant,

$$z_m \cdot z'_{m-1} = \alpha_m \cdot \alpha_{m-1} \cdot N - \beta_m \cdot \beta_{m-1} R_1 - (\alpha_m \beta_{m-1} - \alpha_{m-1} \beta_m) \sqrt{NR_1},$$

or on vient de voir que

$\alpha_m \beta_{m-1} - \alpha_{m-1} \cdot \beta_m = (-1)^{m-1}$, et que $\alpha_m \alpha_{m-1} N - \beta_m \cdot \beta_{m-1} R_1 = (-1)^m r_m$;

on tire de là

$$z_m z'_{m-1} = (-1)^m \cdot (r_m + \sqrt{R}),$$

et de la même manière,

$$z'_m . z_{m-1} = (-1)^m . (r_m - \sqrt{R});$$

on en tire en divisant:

$$\frac{z_m}{z'_m} . \frac{z'_{m-1}}{z_{m-1}} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}};$$

c'est-à-dire en multipliant par $\frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}}$,

$$\frac{z_m}{z'_m} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}} . \frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}},$$

En faisant successivement $m = 1, 2, 3, \ldots m$, on aura,

$$\frac{z_1}{z'_1} = \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} . \frac{z_0}{z'_0}$$

$$\frac{z_2}{z'_2} = \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} . \frac{z_1}{z'_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{z_m}{z'_m} = \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}} . \frac{z_{m-1}}{z'_{m-1}},$$

d'où l'on tire,

$$\frac{z_m}{z'_m} = \frac{z_0}{z'_0} . \frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}} . \frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}} . \frac{r_3 + \sqrt{R}}{r_3 - \sqrt{R}} \ldots . \frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}.$$

Or

$$z_0 = \alpha_0 \sqrt{N} + \beta_0 \sqrt{R_1} = t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1},$$

$$z'_0 = \alpha_0 \sqrt{N} - \beta_0 \sqrt{R_1} = t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1},$$

et

$$\frac{z_m}{z'_m} = \frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}},$$

donc

26) $$\log\left(\frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}}\right)$$

$$= \log\left(\frac{t_1 \sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1 \sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right) + \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}\right) \ldots + \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\right),$$

11.

En différentiant l'expression $z = \log\left(\frac{\alpha_m \sqrt{N} + \beta_m \sqrt{R_1}}{\alpha_m \sqrt{N} - \beta_m \sqrt{R_1}}\right)$ on aura après les réductions nécessaires:

$$dz = \frac{2(\alpha_m d\beta_m - \beta_m d\alpha_m) N R_1 - \alpha_m \beta_m (R_1 dN - N dR_1)}{(\alpha^2_m N - \beta^2_m R_1) \sqrt{N R_1}}.$$

Or

$$\alpha^2_m N - \beta^2_m R_1 = (-1)^{m-1} . s_m,$$

donc en faisant

$$27)\quad (-1)^{m-1}.\varrho_m = 2\left(\alpha_m \frac{d\beta_m}{dx} - \beta_m \frac{d\alpha_m}{dx}\right) NR_1 - \alpha_m\beta_m\left(\frac{R_1dN - NdR_1}{dx}\right),$$

on aura

$$dz = \frac{\varrho_m}{s_m} \cdot \frac{dx}{\sqrt{NR_1}},$$

et

$$z = \int \frac{\varrho_m}{s_m} \cdot \frac{dx}{\sqrt{NR_1}}$$

donc

$$\int \frac{\varrho_m}{s_m} \frac{dx}{\sqrt{NR_1}} = \log\left(\frac{\alpha_m\sqrt{N} + \beta_m\sqrt{R_1}}{\alpha_m\sqrt{N} - \beta_m\sqrt{R_1}}\right),$$

ou bien

$$28)\quad \int \frac{\varrho_m}{s_m} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}}$$

$$= \log\left(\frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right) + \log\left(\frac{r_1 + \sqrt{R}}{r_1 - \sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_2 + \sqrt{R}}{r_2 - \sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\right).$$

Dans cette expression s_m est tout au plus du degré $(n-1)$ et ϱ_m est nécessairement du degré $(n-1+\delta s_m)$, dont on peut se convaincre de la manière suivante.

En différentiant l'équation

$$29)\quad \alpha_m^2 . N - \beta_m^2 . R_1 = (-1)^{m-1}.s_m,$$

on trouvera la suivante:

$$2\alpha_m N d\alpha_m + \alpha_m^2 dN - 2\beta_m d\beta_m . R_1 - \beta_m^2 dR_1 = (-1)^{m-1} ds_m,$$

ou en multipliant par $\alpha_m N$,

$$\alpha_m^2 N(2Nd\alpha_m + \alpha_m dN) - 2\alpha_m\beta_m d\beta_m NR_1 - \beta_m^2\alpha_m NdR_1 = (-1)^{m-1}.\alpha_m N ds_m.$$

Mettant ici à la place de $\alpha_m^2 N$ sa valeur tirée de l'équation (29), on aura,

$$(-1)^{m-1}s_m(2Nd\alpha_m + \alpha_m dN) + \beta_m(2NR_1\beta_m d\alpha_m + \alpha_m\beta_m R_1 dN - 2\alpha_m d\beta_m NR_1 - \beta_m\alpha_m NdR_1)$$
$$= (-1)^{m-1}\alpha_m N ds_m, \text{ c'est-à-dire,}$$
$$\beta_m(2(\alpha_m d\beta_m - \beta_m d\alpha_m)NR_1 - \alpha_m\beta_m(R_1 dN - NdR_1))$$
$$= (-1)^{m-1}(s_m(2Nd\alpha_m + \alpha_m dN) - \alpha_m N ds_m).$$

En vertu de l'équation (27) le premier membre de cette équation est égal à $\beta_m(-1)^{m-1}\varrho_m dx$; donc on aura,

$$30)\quad \beta_m\varrho_m = s_m\left(\frac{2Nd\alpha_m}{dx} + \frac{\alpha_m dN}{dx}\right) - \alpha_m \frac{Nds_m}{dx}.$$

Puisque $\delta s_m < n$, le second membre de cette équation sera nécessairement du degré $(\delta s_m + \delta N + \delta\alpha_m - 1)$,

Or de l'équation (29) il suit que

$$2\delta\alpha_m + \delta N = 2\delta\beta_m + \delta R_1,$$

donc

$$\delta\varrho_m = \delta s_m + \frac{\delta N + \delta R_1}{2} - 1;$$

or

$$\delta N + \delta R_1 = 2n,$$

donc

$$\delta\varrho_m = \delta s_m + n - 1,$$

c'est-à-dire, ϱ_m est nécessairement du degré $(\delta s_m + n - 1)$.

Il suit de là que la fonction $\frac{\varrho_m}{s_m}$ est du degré $(n-1)$.

Faisant dans la formule (28) $N=1$, on aura $t_1 = r$, et par conséquent

$$31)\quad \int \frac{\varrho_m \cdot dx}{s_m \sqrt{R}} = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right),$$

où, suivant l'équation (30),

$$\beta_m\varrho_m = 2s_m \cdot \frac{d\alpha_m}{dx} - \alpha_m \frac{ds_m}{dx},$$

L'équation (28) donne, en faisant $s_m = a$,

$$32)\quad \int \frac{\varrho_m \cdot dx}{a\sqrt{R}} = \log\left(\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right),$$

où

$$\beta_m\varrho_m = a \cdot \left(2N \cdot \frac{d\alpha_m}{dx} + \alpha_m \frac{dN}{dx}\right),$$

et lorsque $N=1$,

$$33)\quad \int \frac{\varrho_m dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right),$$

où

$$\varrho_m = \frac{2}{\beta_m} \cdot \frac{d\alpha_m}{dx},$$

D'après ce qui précède, cette formule a la même généralité que la formule (32) et donne toutes les intégrales de la forme $\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, où ϱ et R sont des fonctions entières, qui sont exprimables par une fonction logarithmique de la forme $\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$.

12.

Dans l'équation (28) la fonction $\frac{\varrho_m}{s_m}$ est donnée par l'équation (30). Mais on peut exprimer cette fonction d'une manière plus commode à l'aide des quantités t_1, r_1, r_2, etc. μ, μ_1, $\mu_2 \ldots$ etc.

En effet soit

$$z_m = \log\left(\frac{r_m + \sqrt{R}}{r_m - \sqrt{R}}\right),$$

on aura en différentiant,

$$dz_m = \frac{dr_m + \frac{1}{2}\frac{dR}{\sqrt{R}}}{r_m + \sqrt{R}} - \frac{dr_m - \frac{1}{2}\cdot\frac{dR}{\sqrt{R}}}{r_m - \sqrt{R}},$$

ou en réduisant,

33') $$dz_m = \frac{r_m \cdot dR - 2R dr_m}{r_m^2 - R} \cdot \frac{1}{\sqrt{R}},$$

Or nous avons vu plus haut,

$$s_m = s_{m-2} + 4\mu_{m-1} \cdot r_{m-1} - 4s_{m-1} \cdot \mu^2_{m-1}$$

donc en multipliant par s_{m-1}

$$s_m \cdot s_{m-1} = s_{m-1}\ s_{m-2} + 4\mu_{m-1} \cdot s_{m-1} \cdot r_{m-1} - 4s^2_{m-1} \cdot \mu^2_{m-1},$$

c'est-à-dire,

$$s_m \cdot s_{m-1} = s_{m-1} \cdot s_{m-2} + r^2_{m-1} - (2s_{m-1} \cdot \mu_{m-1} - r_{m-1})^2.$$

Or $$r_m = 2s_{m-1}\,\mu_{m-1} - r_{m-1},$$

donc en substituant cette quantité,

$$s_m \cdot s_{m-1} = s_{m-1} \cdot s_{m-2} + r^2_{m-1} - r^2_m,$$

d'où l'on trouve par transposition,

$$r^2_m + s_m \cdot s_{m-1} = r^2_{m-1} + s_{m-1} \cdot s_{m-2}.$$

Il suit de cette équation que $r^2_m + s_m \cdot s_{m-1}$ a la même valeur pour tous les m et par conséquent que

$$r^2_m + s_m s_{m-1} = r_1^2 + ss_1;$$

or nous avons vu plus haut que, $r_1^2 + ss_1 = R$, et par suite,

34) $$R = r^2_m + s_m \cdot s_{m-1}.$$

Substituant cette expression pour R dans l'équation (33') on aura après les réductions convenables:

$$dz_m = \frac{2dr_m}{\sqrt{R}} - \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} - \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}};$$

mais puisque $r_m = 2s_{m-1}\,\mu_{m-1} - r_{m-1}$, le terme $-\frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$ se transforme en $-2\mu_{m-1} \cdot \frac{ds_{m-1}}{\sqrt{R}} + \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}}$. On obtiendra donc,

$$dz_m = (2dr_m - 2\mu_{m-1}\, ds_{m-1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} + \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}},$$

et par l'intégration,

35) $\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} = -z_m + \int (2dr_m - 2\mu_{m-1} \cdot ds_{m-1}) \frac{1}{\sqrt{R}} + \int \frac{ds_{m-1}}{s_{m-1}} \cdot \frac{r_{m-1}}{\sqrt{R}},$

Cette expression est, comme on voit, une formule de réduction pour les intégrales de la forme $\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$. Car elle donne l'intégrale $\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$ par une autre intégrale de la même forme et par une intégrale de la forme $\int \frac{tdx}{\sqrt{R}}$, où t est une fonction entière.

Mettant dans cette formule à la place de m successivement $m-1$ $m-2$, ... 3, 2, 1, on obtiendra $m-1$ équations semblables, dont la somme produira la formule suivante (en remarquant que $r_0 = 2s\mu - r_1 = t_1 N$ en vertu de l'équation $r_1 + t_1 N = 2s\mu$).

$$\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} = -(z_1 + z_2 + z_3 \ldots + z_m) + \int \frac{ds}{s} \cdot \frac{t_1 N}{\sqrt{R}}$$

$$+ \int 2(dr_1 + dr_2 + dr_3 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \mu_2 ds_2 \ldots - \mu_{m-1} ds_{m-1}) \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

On peut encore réduire l'intégrale $\int \frac{ds}{s} \cdot \frac{t_1 N}{\sqrt{R}}$. Différentiant l'expression

$$z = \log\left(\frac{t_1\sqrt{N} + \sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N} - \sqrt{R_1}}\right),$$

on aura après quelque réductions,

$$dz = -\frac{2dt_1 NR_1 - t_1(R_1 dN - NdR_1)}{(t_1^2 N - R_1)\sqrt{R}}.$$

Or on a

$$R_1 = t_1^2 N + s;$$

substituant donc cette valeur de R_1 dans l'équation ci-dessus, on trouvera

$$dz = (2Ndt_1 + t_1 dN) \frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{ds}{s} \cdot \frac{t_1 N}{\sqrt{R}},$$

donc en intégrant

$$\int \frac{ds}{s} \cdot \frac{t_1 N}{\sqrt{R}} = -z + \int (2Ndt_1 + t_1 dN) \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

L'expression pour $\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$ se transformera par là en celle-ci,

$$\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}} = -(z + z_1 + z_2 + \ldots + z_m)$$

$$+ \int \frac{2}{\sqrt{R}} (Ndt_1 + \tfrac{1}{2} t_1 dN + dr_1 + dr_2 + \ldots + dr_m - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_{m-1} ds_{m-1}),$$

c'est-à-dire, en mettant à la place des quantités z, z_1, z_2, ... leurs valeurs,

36) $$\int \frac{ds_m}{s_m} \cdot \frac{r_m}{\sqrt{R}}$$

$$=\int\frac{2}{\sqrt{R}}(Ndt_1+\tfrac{1}{2}t_1dN+dr_1+dr_2+\ldots+dr_m-\mu ds-\mu_1ds_1-\ldots-\mu_{m-1}ds_{m-1})$$
$$-\log\left(\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R_1}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R_1}}\right)-\log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right)-\log\left(\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}}\right)-\ldots-\log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right).$$

Cette formule est entièrement la même que la formule (28); elle donne:

$$37)\quad \frac{\rho_m}{s_m}.dx=-\frac{r_m ds_m}{s_m}$$
$$+2(Ndt_1+\tfrac{1}{2}t_1dN+dr_1+\ldots+dr_m-\mu ds-\mu_1ds_1-\ldots-\mu_{m-1}ds_{m-1}).$$

Mais l'expression ci-dessus dispense du calcul des fonction α_m et β_m.

Si maintenant s_m est indépendant de x, l'intégrale $\int\frac{ds_m}{s_m}\cdot\frac{r_m}{\sqrt{R}}$ s'évanouit et on obtient la formule suivante:

$$38)\int\frac{2}{\sqrt{R}}(\tfrac{1}{2}t_1dN+Ndt_1+dr_1+dr_2+\ldots+dr_m-\mu ds-\mu_1ds_1-\ldots-\mu_{m-1}ds_{m-1})$$
$$=\log\left(\frac{t_1\sqrt{N}+\sqrt{R}}{t_1\sqrt{N}-\sqrt{R}}\right)+\log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right)+\log\left(\frac{r_2+\sqrt{R}}{r_2-\sqrt{R}}\right)+\ldots+\log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right).$$

Lorsque dans l'expression (36) $N=1$, on aura $t_1=r$ et par suite:

$$39)\int\frac{ds_m}{s_m}\cdot\frac{r_m}{\sqrt{R}}=$$
$$\int\frac{2}{\sqrt{R}}(dr+dr_1+dr_2+\ldots+dr_m-\mu ds-\mu_1ds_1-\ldots-\mu_{m-1}ds_{m-1})$$
$$-\log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right)-\log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right)-\ldots-\log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right),$$

et lorsqu'on fait $s_m=a$:

$$40)\begin{cases}\int\frac{2}{\sqrt{R}}(dr+dr_1+dr_2+\ldots+dr_m-\mu ds-\mu_1ds_1-\ldots-\mu_{m-1}ds_{m-1})\\ =\log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right)+\log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right)+\ldots+\log\left(\frac{r_m+\sqrt{R}}{r_m-\sqrt{R}}\right).\end{cases}$$

En vertu de ce qui précède, cette formule a la même généralite que (38), et donne par conséquent toutes les intégrales de la forme $\int\frac{tdx}{\sqrt{R}}$, où t est une fonction entière, qui peuvent être exprimées par une fonction de la forme

$$\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right).$$

13.

Nous avons vu ci-dessus que

$$\sqrt{\frac{R_1}{N}} = t_1 + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 \text{ etc.}}}}}$$

donc, lorsque $N = 1$,

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \cfrac{1}{2\mu_3 \ldots}}}}$$

En général les quantités μ, μ_1, μ_2, $\mu_3 \ldots$ sont différentes entre elles. Mais lorsqu'une des quantités s, s_1, $s_2 \ldots s_m$ est indépendante de x, la fraction continue devient périodique. Cela on peut démontrer comme il suit.

On a $$r^2_{m+1} + s_m \cdot s_{m+1} = R = r^2 + s,$$

donc, lorsque $s_m = a$,

$$r^2_{m+1} - r^2 = s - as_{m+1} = (r_{m+1} + r)(r_{m+1} - r).$$

Or $\delta r_{m+1} = \delta r$, $\delta s < \delta r$, $\delta s_{m+1} < \delta r$. Cette équation ne peut donc subsister à moins qu'on n'ait en même temps,

$$r_{m+1} = r, \quad s_{m+1} = \frac{s}{a}.$$

Or puisque $$\mu_{m+1} = E\left(\frac{r_{m+1}}{s_{m+1}}\right),$$

on a de même $\mu_{m+1} = a \cdot E\left(\frac{r}{s}\right)$; mais $E\left(\frac{r}{s}\right) = \mu$,

donc $$\mu_{m+1} = a\mu.$$

On a de plus

$$s_{m+2} = s_m + 4\mu_{m+1}r_{m+1} - 4\mu^2_{m+1}s_{m+1},$$

donc ayant $s_m = a$, $r_{m+1} = r$, $\mu_{m+1} = a\mu$,

on en conclut $s_{m+2} = a(1 + 4\mu r - 4\mu^2 s)$;

or $s_1 = 1 + 4\mu r - 4\mu^2 s$,

donc $s_{m+2} = as_1$

On a de même $r_{m+2} = 2\mu_{m+1}s_{m+1} - r_{m+1} = 2\mu s - r$,

et $r_1 = 2\mu s - r$,

donc $r_{m+2} = r_1$,

d'où l'on tire

$$\mu_{m+2} = \pm E\left(\frac{r_{m+2}}{s_{m+2}}\right) = \frac{1}{a} E\left(\frac{r_1}{s_1}\right),$$

donc $$\mu_{m+2} = \frac{\mu_1}{a}.$$

En continuant ce procédé on voit sans peine qu'on aura en général:

40) $$\begin{cases} r_{m+n} = r_{n-1}, \quad s_{m+n} = a^{\pm 1} \cdot s_{n-1} \\ \mu_{m+n} = a^{\pm 1} \cdot \mu_{n-1}. \end{cases}$$

Le signe $+$ doit être pris lorsque n est pair et le signe $-$ dans le cas contraire.

Mettant dans l'équation

$$r_m^2 + s_{m-1} \cdot s_m = r^2 + s$$

a à la place de s_m, on aura,

$$(r_m - r)(r_m + r) = s - a s_{m-1}.$$

Il suit de là

$$r_m = r, \quad s_{m-1} = \frac{s}{a}.$$

Or $$\mu_m = E\left(\frac{r_m}{s_m}\right), \text{ donc } \mu_m = \frac{1}{a} \cdot E(r);$$

c'est-à-dire $$\mu_m = \frac{1}{a} \cdot r.$$

On a de plus $$r_m + r_{m-1} = 2 s_{m-1} \mu_{m-1},$$

c'est-à-dire, puisque $$r_m = r, \quad s_{m-1} = \frac{s}{a},$$

$$r + r_{m-1} = \frac{2s}{a} \mu_{m-1}.$$

Or $$r + r_1 = 2 s \mu, \text{ donc}$$

$$r_{m-1} - r_1 = \frac{2s}{a} (\mu_{m-1} - a\mu).$$

On a $$r_{m-1}^2 + s_{m-1} \cdot s_{m-2} = r_1^2 + s s_1,$$

c'est-à-dire, puisque $s_{m-1} = \frac{s}{a}$,

$$(r_{m-1} + r_1)(r_{m-1} - r_1) = \frac{s}{a} (a s_1 - s_{m-2}).$$

Or nous avons vu que

$$r_{m-1} - r_1 = \frac{2s}{a} (\mu_{m-1} - a\mu),$$

donc en substituant,

$$2 (r_{m+1} + r_1)(\mu_{m-1} - a\mu) = a s_1 - s_{m-2}.$$

Cette équation donne, en remarquant que $\delta (r_{m+1} + r_1) > \delta (a s_1 - s_{m-2})$,

$$\mu_{m-1} = a\mu,\ s_{m-2} = as_1,$$

et par conséquent $r_{m-1} = r_1$.

Par un procédé semblable on trouvera aisément,

$$r_{m-2} = r_2,\ s_{m-3} = \frac{1}{a} s_2,\ \mu_{m-2} = \frac{\mu_1}{a},$$

et en général:

$$42)\quad \begin{cases} r_{m-n} = r_{n-1},\ s_{m-n} = a^{\pm 1} . s_{n-1} \\ \mu_{m-n} = a^{\pm 1} . \mu_{n-1}. \end{cases}$$

14.

A) Soit m un nombre pair $= 2k$.

Dans ce cas on voit aisément, en vertu des équations (41) et (42), que les quantités $r, r_1, r_2, r_3 \ldots s, s_1, s_2 \ldots \mu, \mu_1, \mu_2 \ldots$ forment les séries suivantes:

0	1	2	...	2k-2	2k-1	2k	2k+1	2k+2	...	4k-1	4k	4k+1	4k+2	4k+3	4k+4	
r	r_1	r_2	...	r_2	r_1	r	r	r_1	...	r_2	r_1	r	r	r_1	r_2	etc.
s	s_1	s_2	...	as_1	$\frac{s}{a}$	a	$\frac{s}{a}$	as_1	...	s_1	s	1	s	s_1	s_2	etc.
μ	μ_1	μ_2	...	$\frac{\mu_1}{a}$	$a\mu$	$\frac{r}{a}$	$a\mu$	$\frac{\mu_1}{a}$	...	μ_1	μ	r	μ	μ_1	μ_2	etc.

B) Soit m un nombre impair $= 2k-1$.

Dans ce cas les équations

$$s_{m-n} = a^{\pm 1} . s_{n-1} \text{ et } s_{2k-n-1} = a^{\pm 1} . s_{n-1}$$

donnent pour $n = k$,

$$s_{k-1} = a^{\pm 1} . s_{k-1},\ \text{donc } a = 1.$$

Les quantités r, r_1, etc. s, s_1 etc. μ, μ_1 etc. forment les séries suivantes:

0	1	2	...	k-2	k-1	k	k+1	...	2k-2	2k-1	2k	2k+1	2k+2	etc.
r	r_1	r_2	...	r_{k-2}	r_{k-1}	r_{k-1}	r_{k-2}	...	r_1	r	r	r_1	r_2	etc.
s	s_1	r_2	...	s_{k-2}	s_{k-1}	s_{k-2}	s_{k-3}	...	s	1	s	s_1	s_2	etc.
μ	μ_1	μ_2	...	μ_{k-2}	μ_{k-1}	μ_{k-2}	μ_{k-3}	...	μ	r	μ	μ_1	μ_2	etc.

On voit par là que, lorsqu'une des quantités $s, s_1, s_2 \ldots$ est indépendante de x, la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$, est toujours périodique et de la forme suivante, lorsque $s_m = a$:

$$\sqrt{R} = r + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu_1} + \dots + \frac{1}{\frac{2\mu_1}{a}} + \frac{1}{2a\mu} + \frac{1}{\frac{2r}{a}} + \frac{1}{2a\mu} + \frac{1}{\frac{2\mu_1}{a}} + \text{etc.} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2\mu} + \dots$$

Lorsque m est impair, on a de plus $a = 1$, et par suite:

$$\sqrt{R} = r + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu_1} + \dots + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu_1} + \text{etc.}$$

Le réciproque a également lieu; c'est-à-dire, lorsque la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ a la forme ci-dessus, s_m sera indépendant de x. En effet soit

$$\mu_m = \frac{r}{a};$$

on tire de l'équation $r_m = s_m \cdot \mu_m + \varepsilon_m$,

$$r_m = \frac{r}{a} \cdot s_m + \varepsilon_m.$$

Or $r_m = r_{m-1} - 2\varepsilon_{m-1}$, où $\delta\varepsilon_{m-1} < \delta r$, il est clair que $r_m = r + \gamma_m$, où $\delta\gamma_m < \delta r$.

On tire de là

$$r\left(1 - \frac{s_m}{a}\right) = \varepsilon_m - \gamma_m,$$

et par conséquent $s_m = a$, ce qu'il fallut démontrer.

En combinant cela avec ce qui précède, on trouve la proposition suivante:

"Lorsqu'il est possible de trouver pour ϱ une fonction entière telle, que

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{y + \sqrt{R}}{y - \sqrt{R}}\right),$$

"la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ sera périodique, et aura la forme suivante:

$$\sqrt{R} = r + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu_1} + \dots + \frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2\mu_1} + \text{etc.}$$

"et réciproquement, lorsque la fraction continue résultant de $\sqrt{R}$ a cette forme,

"il est toujours possible de trouver pour ρ une fonction entière qui satisfait à l'équation,

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}} = \log\left(\frac{y+\sqrt{R}}{y-\sqrt{R}}\right).$$

"La fonction y est donnée par l'expression suivante:

$$y = r + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2\mu_1 + \cfrac{1}{2\mu_2 + \ldots + \cfrac{1}{2\mu + \cfrac{1}{2r}}}}}."$$

Dans cette proposition est contenue la solution complète du problème proposé au commencement de ce mémoire.

15.

Nous venons de voir que, lorsque s_{2k-1} est indépendant de x, on aura toujours $s_k = s_{k-2}$, et lorsque s_{2k} est indépendant de x, on aura $s_k = cs_{k-1}$, où c est constant. Le réciproque a également lieu, ce qu'on peut démontrer comme il suit:

I. Soit d'abord $s_k = s_{k-2}$,

On a $$r_{k-1}^2 + s_{k-1} \cdot s_{k-2} = r_k^2 + s_k \cdot s_{k-1}$$

or $$s_k = s_{k-2}, \text{ donc } r_k = r_{k-1}.$$

De plus $$r_k = \mu_k \cdot s_k + \varepsilon_k,$$

$$r_{k-2} = \mu_{k-2} \; s_{k-2} + \varepsilon_{k-2},$$

donc $$r_k - r_{k-2} = s_k(\mu_k - \mu_{k-2}) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-2}.$$

Mais $$r_k = r_{k-1}, \; r_{k-2} = r_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2},$$

donc en substituant,

$$0 = s_k(\mu_k - \mu_{k-2}) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-2}.$$

Cette équation donne, en remarquant que $\delta\varepsilon_k < \delta s_k$; $\delta\varepsilon_{k-2} < \delta s_{k-2}$,

$$\mu_k = \mu_{k-2}, \; \varepsilon_k = -\varepsilon_{k-2}.$$

Or $r_{k+1} = r_k - 2\varepsilon_k$, donc, en vertu de la dernière équation,

$$r_{k+1} = r_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2},$$

et puisque $r_{k-1} = r_{k-2} - 2\varepsilon_{k-2}$, on en conclut,

$$r_{k+1} = r_{k-2}.$$

On a $$r_{k+1}^2 + s_k \cdot s_{k+1} = r_{k-2}^2 + s_{k-2} \cdot s_{k-3},$$

et $$r_{k+1} = r_{k-2},\ s_k = s_{k-2},$$
donc $$s_{k+1} = s_{k-3}.$$

En combinant cette équation avec celles-ci,
$$r_{k+1} = \mu_{k+1} \cdot s_{k+1} + \varepsilon_{k+1},\ \text{et}\ r_{k-3} = \mu_{k-3} \cdot s_{k-3} + \varepsilon_{k-3},$$
on obtiendra,
$$r_{k+1} - r_{k-3} = s_{k+1} (\mu_{k+1} - \mu_{k-3}) + \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-3}.$$
Or on a, $$r_{k+1} = r_{k-2},\ \text{et}\ r_{k-2} = r_{k-3} - 2\varepsilon_{k-3},$$
par conséquent, $$0 = s_{k+1} (\mu_{k+1} - \mu_{k-3}) + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k-3}.$$
Il suit de là, $$\mu_{k+1} = \mu_{k-3},\ \varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_{k-3}.$$

En continuant de cette manière, on voit aisément qu'on aura en général:
$$r_{k+n} = r_{k-n-1},\ \mu_{k+n} = \mu_{k-n-2},\ s_{k+n} = s_{k-n-2}.$$

En posant dans la dernière équation $n = k - 1$, on trouvera,
$$s_{2k-1} = s_{-1}.$$

Or il est clair que s_{-1} est la même chose que 1; car on a en général,
$$R = r_m^2 + s_m \cdot s_{m-1},$$
donc en faisant $m = 0$,
$$R = r^2 + s \cdot s_{-1},$$
mais $R = r^2 + s$, donc $s_{-1} = 1$, et par conséquent,
$$s_{2k-1} = 1.$$

II. Soit en second lieu $s_k = cs_{k-1}$.

On a, $$r_k = \mu_k \cdot s_k + \varepsilon_k,\ \text{et}\ r_{k-1} = \mu_{k-1} \cdot s_{k-1} + \varepsilon_{k-1},$$
donc, $$r_k - r_{k-1} = s_{k-1} (c\mu_k - \mu_{k-1}) + \varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}.$$
Or, $$r_k - r_{k-1} = -2\varepsilon_{k-1},\ \text{donc},$$
$$0 = s_{k-1} (c\mu_k - \mu_{k-1}) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}.$$

Cette équation donne,
$$\mu_k = \frac{1}{c} \cdot \mu_{k-1},\ \varepsilon_k = -\varepsilon_{k-1}.$$

Donc des équations,
$$r_k - r_{k-1} = -2\varepsilon_{k-1},\ r_{k+1} - r_k = -2\varepsilon_k,$$
on obtient en ajoutant,
$$r_{k+1} = r_{k-1}.$$

On a de plus,
$$r_{k+1}^2 + s_k \cdot s_{k+1} = r_{k-1}^2 + s_{k-1} \cdot s_{k-2},$$

et puisque, $r_{k+1} = r_{k-1}$ et $s_k = c s_{k-1}$,

on en conclut $s_{k+1} = \frac{1}{c} \cdot s_{k-2}$.

En continuant de cette manière, on aura,

$$s_{2k} = c^{\pm 1},$$

c'est-à-dire, s_{2k} est indépendant de x.

Cette propriété des quantités s, s_1, s_2 etc. fait voir que l'équation $s_{2k} = a$ est identique avec l'équation $s_k = a^{\pm 1} . s_{k-1}$ et que l'équation $s_{2k-1} = 1$ est identique avec l'équation $s_k = s_{k-2}$. Il suit de là que, lorsqu'on cherche la forme de R qui convient à l'équation $s_{2k} = a$, on peut au lieu de cette équation poser $s_k = a^{\pm 1} . s_{k-1}$, et lorsqu'on cherche la forme de R qui convient à l'équation $s_{2k-1} = 1$, il suffit de faire $s_k = s_{k-2}$, ce qui abrège beaucoup le calcul.

16.

En vertu des équations (41) et (42) on peut donner à l'expression (40) une forme plus simple.

a) Lorsque m est pair $= 2k$, on a:

$$43) \begin{cases} \int \frac{2}{\sqrt{R}} (dr + dr_1 + \ldots + dr_{k-1} + \tfrac{1}{2} dr_k - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_{k-1} ds_{k-1}) \\ = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_{k-1}+\sqrt{R}}{r_{k-1}-\sqrt{R}}\right) + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{r_k+\sqrt{R}}{r_k-\sqrt{R}}\right). \end{cases}$$

b) Lorsque m est impair $= 2k - 1$, on a:

$$44) \begin{cases} \int \frac{2}{\sqrt{R}} (dr + dr_1 + \ldots + dr_{k-1} - \mu ds - \mu_1 ds_1 - \ldots - \mu_{k-2} ds_{k-2} - \tfrac{1}{2}\mu_{k-1} ds_{k-1}) \\ = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right) + \ldots + \log\left(\frac{r_{k-1}+\sqrt{R}}{r_{k-1}-\sqrt{R}}\right). \end{cases}$$

17.

Pour appliquer ce qui précède à un exemple, prenons l'intégrale

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{(x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)}}.$$

On a ici $\delta R = 4$, donc les fonctions s, s_1, s_2, $s_3 \ldots$ sont du prémier degre, et par suite l'équation $s_m = \text{const.}$ ne donne qu'une seule équation de condition entre les quantités α, β, γ, δ, ε.

Faisant

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = (x^2 + ax + b)^2 + c + ex,$$

on aura,

$$r = x^2 + ax + b, \quad s = c + ex.$$

Pour abréger le calcul, nous ferons $c = 0$; donc $s = ex$, et par conséquent,

$$\mu = E\left(\frac{r}{s}\right) = E\left(\frac{x^2+ax+b}{ex}\right);$$

c'est-à-dire

$$\mu = \frac{x}{e} + \frac{a}{e}, \quad \varepsilon = b.$$

De plus

$$r_1 = r - 2\varepsilon = x^2 + ax + b - 2b = x^2 + ax - b,$$

$$s_1 = 1 + 4\varepsilon\mu = 1 + 4b \cdot \frac{x+a}{e} = \frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1,$$

$$\mu_1 = E\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = E\left\{\frac{x^2+ax-b}{\frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1}\right\} = \frac{e}{4b}x - \frac{e^2}{16b^2},$$

$$\varepsilon_1 = r_1 - \mu_1 s_1 = \frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b,$$

$$s_2 = s + 4\varepsilon_1\mu_1 = \left(\frac{ae^2}{4b^2} + \frac{e^3}{16b^3}\right)x - \frac{e^2}{4b^2}\left(\frac{ae}{4b} + \frac{e^2}{16b^2} - b\right)$$

Soit maintenant en premier lieu

$$s_1 = \text{constant.}$$

Alors l'équation,

$$s_1 = \frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1,$$

donne

$$b = 0,$$

par conséquent,

$$r = x^2 + ax,$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{R}}(dr - \tfrac{1}{2}\mu ds) = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right),$$

c'est-à-dire, puisque $\mu = \frac{x+a}{e}$, $s = ex$,

$$\int \frac{(3x+a)dx}{\sqrt{((x^2+ax)^2+ex)}} = \log\left(\frac{x^2+ax+\sqrt{R}}{x^2+ax-\sqrt{R}}\right).$$

Cette intégrale se trouve aussi facilement en multipliant la différentielle en haut et en bas par x.

Soit en second lieu $s_2 = \text{constant.}$

Dans ce cas la formule (43.) donne, k étant $= 1$,

$$\int \frac{2}{\sqrt{R}}(dr + \tfrac{1}{2}dr_1 - \mu ds) = \log\left(\frac{r+\sqrt{R}}{r-\sqrt{R}}\right) + \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{r_1+\sqrt{R}}{r_1-\sqrt{R}}\right).$$

Or l'équation $s_2 = \text{const.}$ donne $s_1 = cs$, donc,

$$\frac{4b}{e}x + \frac{4ab}{e} + 1 = cex.$$

L'équation de condition sera donc $\frac{4ab}{e}+1=0$, c'est-à-dire,

$$e=-4ab,$$

donc $$R=(x^2+ax+b)^2-4abx.$$

De plus, μ étant $=\frac{x+a}{e}$, $r=x^2+ax+b$, $r_1=x^2+ax-b$, on aura la formule,

$$\int\frac{(4x+a)dx}{\sqrt{((x^2+ax+b)^2-4abx)}}=\log\left(\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}\right)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}\right).$$

Soit en troisiéme lieu $s_3=\text{const.}$

Cette équation donne $s=s_2$, c'est-à-dire,

$$\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b=0.$$

On tire de là,

$$e=-2b\left(a\pm\sqrt{(a^2+4b)}\right).$$

La formule (44) donne par conséquent, puisque $k=2$,

$$\int\frac{(5x+\frac{3}{2}a\mp\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+4b)}).dx}{\sqrt{((x^2+ax+b)^2-2bx(a\pm\sqrt{a^2+b}))}}$$
$$=\log\left(\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}\right)+\log\left(\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}\right).$$

Si par exemple $a=0$, $b=1$, on aura cette intégrale:

$$\int\frac{(5x-1).dx}{\sqrt{((x^2+1)^2-4x)}}=\log\left(\frac{x^2+1+\sqrt{((x^2+1)^2-4x)}}{x^2+1-\sqrt{((x^2+1)^2-4x)}}\right)+\log\left(\frac{x^2-1+\sqrt{((x^2+1)^2-4x)}}{x^2-1-\sqrt{((x^2+1)^2-4x)}}\right).$$

Soit en quatrième lieu $s_4=\text{const.}$

Cela donne $s_2=cs_1$, c'est-à-dire:

$$\left(\frac{ae^2}{4b^2}+\frac{e^3}{16b^3}\right)x-\frac{e^2}{4b^2}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right)=\frac{4cb}{e}.x+\left(\frac{4ab}{e}+1\right).c.$$

On en tire, en comparant les coefficiens et ensuite en éliminant c,

$$\frac{e}{16b^3}(e+4ab)^2=-\frac{e}{b}\left(\frac{ae}{4b}+\frac{e^2}{16b^2}-b\right),$$
$$(e+4ab)^2=16b^3-e(e+4ab),$$
$$e^2+6ab.e=8b^3-8a^2b^2,$$
$$e=-3ab\mp\sqrt{(8b^3+a^2b^2)}=-b\left((3a\pm\sqrt{(a^2+8b)}\right).$$

En vertu de cette expression la formule (43) donne,

$$\int\frac{(6x+\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+8b)})\,dx}{\sqrt{((x^2+ax+b)^2-b(3a+\sqrt{(a^2+8b)})x)}}=\log\left(\frac{x^2+ax+b+\sqrt{R}}{x^2+ax+b-\sqrt{R}}\right)$$
$$+\log\left(\frac{x^2+ax-b+\sqrt{R}}{x^2+ax-b-\sqrt{R}}\right)+\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+ax+\frac{1}{4}a\,(a-\sqrt{(a^2+8b)})+\sqrt{R}}{x^2+ax+\frac{1}{4}a\,(a-\sqrt{(a^2+8b)})-\sqrt{R}}\right).$$

Si l'on fait p. ex. $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$, on obtiendra:

$$\int \frac{(x+\frac{1}{6})dx}{\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}} = \frac{1}{6}\log\left(\frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}}{x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}}\right)$$

$$+\frac{1}{6}\log\left(\frac{x^2-\frac{1}{2}+\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}}{x^2-\frac{1}{2}-\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}}\right)+\frac{1}{12}\log\left(\frac{x^3+\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}}{x^3-\sqrt{(x^4+x^2+x+\frac{1}{4})}}\right).$$

De cette manière on peut continuer et trouver un plus grand nombre d'intégrales. Ainsi p. ex. l'intégrale

$$\int \frac{(x+\frac{1}{4}).dx}{\sqrt{\left[\left(x^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+(\sqrt{5}-1)^2.x\right]}}$$

peut s'exprimer par des logarithmes.

Nous avons ici cherché les intégrales de la forme $\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$ qui peuvent s'exprimer par une fonction logarithmique de la forme $\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$. On pourrait rendre le problème encore plus général et chercher en général toutes les intégrales de la forme ci-dessus qui pourraient s'exprimer d'une manière quelconque par des logarithmes; mais on ne trouverait pas d'intégrales nouvelles; car le théorème suivant très remarquable a lieu:

"Lorsqu'une intégrale de la forme $\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, où ρ et R sont des fonc-
"tions entières de x, est exprimable par des logarithmes, on peut tou-
"jours l'exprimer de la manière suivante:

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}} = A . \log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right).$$

"où A est constant, et p et q des fonctions entières de x."

Je me réserve de démontrer ce théorème dans une autre occassion.

VII.

Recherche sur la série

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}.x^2+\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}.x^3+\ldots \text{etc.}$$

I.

Si l'on fait subir au raisonnement dont on se sert en général où il s'agit des séries infinies, un examen plus exact, on trouvera qu'il est en entier peu satisfaisant, et que par conséquent le nombre des théorèmes, concernant les séries infinies, qui peuvent être considérés comme rigoureusement fondés, est très limité. On applique à l'ordinaire les opérations de l'analyse aux séries infinies de la même manière que si les séries étaient finies, ce qui ne me semble pas permis sans démonstration particulière. Si par exemple on doit multiplier deux séries infinies l'une par l'autre, on pose

$$(u_0+u_1+u_2+u_3+\text{etc.})(v_0+v_1+v_2+v_3+\text{etc.})=u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)$$
$$+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)+\text{etc.}\ldots+(u_0v_n+u_1v_{n-1}+u_2v_{n-2}+\ldots+u_nv_0)+\text{etc.}$$

Cette équation est très juste lorsque les séries $u_0+u_1+\ldots$ et $v_0+v_1+\ldots$ sont finies. Mais si elles sont infinies il est d'abord nécessaire qu'elles convergent, car une série divergente n'a pas de somme, et ensuite la série du second membre doit de même converger. C'est seulement avec cette restriction que l'expression ci-dessus est juste; mais, si je ne me trompe, jusqu'à présent on n'y a pas eu égard. C'est ce qu'on se propose de faire dans ce traité. Il-y-a encore plusieurs opérations semblables à prouver, p. ex. le procédé ordinaire de la division d'une quantité par une série infinie, celui de l'élévation d'une série infinie à une puissance, celui de la détermination de son logarithme, de son sinus, de son cosinus, etc.

Un autre procédé qu'on trouve fréquemment dans l'analyse, et qui assez souvant conduit aux contradictions, c'est qu'on se sert des séries divergentes pour l'évaluation des valeurs numériques des séries. Une série divergente ne

peut jamais être égale à une quantité déterminée; elle est seulement une expression jouissant de certaines propriétés, qui se rapportent aux opérations auxquelles la série est sujette.

Les séries divergentes peuvent quelquefois servir avec succès de symboles pour exprimer l'une ou l'autre proposition d'une manière abrégée; mais on ne saurait jamais les mettre à la place des quantités déterminées. Par un tel procédé on peut démontrer tout ce qu'on veut, l'impossible aussi bien que le possible.

Une des séries les plus remarquables dans l'analyse algébrique est celle-ci:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.x^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1.2.3\ldots n}x^n+\text{etc.}$$

Lorsque m est un nombre entier positif, on sait que la somme de cette série, qui dans ce cas est finie, peut s'exprimer par $(1+x)^m$. Lorsque m n'est pas un nombre entier, la série ira à l'infini, et elle sera convergente ou divergente, selon les différentes valeurs qu'on attribue à m et à x. Dans ce cas on pose de même l'équation

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}.x+\frac{m(m-1)}{1.2}.x^2+\text{etc.}$$

mais alors l'égalité exprime seulement que les deux expressions

$$(1+x)^m \text{ et } 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots$$

ont certaines propriétés communes desquelles, pour certaines valeurs de m et de x, dépend l'égalité des valeurs numériques des expressions. On suppose que l'égalité numérique aura toujours lieu, lorsque la série est convergente; mais c'est ce qui jusqu'à présent n'est pas encore démontré. On n'a pas même examiné tous les cas où la série est convergente. Lors même qu'on *suppose* l'existence de l'équation ci-dessus, il reste pourtant à chercher la *valeur* de $(1+x)^m$, car cette expression a en général une infinité de valeurs différentes, tandis que la série $1+mx+$ etc. n'en a qu'une seule.

Le but de ce mémoire est d'essayer de remplir une lacune par la résolution complète du problème suivant:

"Trouver la somme de la série

$$1+\frac{m}{1}.x+\frac{m(m-1)}{1.2}.x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2\cdot3}.x^3+\text{etc.}$$

"pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de x et de m pour lesquelles la série est convergente."

II.

Nous allons d'abord établir quelques théorèmes nécessaires sur les séries. L'exellent ouvrage de M. Cauchy *"Cours d'analyse de l'école polytecknique"*, qui doit être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques, nous servira de guide.

Définition. Une série quelconque

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_m \text{ etc.}$$

sera dite *convergente*, si pour des valeurs toujours croissantes de m, la somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_m$ s'approche indéfiniment d'une certaine limite. Cette limite s'appellera *la somme de la série*. Dans le cas contraire la série sera dite *divergente*, et elle n'a pas de somme. D'après cette définition, pour qu'une série soit convergente, il est néccessaire et il suffit que pour des valeurs toujours croissantes de m, la somme $v_m + v_{m+1} + \ldots + v_{m+n}$ s'approche indéfiniment de zéro, quelle que soit la valeur de n.

Donc, dans une série convergente quelconque le terme général v_m s'approchera indéfiniment de zéro*).

Théorème I. Si en désignant par ρ_0, ρ_1, $\rho_2 \ldots$ une série de quantités positives, le quotient $\frac{\rho_{m+1}}{\rho_m}$ pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approche indéfiniment d'une limite α, qui est plus grande que 1, la série

$$\varepsilon_0 \rho_0 + \varepsilon_1 \rho_1 + \varepsilon_2 \rho_2 + \ldots + \varepsilon_m \rho_m + \ldots$$

où ε_m est une quantité qui pour des valeurs toujours croissantes de m ne s'approche pas indéfiniment de zéro, sera néccessairement divergente.

Théorème II. Si dans une série de quantités positives $\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 \ldots + \rho_m$ le quotient $\frac{\rho_{m+1}}{\rho_m}$ pour des valeurs toujours croissantes de m s'approche indéfiniment d'une limite, qui est plus petite que 1, la série

$$\varepsilon_0 \rho_0 + \varepsilon_1 \rho_1 + \varepsilon_2 \rho_2 + \ldots + \varepsilon_m \rho_m,$$

où ε_0, ε_1, ε_2 etc. sont des quantités, qui ne surpassent pas l'unité, sera nécessairement convergente.

En effet d'après la supposition on peut toujours prendre m assez grand pour que $\rho_{m+1} < \alpha \rho_m$, $\rho_{m+2} < \alpha \rho_{m+1}$, $\ldots \rho_{m+n} < \alpha \rho_{m+n-1}$. Il suit de là que $\rho_{m+k} < \alpha^k \cdot \rho_m$ et par suite

*) Pour abréger, on signifiera dans ce mémoire par ω une quantité qui peut être plus petite que toute quantité donnée.

$$\rho_m + \rho_{m+1} + \dots + \rho_{m+n} < \rho_{m+n}(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n) < \frac{\rho_m}{1-\alpha},$$

donc a plus forte raison

$$\varepsilon_m \rho_m + \varepsilon_{m+1} \rho_{m+1} + \varepsilon_{m+n} \rho_{m+n} < \frac{\rho_m}{1-\alpha}.$$

Or ρ_{m+k} étant $< \alpha^k . \rho_m$ et $\alpha < 1$, il est clair que ρ_m et par conséquent la somme

$$\varepsilon_m \rho_m + \varepsilon_{m+1} \cdot \rho_{m+1} + \dots + \varepsilon_{m+n} \rho_{m+n}$$

aura zéro pour limite. La série ci-dessus est donc convergente.

Théorème III. En désignant par t_0, t_1, t_2, ... t_m une série de quantités quelconques, si $p_m = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_m \dots$ est toujours moindre qu'une quantité déterminée δ, on aura

$$r = \varepsilon_0 t_0 + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \dots + \varepsilon_m t_m < \delta . \varepsilon_0$$

où ε_0, ε_1, ε_2 ... sont des quantités positives décroissantes.

En effet on a

$$t_0 = p_0, \; t_1 = p_1 - p_0, \; t_2 = p_2 - p_1 \text{ etc.}$$

donc $r = \varepsilon_0 p_0 + \varepsilon_1 (p_1 - p_0) + \varepsilon_2 (p_2 - p_1) + \dots + \varepsilon_m (p_m - p_{m-1})$,

ou bien

$$r = p_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + p_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \dots + p_{m-1} (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + p_m \varepsilon_m.$$

Or les différences $\varepsilon_0 - \varepsilon_1$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, ... étant positives, la quantité r sera évidemment moindre que $\delta \varepsilon_0$.

Définition. Une fonction $f(x)$ sera dite *fonction continue* de x entre les limites $x = a$ et $x = b$, si pour une valeur quelconque de x intermédiaire entre ces limites, la quantité $f(x - \beta)$, pour des valeurs toujours décroissantes de β, s'approche indéfiniment de la limite $f(x)$.

Théorème IV. Si la série

$$f(\alpha) = v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \dots + v_m \alpha^m + \dots$$

est convergente pour une certaine valeur δ de α, elle sera aussi convergente pour toute valeur moindre de α, et, pour des valeurs toujours décroissantes de β, la fonction $f(\alpha - \beta)$ s'approche indéfiniment de la limite $f(\alpha)$, supposé que α soit égal ou inférieur à δ.

Soit $$v_0 + v_1 \alpha + \dots + v_{m-1} \alpha^{m-1} = \varphi(\alpha),$$
$$v_m \alpha^m + v_{m+1} \alpha^{m+1} + \text{etc.} \dots = \psi(\alpha),$$

on aura $$\psi(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m . v_m \delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} . v_{m+1} \delta^{m+1} + \text{etc.}$$

donc, d'après le théorème (III), $\psi(\alpha) < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m . p$, p désignant la plus grande

des quantités $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1} + v_{m+2}\delta^{m+2}$ etc. On pourra donc pour toute valeur de α, égale ou inférieure à δ, prendre m assez grand pour qu'on ait

$$\psi(\alpha) = \omega .$$

Or $f(\alpha) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$, donc $f(\alpha) - f(\alpha - \beta) = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha - \beta) + \omega$.

De plus $\varphi(\alpha)$ étant une fonction entière de α, on peut prendre β assez petit pour que

$$\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha - \beta) = \omega;$$

donc de même $\quad f(\alpha) - f(\alpha - \beta) = \omega$,

ce qu'il fallut démontrer.

Théorème V. Soit

$$v_0 + v_1\delta + v_2\delta^2 + \ldots \text{ etc.}$$

une série convergente, dans laquelle v_0, v_1, v_2... sont des fonctions continues d'une même quantité variable x entre les limites $x = a$ et $x = b$, la série

$$f(x) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \ldots$$

où $\alpha < \delta$, sera convergente et fonction continue de x entre les mêmes limites.

Il est déjà démontré que la série $f(x)$ est convergente. Que la fonction $f(x)$ est continue pourra se démontrer comme il suit.

Soit

$$v_0 + v_1\alpha + \ldots + v_{m-1}\alpha^{m-1} = \varphi(x),$$
$$v_m\alpha^m + v_{m+1}\alpha^{m+1} + \ldots\ldots = \psi(x),$$

on aura

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Or

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \cdot v_m\delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} \cdot v_{m+1}\delta^{m+1} + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+2} \cdot v_{m+2}\delta^{m+2} + \text{etc.}$$

donc en désignant par $\theta(x)$ la plus grande des quantités $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m + v_{m+1}\delta^{m+1} + v_{m+2}\delta^{m+2}$ etc. on aura en vertu du théorème (III):

$$\psi(x) < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \cdot \theta(x)$$

Il suit de là qu'on peut prendre m assez grand pour qu'on ait $\psi(x) = \omega$, et que par conséquent aussi

$$f(x) = \varphi(x) + \omega,$$

où ω est moindre que toute quantité assignable.

On a de même

$$f(x-\beta) = \varphi(x-\beta) + \omega,$$

donc $$f(x) - f(x-\beta) = \varphi(x) - \varphi(x-\beta) + \omega.$$

Or par la forme de $\varphi(x)$ il est clair qu'on peut prendre β assez petit pour qu' on ait

$$\varphi(x) - \varphi(x-\beta) = \omega,$$

d'où l'on tire $$f(x) - f(x-\beta) = \omega.$$

Donc la fonction $f(x)$ est continue *).

Théorème VI. Lorsqu'on désigne par ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 etc. ϱ'_0, ϱ'_1, ϱ'_2 etc. les valeurs numériques des membres respectifs des deux séries convergentes

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots = p,$$
$$\text{et } v'_0 + v'_1 + v'_2 + \ldots = p',$$

si les séries

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots$$
$$\varrho'_0 + \varrho'_1 + \varrho_2 + \cdots$$

sont de même convergentes,
la série,

$$r_0 + r_1 + r_2 + \ldots, \text{ dont le terme général est,}$$
$$r_m = v_0 v'_m + v_1 v'_{m-1} + v_2 v'_{m-2} + \ldots + v_m v'_0,$$

sera une nouvelle série convergente, qui aura pour somme,

$$(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots)(v'_0 + v'_1 + v'_2 + \ldots).$$

Démonstration.

En faisant,

$$p_m = v_0 + v_1 + \ldots + v_m,$$
$$p'_m = v'_0 + v'_1 + \ldots + v'_m,$$

on voit aisément que

$$\left.\begin{aligned} r_0 + r_1 + r_2 + \ldots + r_{2m} = p_m \cdot p'_m + (p_0 v'_{2m} + p_1 v'_{2m-1} + \ldots + p_{m-1} v'_{m+1} (=t) \\ + p'_0 v_{2m} + p'_1 v_{2m-1} + \ldots + p'_{m-1} v_{m+1} (=t')) \end{aligned}\right\} (a)$$

---

*) Dans l'ouvrage cité de M. Cauchy on trouve (page 131) le théorème suivant: "Lorsque les différens termes de la série, $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ etc. sont des fonctions d'une "même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est "aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x." Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série,

$$\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 3\varphi - \ldots \text{ etc.}$$

est discontinue pour toute valeur $(2m+1)\pi$ de x, où m est un nombre entier. Il y a, comme on sait, plusieurs séries de cette espèce.

Soit

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots = u,$$
$$\text{et } \rho'_0 + \rho'_1 + \rho'_2 + \ldots = u',$$

il est clair que sans égard au signe on aura,

$$t < u\,(\rho'_{2m} + \rho'_{2m-1} + \ldots + \rho'_{m+1})$$
$$t' < u'(\rho_{2m} + \rho_{2m-1} + \ldots + \rho_{m+1})$$

Or les séries $\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \ldots$, et $\rho'_0 + \rho'_1 + \rho'_2 + \ldots$ étant convergentes, les quantités t et t', pour des valeurs toujours croissantes de m, s'approcheront indéfiniment de la limite zéro. Donc faisant dans l'équation (a) m infini, on aura,

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \text{etc.} = (v_0 + v_1 + v_2 + \text{etc.})\,(v'_0 + v'_1 + v'_2 + \text{etc.})$$

Soient t_0, t_1, t_2, etc., t'_0, t'_1, t'_2 etc. deux séries de quantités positives et négatives, dont les termes généraux s'approchent indéfiniment de zéro, il suit du théorème (II) que les séries,

$t_0 + t_1\alpha + t_2\alpha^2 + \text{etc.}$, et $t'_0 + t'_1\alpha + t'_2\alpha^2 + \text{etc.}$, où α signifie une quantité inférieure à l'unite, doivent être convergentes. Il en sera de même en attribuant à chaque terme sa valeur numérique, donc en vertu du théorème précédent:

$$(t_0 + t_1\alpha + t_2\alpha^2 + \ldots)\,(t'_0 + t'_1\alpha + t'_2\alpha^2 + \ldots) =$$
$$t_0 t'_0 + (t_1 t'_0 + t_0 t'_1)\alpha + (t_2 t'_0 + t_1 t'_1 + t_0 t'_2)\alpha^2 + \text{etc.}$$
$$\ldots + (t_m t'_0 + t_{m-1} t'_1 + t_{m-2} t'_2 + \ldots + t_0 t'_m)\alpha^m + \text{etc.}$$

Maintenant si l'on suppose que les trois séries,

$$t_0 + t_1 + t_2 + \text{etc.}$$
$$t'_0 + t'_1 + t'_2 + \text{etc.}$$
$$t_0 t'_0 + (t_1 t'_0 + t_0 t'_1) + (t_2 t'_0 + t_1 t'_1 + t_0 t'_2) + \text{etc.}$$

soient convergentes, on trouvera en vertu du théorème (IV), en faisant dans l'équation (b) α converger vers l'unite:

$$(t_0 + t_1 + t_2 + \ldots)\,(t'_0 + t'_1 + t'_2 + \ldots) =$$
$$t_0 t'_0 + (t_1 t'_0 + t_0 t'_1) + (t_2 t'_0 + t_1 t'_1 + t_0 t'_2) + \text{etc.}$$

III.

Examinons maintenant la série proposée,

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$

En la désignant par $\varphi(m)$, et faisant pour abréger, $1 = m_0$, $\frac{m}{1} = m_1$, $\frac{m(m-1)}{1.2} = m_2$, et en général $\frac{m.(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{1.2\ldots\mu} = m_\mu$, on aura:

$$1. \quad \varphi(m) = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \ldots + m_\mu x^\mu + \text{etc.}$$

Il s'agit d'abord de trouver les valeurs de m et de x pour lesquelles la série est convergente.

Les quantités m et x pouvant en général aussi être imaginaires, soit
$x = a + b\sqrt{-1}$, $m = k + k'\sqrt{-1}$,
où a, b, k, k' sont des quantités réelles. Substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle prendra la forme

$$\varphi(m) = p + q\sqrt{-1},$$

où p et q sont des séries dont les termes ont des valeurs réelles.
On peut trouver ces séries de la manière suivante:

Soit $$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha, \quad \frac{a}{\alpha} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{\alpha} = \sin\varphi,$$

et l'on aura

$$x = \alpha(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi),$$

où α et φ sont des quantités réelles, et en outre α est positive. Si l'on fait de plus

$$\frac{m-\mu+1}{\mu} = \delta_\mu(\cos\gamma_\mu + \sqrt{-1}\,.\,\sin\gamma_\mu) = \frac{k+k'\sqrt{-1}-\mu+1}{\mu},$$

on trouvera

$$\delta_\mu = \left[\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}; \quad \cos\gamma_\mu = \frac{k-\mu+1}{\mu\delta_\mu}; \quad \sin\gamma_\mu = \frac{k'}{\mu\delta_\mu}.$$

Si dans l'expression

$$\frac{m-\mu+1}{\mu} = \delta_\mu(\cos\gamma_\mu + \sqrt{-1}\,.\,\sin\gamma_\mu),$$

on fait successivement μ égal à 1, 2, 3, ... μ, on obtiendra μ équations qui étant multipliées terme à terme donneront

$$m_\mu = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,\mu} =$$
$$\delta_1\,.\,\delta_2\,.\,\delta_3\ldots\delta_\mu\left(\cos(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_\mu)+\sqrt{-1}\,.\,\sin(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_\mu)\right)$$

On tire de là, en multipliant par

$$x^\mu = \alpha^\mu(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,.\,\sin\varphi)^\mu = \alpha^\mu(\cos\mu\varphi+\sqrt{-1}\,.\,\sin\mu\varphi),$$
$$m_\mu x^\mu = \alpha^\mu\,.\,\delta_1\,.\,\delta_2\,.\,\delta_3\ldots\delta_\mu\left(\cos(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_\mu)+\sqrt{-1}\,.\,\sin(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_\mu)\right);$$

ou bien en faisant pour abréger

$$\delta_1\,.\,\delta_2\,.\,\delta_3\ldots\delta_\mu = \lambda_\mu, \quad \mu\varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots\gamma_\mu = \theta_\mu:$$
$$m_\mu\,.\,x^\mu = \lambda_\mu\,.\,\alpha^\mu(\cos\theta_\mu + \sqrt{-1}\,.\,\sin\theta_\mu).$$

L'expression (1) se change par là en celle-ci,

$$\varphi(m) = 1 + \lambda_1\alpha(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\,.\,\sin\theta_1) + \lambda_2\alpha^2(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\,.\,\sin\theta_2) + \dots$$
$$+ \lambda_\mu\alpha^\mu(\cos\theta_\mu + \sqrt{-1}\,.\,\sin\theta_\mu) + \dots$$

ou en celle-ci,

$$\varphi(m) = 1 + \lambda_1\alpha\,.\,\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\,.\,\cos\theta_2 + \dots + \lambda_\mu\alpha^\mu\,.\,\cos\theta_\mu + \dots \text{etc.}$$
$$+ \sqrt{-1}\,(\lambda_1\alpha\,.\,\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\,.\,\sin\theta_2 + \dots + \lambda_\mu\alpha^\mu\,.\,\sin\theta_\mu + \dots \text{etc.})$$

On a donc

$$2.\quad \begin{cases} p = 1 + \lambda_1\alpha\,.\,\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\,.\,\cos\theta_2 + \dots + \lambda_\mu\alpha^\mu\,.\,\cos\theta_\mu + \dots \\ q = \quad\lambda_1\alpha\,.\,\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha_2\,.\,\sin\theta_2 + \dots + \lambda_\mu\alpha^\mu\,.\,\sin\theta_\mu + \dots \end{cases}$$

Or je dis que ces séries seront *divergentes* ou *convergentes* selon que α est supérieur ou inférieur à l'unité.

De l'expression pour λ_μ on tire $\lambda_{\mu+1} = \delta_{\mu+1}\,.\,\lambda_\mu$, donc

$$\lambda_{\mu+1}\,.\,\alpha^{\mu+1} = \alpha\delta_{\mu+1}\,.\,\lambda_\mu\alpha^\mu,$$

et

$$\frac{\lambda_{\mu+1}\,.\,\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\alpha^\mu} = \alpha\delta_{\mu+1},$$

mais

$$\delta_{\mu+1} = \left[\left(\frac{k-\mu}{\mu+1}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu+1}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

donc pour des valeurs toujours croissantes de μ, δ_μ s'approchera de la limite 1, et par suite $\frac{\lambda_{\mu+1}\,.\,\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\,.\,\alpha^\mu}$ de la limite α.

Donc en vertu des théorèmes (I) et (II) du paragraphe précédent les séries p et q seront divergentes ou convergentes suivant que α est supérieur ou inférieur à l'unité. Il est donc de même de la série proposée $\varphi(m)$.

Le cas où $\alpha = 1$, sera traité plus bas.

Comme la série $\varphi(m)$ est convergente pour toute valeur de α inférieure à l'unité, sa somme sera une certaine fonction de m et de x. On peut, comme il suit, établir une propriété de cette fonction à l'aide de laquelle on peut la trouver: On a

$$\varphi(m) = m_0 + m_1x + m_2x^2 + \dots + m_\mu x^\mu + \text{etc.}$$
$$\varphi(n) = n_0 + n_1x + n_2x^2 + \dots + n_\mu x^\mu + \text{etc.}$$

où n_μ désigne la valeur de m_μ pour $m = n$. On en conclut suivant le théorème VI:

$$\varphi(m).\varphi(n) = t_0 t'_0 + (t_0 t'_1 + t_1 t'_0) + (t_0 t'_2 + t_1 t'_1 + t_2 t'_0) + \text{etc.}$$
$$+ (t_0 t'_\mu + t_1 t'_{\mu-1} + t_2 t'_{\mu-2} + \ldots + t_\mu t'_0) + \text{etc.}$$

où $t_\mu = m_\mu x^\mu$, $t'_\mu = n_\mu x^\mu$, supposé que la série du second membre soit convergente. En substituant les valeurs de t_μ et t'_μ on aura:

$$\varphi(m).\varphi(n) = m_0 n_0 + (m_0 n_1 + m_1 n_0) x + (m_0 n_2 + m_1 n_1 + m_2 n_0) x_2 + \ldots$$
$$+ (m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + m_2 n_{\mu-2} + \ldots\ldots + m_\mu n_0) x^\mu + \ldots$$

Or d'après une propriété connue de la fonction m_μ on a

$$(m+n)_\mu = m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + m_2 n_{\mu-2} + \ldots + m_\mu n_0,$$

$(m+n)_\mu$ désignant la valeur de m_μ lorsqu'on y substitue $m+n$ pour m. On aura donc par substitution:

$$\varphi(m).\varphi(n) = (m+n)_0 + (m+n)_1 x + (m+n)_2 x^2 + \ldots + (m+n)_\mu x^\mu + \text{etc.}$$

Or d'après ce qui précède, le second membre de cette équation est une série convergente et précicément la même chose que $\varphi(m+n)$; donc

$$3) \qquad \varphi(m).\varphi(n) = \varphi(m+n).$$

Cette équation exprime une propriété fondamentale de la fonction $\varphi(m)$. De cette propriété nous déduirons une expression de la fonction sous forme finie à l'aide des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires.

Comme on a vu plus haut, la fonction $\varphi(m)$ est de la forme $p + q\sqrt{-1}$, p et q étant toujours réels et fonctions des quantités k, k', α et φ, et $m = k + k'\sqrt{-1}$, $x = \alpha(\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi)$. Soit

$$p + q\sqrt{-1} = r(\cos s + \sqrt{-1}.\sin s),$$

et l'on trouvera

$$(p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} = r,\ \frac{p}{r} = \cos s,\ \frac{q}{r} = \sin s,$$

r étant toujours positif et s une quantité réelle. Soit

$$r = f(k, k'),\ s = \psi(k, k'),\ \text{et l'on aura,}$$

$$3')\quad p + q\sqrt{-1} = \varphi(k + k'\sqrt{-1}) = f(k,k')(\cos\psi(k,k') + \sqrt{-1}\sin\psi(k,k')).$$

On tire de la en mettant successivement l, l' et $k+l$, $k'+l'$ à la place de k et k':

$$\varphi(l + l'\sqrt{-1}) = f(l,l')(\cos\psi(l,l') + \sqrt{-1}\ \sin\ \psi(l,l')),$$
$$\varphi(k+l+(k'+l')\sqrt{-1}) = f(k+l,k'+l')(\cos\psi(k+l,k'+l') + \sqrt{-1}.\sin\psi(k+l,k'+l')).$$

Or en vertu de l'équation $\varphi(m).\varphi(n) = \varphi(m+n)$, on a,

$$\varphi(k+l+(k'+l')\sqrt{-1}) = \varphi(k+k'\sqrt{-1}).\varphi(l+l'\sqrt{-1}),$$

en faisant $m = k + k'\sqrt{-1}$, $n = l + l'\sqrt{-1}$. Donc en substituant, on obtient,

$$f(k+l,k'+l')\left[\cos\psi(k+l,k'+l')+\sqrt{-1}\,.\sin\psi(k+l,k'+l')\right]=$$
$$f(k,k').f(l,l')\left[\cos\left(\psi(k,k')+\psi(l,l')\right)+\sqrt{-1}\,.\sin\left(\psi(k,k')+\psi(l,l')\right)\right].$$

Cette équation donne, lorsqu'on sépare les termes réels des termes imaginaires:

$$f(k+l,k'+l').\cos\psi(k+l,k'+l')=f(k,k').f(l,l').\cos\left(\psi(k,k')+\psi(l,l')\right),$$
$$f(k+l,k'+l').\sin\psi(k+l.k'+l')=f(k,k').f(l,l').\sin\left(\psi(k,k')+\psi(l,l')\right).$$

En carrant et ajoutant ces équations membre à membre on aura:

$$\left(f(k+l,k'+l')\right)^2=\left(f(k,k').f(l,l')\right)^2,$$

et de là

$$4)\qquad f(k+l.k'+l')=f(k,k').f(l,l').$$

En vertu de cette équation les précédentes se transforment en celles-ci:

$$\cos\psi(k+l,k'+l')=\cos\left(\psi(k,k')+\psi(l,l')\right)$$
$$\sin\psi(k+l,k'+l')=\sin\left(\psi(k,k')+\psi(l,l')\right)$$

d'où l'on tire,

$$5)\qquad \psi(k+l,k'+l')=2m\pi+\psi(k,k')+\psi(l,l'),$$

m étant un nombre entier positif ou négatif.

Maintenant il s'agit de trouver les fonctions $f(k,k')$ et $\psi(k,k')$ des équations (4) et (5).

D'abord je dis qu'elles sont des fonctions continues de k et k' entre des limites quelconques de ces variables. En effet d'après le théorème (V) p et q sont évidemment des fonctions continues.

Or on a,

$$f(k,k')=(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}};\ \cos\psi(k,k')=\frac{p}{f(k,k')};\ \sin\psi(k,k')=\frac{q}{f(k,k')};$$

donc $f(k,k')$ de même que $\cos\psi(k,k')$ et $\sin\psi(k,k')$ est une fonction continue. On peut donc supposer que $\psi(k,k')$ est aussi une fonction continue. Nous allons d'abord examiner l'équation (5). Or $\psi(k,k')$ étant une fonction continue, il faut que m pour toutes les valeurs de k, k', l, l' ait la même valeur. Faisant donc successivement $l=0$, $k=0$, on obtient,

$$\psi(k,k'+l')=2m\pi+\psi(k,k')+\psi(0,l'),$$
$$\psi(l,k'+l')=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(l,l').$$

En éliminant de ces équations et l'équation (5) les deux quantités $\psi(k,k')$ et $\psi(l,l')$, on trouvera,

$$\psi(k,k'+l')+\psi(l,k'+l')=2m\pi+\psi(0,k')+\psi(0,l')+\psi(k+l,k'+l').$$

Soit pour abréger

$$6)\quad \begin{cases}\psi(k, k' + l') = \theta(k),\\ 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l') = a,\end{cases}$$

on aura,

$$7)\qquad \theta(k) + \theta(l) = a + \theta(k + l)$$

Faisant ici successivement $l = k, 2k, \ldots \varrho k$, on aura,

$$2\theta(k) = a + \theta(2k),$$
$$\theta(k) + \theta(2k) = a + \theta(3k),$$
$$\theta(k) + \theta(3k) = a + \theta(4k),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\theta(k) + \theta(\varrho\text{-}1)k = a + \theta(\varrho k).$$

En ajoutant ces équations on trouve,

$$7')\qquad \varrho\theta(k) = (\varrho - 1)a + \theta(\varrho k).$$

On en tire en faisant $k = 1$,

$$\theta(\varrho) = \varrho(\theta(1) - a) + a,$$

ou bien en faisant $\theta(1) - a = c$,

$$8)\qquad \theta(\varrho) = c \cdot \varrho + a.$$

Voilà donc la valeur de la fonction $\theta(k)$, lorsque k est un nombre entier. Mais la fonction $\theta(k)$ aura la même forme pour toute valeur de k, ce qu'on peut démontrer aisément comme il suit:

Si l'on pose dans l'équation (7') $k = \frac{\mu}{\varrho}$, où μ est un nombre entier, on en tire $\varrho \cdot \theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right) = (\varrho - 1)\, a + \theta(\mu)$. Or en vertu de l'équation (8)

$$\theta(\mu) = c\mu + a.$$

Donc en substituant et divisant par ϱ on trouve,

$$\theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right) = c \cdot \left(\frac{\mu}{\varrho}\right) + a.$$

L'équation (8) a donc lieu pour toute valeur positive et rationnelle de ϱ. Soit $l = -k$, l'équation (7) deviendra,

$$\theta(k) + \theta(-k) = a + \theta(0).$$

Il suit de là en posant $k = 0$,

$$\theta(0) = a, \text{ et par conséquent } \theta(-k) = 2a - \theta(k).$$

Or k étant rationnel et positif on a $\theta(k) = ck + a$, donc,

$$\theta(-k) = -ck + a.$$

L'équation,

$$9)\qquad \theta(k) = ck + a,$$

a donc lieu pour toute valeur rationnelle de k et par conséquent, puisque $\theta(k)$ est une fonction continue, pour toute valeur réelle de k.

Or $\theta(k) = \psi(k, k' + l')$, et $a = 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l')$; faisant donc $c = \theta(k', l')$, on obtient

$$10)\qquad \psi(k, k' + l') = \theta(k', l') \,.\, k + 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l').$$

On tire de là en faisant $k = 0$,

$$\psi(0, k' + l') = 2m\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l').$$

Cette équation étant de la même forme que l'équation (7), elle donnera de la même manière:

$$\psi(0, k') = \beta' \,.\, k' - 2m\pi,$$

où β' est une quantité indépendante de k'.

Mettant l' à la place de k', on obtient $\psi(0, l') = -2m\pi + \beta' l'$.

Substituant ces valeurs de $\psi(0, k')$ et de $\psi(0, l')$ dans l'équation (10) on en tirera

$$\psi(k, k' + l') = \theta(k', l') \,.\, k + \beta'(k' + l') - 2m\pi.$$

On voit par là que $\theta(k', l')$ est une fonction de $k' + l'$. En la désignant par $F(k' + l')$, on aura

$$\psi(k, k' + l') = F(k' + l') \,.\, k + \beta'(k' + l') - 2m\pi,$$

et par conséquent en faisant $l' = 0$,

$$\psi(k, k') = F(k') \,.\, k + \beta' k' - 2m\pi.$$

En remarquant que

$$\psi(k, k' + l') = 2m\pi + \psi(k, k') + \psi(0, l'),$$

$$\psi(0, l') = \beta' l' - 2m\pi,$$

l'équation précédente donne,

$$F(k' + l')\, k + \beta'(k' + l') - 2m\pi = 2m\pi + F(k') \,.\, k + \beta' k' - 2m\pi + \beta' l' - 2m\pi.$$

C'est-à-dire:

$$F(k' + l') = F(k').$$

Donc faisant $k' = 0$, on obtient $F(l') = F(0) = \beta = F(k')$. Par suite la valeur de $\psi(k, k')$ prend la forme,

$$11)\qquad \psi(k, k') = \beta \,.\, k + \beta' k' - 2m\pi,$$

β et β' étant deux constantes. Cette valeur de $\psi(k, k')$ satisfera à l'équation (5) dans toute sa généralité comme il est aisé de voir.

Maintenant nous allons examiner l'équation,

$$f(k + l, k' + l') = f(k, k') \,.\, f(l, l').$$

$f(k, k')$ étant toujours une quantité positive, on peut poser:

$$f(k, k') = e^{F(k, k')},$$

où $F(k, k')$ signifie une fonction réelle continue de k et k'.

En substituant et prenant les logarithmes des deux membres, on trouvera,

$$F(k + l, k' + l') = F(k, k') + F(l, l').$$

Comme cette équation coincide avec l'équation (5) en mettant F à la place de ψ, et 0 à la place de m, elle donnera en vertu de l'équation (11):

$$12) \qquad F(k, k') = \delta k + \delta' k',$$

où δ et δ' de même que β et β' sont deux quantités indépendantes de k et de k'. La fonction $f(k, k')$ prendra donc la forme,

$$f(k, k') = e^{\delta k + \delta' k'}.$$

Les fonctions $\psi(k, k')$ et $f(k, k')$ étant trouvées de cette manière, on aura d'après l'équation (3'),

$$13) \quad \varphi(k + k'\sqrt{-1}) = e^{\delta k + \delta' k'}(\cos(\beta k + \beta' k') + \sqrt{-1} . \sin(\beta k + \beta' k')),$$

où il reste encore à trouver les quantités δ, δ', β, β', qui ne peuvent être que des fonctions de α et de φ.

On a

$$\varphi(k + k'\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1},$$

où p et q sont donnés par les équations (2). En séparant les quantités réelles des imaginaires, on aura:

$$14)\begin{cases} e^{\delta k + \delta' k'} \cos(\beta k + \beta' k') = 1 + \lambda_1 \alpha . \cos\theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 . \cos\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu \alpha^\mu . \cos\theta_\mu + \text{etc.} \\ e^{\delta k + \delta' k'} \sin(\beta k + \beta' k') = \lambda_1 \alpha . \sin\theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 . \sin\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu \alpha^\mu . \sin\theta_\mu + \text{etc.} \end{cases}$$

Nous allons d'abord considérer le cas où m est réel, c'est-à-dire où $k' = 0$. Alors les expressions (14) prennent la forme,

$$15)\begin{cases} e^{\delta k} \cos\beta k = 1 + \frac{k}{1}\alpha\cos\varphi + \frac{k.(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos 3\varphi + \text{etc.} = f(\alpha) \\ e^{\delta k} \sin\beta k = \frac{k}{1}\alpha\sin\varphi + \frac{k.(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi + \text{etc.} = \theta(\alpha). \end{cases}$$

Pour trouver δ et β, soit $k = 1$, et l'on aura:

$$e^\delta . \cos\beta = 1 + \alpha . \cos\varphi; \; e^\delta . \sin\beta = \alpha . \sin\varphi.$$

On tire de là,

$$e^\delta = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\beta = \frac{1 + \alpha\cos\varphi}{(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}, \; \sin\beta = \frac{\alpha . \sin\varphi}{(1 + \alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\tang\beta = \frac{\alpha\sin\varphi}{1 + \alpha\cos\varphi}.$$

Cette dernière équation donne, en désignant par s la plus petite de toutes les valeurs de β qui y satisfait, et qui est toujours renfermée entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$,

$$\beta = s + \mu\pi,$$

μ étant un nombre entier positif ou négatif.

Par là les équations (15) se changent en celles-ci:

$$f(\alpha) = e^{\delta k} \cos k(s + \mu\pi) = e^{\delta k} \cos ks \cdot \cos k\mu\pi - e^{\delta k} \sin ks \cdot \sin k\mu\pi,$$
$$\theta(\alpha) = e^{\delta k} \sin k(s + \mu\pi) = e^{\delta k} \sin ks \cdot \cos k\mu\pi + e^{\delta k} \cos ks \cdot \sin k\mu\pi.$$

De ces équations on tire,

$$\cos k\mu\pi = e^{-\delta k} (f(\alpha) \cdot \cos ks + \theta(\alpha) \cdot \sin ks),$$
$$\sin k\mu\pi = e^{-\delta k} (\theta(\alpha) \cdot \cos ks - f(\alpha) \cdot \sin ks).$$

Or, d'après le théorème (IV), $\theta(\alpha)$ et $f(\alpha)$ sont des fonctions continues de α; il faut donc que $\cos k\mu\pi$ et $\sin k\mu\pi$ conservent les mêmes valeurs pour toute valeur de α. Il suffit donc pour les trouver, d'attribuer une valeur quelconque à α. Soit $\alpha = 0$, et l'on aura, en remarquant qu'alors $e^{\delta} = 1$, $f(\alpha) = 1$, $\theta(\alpha) = 0$, $s = 0$,

$$\cos k\mu\pi = 1, \quad \sin k\mu\pi = 0.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions de $f(\alpha)$ et $\theta(\alpha)$ et se rappelant que $e^{\delta} = (1 + 2\alpha \cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$, on obtiendra:

$$f(\alpha) = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{k}{2}} \cdot \cos ks, \quad \theta(\alpha) = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{k}{2}} \sin ks.$$

Donc enfin les expressions (15) deviendront:

$$16)\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{k}{1}\alpha\cos\varphi + \frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\cos 3\varphi + \text{etc.} = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{k}{2}} \cdot \cos ks, \\ \frac{k}{1}\alpha\sin\varphi + \frac{k(k-1)}{1.2}\alpha^2\sin 2\varphi + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3\sin 3\varphi + \text{etc.} = (1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)^{\frac{k}{2}} \cdot \sin ks. \end{array}\right.$$

s étant renfermé entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et satisfaisant à l'équation

$$\text{tang}\, s = \frac{\alpha \cdot \sin\varphi}{1 + \alpha \cdot \cos\varphi}.$$

Les expressions (16) sont établies les premières par M. Cauchy dans l'ouvrage cité plus haut.

La quantité α est ici supposée moindre que l'unité. On verra plus bas que α peut aussi être égal à l'unité, lorsqu'on donne à la quantité k une valeur convenable.

Dans ce qui précède nous avons trouvé les quantités δ et β. Maintenant nous allons montrer comment on peut trouver les deux autres quantités inconnues δ' et β'. Faisant pour cet effet dans les équations (14) $k=0$ et $k'=n$, on obtiendra:

$$e^{\delta' n}\cos(\beta' n)=1+\lambda_1\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\theta_2+\dots \text{etc.}$$
$$e^{\delta' n}\sin(\beta' n)=\lambda_1\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\theta_2+\dots \text{etc.}$$

où $\lambda_\mu=\delta_1.\delta_2.\delta_3\dots\delta_\mu$, $\theta_\mu=\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_\mu$, δ_μ et γ_μ étant déterminés par les équations

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{n}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\quad \cos\gamma_\mu=-\frac{\mu-1}{\mu\delta_\mu},\quad \sin\gamma_\mu=\frac{n}{\mu\delta_\mu}.$$

De ces équations on déduit les suivantes:

$$\frac{e^{\delta' n}\cos(\beta' n)-1}{n}=\frac{\lambda_1}{n}.\alpha\cos\theta_1+\frac{\lambda_2}{n}\alpha^2\cos\theta_2+\dots$$
$$\frac{e^{\delta' n}\sin(\beta' n)}{n}=\frac{\lambda_1}{n}.\alpha\sin\theta_1+\frac{\lambda_2}{n}\alpha^2\sin\theta_2+\dots$$

Or en supposant n positif on a, $\lambda_1=\delta_1=n$, donc $\frac{\lambda_\mu}{n}=\delta_2.\delta_3\dots\delta_\mu$, et par suite

$$\frac{e^{\delta' n}\cos(\beta' n)-1}{n}=\alpha\cos\theta_1+\delta_2\alpha^2\cos\theta_2+\delta_2\delta_3\alpha^3\cos\theta_3+\dots$$
$$\frac{e^{\delta' n}\sin(\beta' n)}{n}=\alpha\sin\theta_1+\delta_2\alpha^2\sin\theta_2+\delta_2\delta_3\alpha^3\sin\theta_3+\dots$$

Ces séries sont convergentes pour toute valeur de n, zéro y compris, ce qu'on voit aisément par le théorème (II). En faisant donc n converger vers la limite zéro, et remarquant que les séries d'après le théorème (V) sont des fonctions continues, on obtiendra:

$$\delta'=\alpha\cos\theta'_1+\delta'_2\alpha^2\cos\theta'_2+\delta'_2\delta'_3\alpha^3\cos\theta'_3+\dots,$$
$$\beta'=\alpha\sin\theta'_1+\delta'_2\alpha^2\sin\theta'_2+\delta'_2\delta'_3\alpha^3\sin\theta'_3+\dots,$$

où δ' et β' sont les limites des quantités $\frac{e^{\delta' n}\cos(\beta' n)-1}{n}$ et $\frac{e^{\delta' n}\sin(\beta' n)}{n}$; θ'_μ est la limite de θ_μ et δ'_μ celle de δ_μ. Or d'après l'expression de δ_μ on a $\delta'_\mu=\frac{\mu-1}{\mu}$; donc $\cos\gamma_\mu=-1$; $\sin\gamma_\mu=0$ (lorsque $\mu>1$), donc

$$\cos(\theta'_\mu)=\cos(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_\mu)=+\sin(\mu\varphi).(-1)^\mu,$$
$$\sin(\theta'_\mu)=\sin(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_\mu)=-\cos(\mu\varphi).(-1)^\mu,$$

où il faut se rappeler qu'en vertu de l'équation

$$n\sqrt{-1}=\delta_1(\cos\gamma_1+\sqrt{-1}\sin\gamma_1),$$

on a $\cos\gamma_1=0$, $\sin\gamma_1=1$. Donc les valeurs de β' et δ' seront celles-ci:

$$\beta' = \alpha \,.\, \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \,.\, \cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \,.\, \cos 3\varphi - \ldots$$
$$\delta' = -(\alpha \,.\, \sin\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \,.\, \sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \,.\, \sin 3\varphi - \ldots$$

De cette manière on a trouvé les quantités β' et δ' par des séries infinies. On peut aussi les exprimer en forme finie. Car on tire de l'équation (15):

$$\frac{e^{\delta k} \,.\, \cos\beta k - 1}{k} = \alpha \,.\, \cos\varphi + \frac{k-1}{1.2}\alpha^2 \,.\, \cos 2\varphi + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3 \,.\, \cos 3\varphi + \ldots$$
$$\frac{e^{\delta k} \,.\, \sin\beta k}{k} = \alpha \,.\, \sin\varphi + \frac{k-1}{1.2}\alpha^2 \,.\, \sin 2\varphi + \frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3}\alpha^3 \,.\, \sin 3\varphi + \ldots$$

Il suit de là en faisant k converger vers zéro:

$$17)\ \begin{cases} \delta = \alpha \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \,.\, \cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \cos 3\varphi - \text{etc.} \\ \beta = \alpha \sin\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \,.\, \sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \sin 3\varphi - \text{etc.} \end{cases}$$

donc $\beta' = \delta$, $\delta' = -\beta$.

Donc les expressions (14) prennent la forme

$$18)\ \begin{cases} 1 + \lambda_1\alpha\cos\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\cos\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu + \ldots = e^{\delta k - \beta k'}\cos(\beta k + \delta k') = p, \\ \quad \lambda_1\alpha\sin\theta_1 + \lambda_2\alpha^2\sin\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu + \ldots = e^{\delta k - \beta k'}\sin(\beta k + \delta k') = q, \end{cases}$$

où $\delta = \frac{1}{2}\log(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2)$, $\beta = \text{arc tang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right)$; or la somme de la série proposée étant $= p + q\sqrt{-1}$, on aura

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-\mu+1)}{1.2\ldots\mu} \,.\, x^\mu + \ldots$$
$$= e^{\delta k - \beta k'}\left(\cos(\beta k + \delta k') + \sqrt{-1} \,.\, \sin(\beta k + \delta k')\right),$$

où l'on a $m = k + k'\sqrt{-1}$, $x = \alpha(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = a + b\sqrt{-1}$; donc $\alpha = \sqrt{(a^2+b^2)}$, $\alpha\cos\varphi = a$, $\alpha\sin\varphi = b$, $\delta = \frac{1}{2}\log(1+2a+a^2+b^2) = \frac{1}{2}\log((1+a)^2+b^2)$, $\beta = \text{arc tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)$. Substituant et écrivant m pour k et n pour k', l'expression ci-dessus prend la forme:

$$19)\ \begin{cases} 1 + \frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(a+b\sqrt{-1}) + \frac{(m+n\sqrt{-1})(m+n\sqrt{-1}-1)}{1\,.\,2}(a+b\sqrt{-1})^2 \\ \quad + \frac{(m+n\sqrt{-1})(m+n\sqrt{-1}-1)(m-2+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2\,.\,3}(a+b\sqrt{-1})^3 + \ldots \\ \ldots + \frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})(m-2+n\sqrt{-1})\ldots(m-\mu+1+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\mu}(a+b\sqrt{-1})^\mu + \text{etc.} \\ \quad = ((1+a)^2+b^2)^{\frac{m}{2}} \,.\, e^{-n\,.\,\text{arc tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)}\left[\cos\left(m\,.\,\text{arc tang}\left(\frac{b}{1+a}\right) + \tfrac{1}{2}n\log((1+a)^2+b^2)\right)\right. \\ \qquad \left. + \sqrt{-1} \,.\, \sin\left(m\,.\,\text{arc tang}\left(\frac{b}{1+a}\right) + \tfrac{1}{2}n\log((1+a)^2+b^2)\right)\right]. \end{cases}$$

Cette expression, comme nous avons vu, de même que l'expression (18) a lieu pour toute valeur de $\alpha = \sqrt{(a^2+b^2)}$, inférieure à l'unité.

En faisant p. ex. $b=0$, $n=0$, on a l'expression

$$20)\quad 1+\frac{m}{1}a+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,.\,a^2+\ldots=(1+a)^m$$

de laquelle nous tirerons parti ci-après.

IV.

Dans ce qui précède on a trouvé la somme de la série proposée toutes les fois que $\alpha=\sqrt{(a^2+b^2)}$ est inférieur à l'unité. Il reste encore à examiner le cas où cette quantité est égale à 1.

Nous avons vu par le théorème (IV) que lorsque α s'approche indéfiniment de l'unité, la série

$$v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\ldots$$

s'approchera en même temps de la limite $v_0+v_1+v_2+\ldots$ supposé que cette dernière série soit convergente. En faisant donc dans les expressions (18) α converger vers l'unité, on aura

$$21)\quad\begin{cases}1+\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos\theta_2+\ldots+\lambda_\mu\cos\theta_\mu+\ldots=e^{\delta_,k-\beta_,k'}\cos(\beta_,k+\delta_,k'),\\ \quad\lambda_1\sin\theta_1+\lambda_2\sin\theta_2+\ldots+\lambda_\mu\sin\theta_\mu+\ldots=e^{\delta_,k-\beta_,k'}\sin(\beta_,k+\delta_,k'),\end{cases}$$

où $\delta_,$ et $\beta_,$ sont les limites des quantités δ et β, supposé que les séries, contenues dans ces équations, soient convergentes. Or il est clair que $\frac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi)$ est la limite de δ, et que

$$\text{arc tang}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)=\text{arc tang}\,\frac{2.\cos\frac{1}{2}\varphi.\sin\frac{1}{2}\varphi}{2(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2}=\text{arc tang}\,(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)$$

est celle de β; on a donc

$$22)\quad\delta_,=\tfrac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi),\quad\beta_,=\text{arc tang}\,(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Il reste donc seulement à examiner les cas où les séries sont convergentes. Pour cet effet il faut distinguer trois cas: lorsque $k=-1$, ou compris entre -1 et $-\infty$; lorsque k est compris entre 0 et $+\infty$, et lorsque k est compris entre 0 et -1.

Premier cas, lorsque k est égal à -1 ou compris entre -1 et $-\infty$. On a

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Faisant donc $k=-1-n$, on aura

$$\delta_\mu=\left[\left(\frac{n+\mu}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

d'où l'on voit que δ_μ est toujours supérieur à l'unité.

Or on a $\lambda_\mu=\delta_1.\delta_2.\delta_3\ldots\delta_\mu$, donc pour des valeurs toujours croissantes de

μ, λ_μ ne convergera pas vers zéro, donc en vertu du théorème (1) les séries (21) sont divergentes.

Deuxième cas, lorsque k est positif.

Supposons que c soit une quantité positive inférieure à k, on aura

$$(\mu-k-1+c)^2=(\mu-k-1)^2+2c(\mu-k-1)+c^2,$$

donc

$$(\mu-k-1)^2+k'^2=(\mu-k-1+c)^2+k'^2-c^2-2c(\mu-k-1).$$

Si l'on fait $\quad \mu > k+1-\frac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c}$

il en suit que $k'^2-c^2-2c(\mu-k-1)$ est négatif, et par conséquent

$$(\mu-k-1)^2+k'^2<(\mu-k-1+c)^2,\quad \text{c'est-à-dire}$$

$$\delta_\mu<\frac{\mu-k-1+c}{\mu},\quad \delta_\mu<1-\frac{1+k-c}{\mu}.$$

Si dans l'équation (20) on fait $a=\frac{1}{\mu}$, $m=-n$, on aura

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-n}=1-\frac{n}{\mu}+\frac{n(1+n)}{1.2}\cdot\frac{1}{\mu^2}-\text{etc.}=1-\frac{n}{\mu}+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{\mu^2}\left(1-\frac{2+n}{3\mu}\right)+\text{etc.}$$

Donc en faisant $n=1+k-c$, on voit aisément que

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-1-k+c}>1-\frac{1+k-c}{\mu}.$$

Il suit de la que,

$$\delta_\mu<\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+k-c},\ \text{où}\ \mu>k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c}\,(=\varrho),$$

donc

$$\delta_{\varrho+\mu}<\left(\frac{\varrho+\mu}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c},\ \text{où}\ \mu>0.$$

En posant successivement $\mu=0, 1, 2, 3\ldots\mu$, et faisant le produit des résultats, on obtiendra:

$$\delta_{\varrho+1}\cdot\delta_{\varrho+2}\ldots\delta_{\varrho+\mu}<\left(\frac{\varrho+1}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c},$$

or $\quad \lambda_{\mu+\varrho}=\delta_1\cdot\delta_2\cdot\delta_3\ldots\delta_{\mu+\varrho}$, donc $\lambda_{\mu+\varrho}<\delta_1\cdot\delta_2\ldots\delta_\varrho\cdot\left(\frac{\varrho+1}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c}$,

par conséquent lorsqu'on fait $\mu=0, 1, 2\ldots\mu$,

$$\lambda_\varrho+\lambda_{\varrho+1}+\ldots+\lambda_{\varrho+\mu}<\delta_1.\varrho_2\ldots\delta_\varrho.(\varrho+1)^{1+k-c}\left(\frac{1}{(\varrho+1)^{1+k-c}}+\frac{1}{(\varrho+2)^{1+k-c}}+\ldots+\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}\right).$$

Si maintenant dans l'expression (20) on fait $a=-\frac{1}{\varrho+\mu+1}$, $m=-k+c$, on aura

$$\left(1-\frac{1}{\varrho+\mu+1}\right)^{c-k}=1+\frac{k-c}{\varrho+\mu+1}+\frac{(k-c)(k-c+1)}{1.2(\varrho+\mu+1)^2}+\text{etc.}$$ donc en se rappelant que $k>c$:

$$\left(\frac{\rho+\mu}{\rho+\mu+1}\right)^{c-k} > 1 + \frac{k-c}{\rho+\mu+1}.$$

Il suit de là, en divisant par $(k-c)\,(\rho+\mu+1)^{k-c}$:

$$\frac{1}{(\rho+\mu+1)^{1+k-c}} < \frac{1}{(k-c)}\left(\frac{1}{(\rho+\mu)^{k-c}} - \frac{1}{(\rho+\mu+1)^{k-c}}\right)$$

Cela donne, en faisant $\mu = 0, 1, 2 \ldots \mu$, et ajoutant:

$$\frac{1}{(\rho+1)^{1+k-c}} + \frac{1}{(\rho+2)^{1+k-c}} + \ldots + \frac{1}{(\rho+\mu+1)^{1+k-c}} < \frac{1}{k-c}\left(\frac{1}{\rho^{k-c}} - \frac{1}{(\rho+\mu+1)^{k-c}}\right) < \frac{1}{k-c} \cdot \frac{1}{\rho^{k-c}}.$$

Il suit de là que

$$\lambda_\varrho + \lambda_{\varrho+1} + \ldots + \lambda_{\varrho+\mu} < \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3 \ldots \delta_\varrho \frac{(\rho+1)^{1+k-c}}{(k-c)\rho^{k-c}},$$

pour toute valeur de μ. Donc la série $1 + \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$, dont tous les termes sont positifs, est convergente, et par conséquent d'après le théorème (II) les séries

$$1 + \lambda_1 \cos\theta_1 + \lambda_2 \cos\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu \cos\theta_\mu + \ldots$$
$$\lambda_1 \sin\theta_1 + \lambda_2 \sin\theta_2 + \ldots + \lambda_\mu \sin\theta_\mu + \ldots$$

seront de même convergentes.

Troisième cas, lorsque k est égal à zéro ou compris entre zéro et -1.

Dans ce cas les séries ci-dessus seront convergentes pour toute valeur de k, pourvu que φ ne soit égal à $(2n+1)\pi$.

Cela peut se démontrer comme suit:

Soit

$m = k + k'\sqrt{-1}$, $x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi$, et $1 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots + m_n x^n = p_n$

En multipliant par $1+x$ on obtient,

$1 + (m_1+1)x + (m_2+m_1)x^2 + (m_3+m_2)x^3 + \ldots + (m_n+m_{n-1})x^n + m_n x^{n+1} = p_n(1+x)$.

Or on sait que $m_1 + 1 = (m+1)_1$, $(m_2+m_1) = (m+1)_2 \ldots (m_n+m_{n-1}) = (m+1)_n$, donc en substituant:

$$1 + (m+1)_1 x + (m+1)_2 x^2 + \ldots + (m+1)_n x^n = -m_n x^{n+1} + p_n(1+x).$$

Maintenant si l'on fait $n = \infty$, le premier membre de cette équation sera d'après le cas précédent une série convergente. En la désignant par s, on aura,

$$s = p_n(1+x) - m_n\left(\cos(n+1)\varphi + \sqrt{-1}\,.\sin(n+1)\varphi\right),$$

où n est infini. Or on peut démontrer comme dans le deuxième cas que $m_n = 0$ pour $n = \infty$. On a donc,

$$s = p(1+x), \text{ où } p = 1 + m_1 x + m_2 x^2 + \text{etc. in inf.}$$

Cette équation donne, sinon $x + 1 = 0$:

$$p = \frac{s}{1+x}.$$

La série p est donc alors convergente, et par conséquent les séries ci-dessus le sont de même.

Si $x+1=0$, on a $1+\cos\varphi+\sqrt{-1}\,.\sin\varphi=0$, donc $\sin\varphi=0$, $1+\cos\varphi=0$, c'est-à-dire $\varphi=(2n+1)\pi$, n étant un nombre entier positif ou négatif. Donc les séries en question sont convergentes pour toute valeur de k comprise entre 0 et -1, sinon $\varphi=(2n+1)\pi$.

Lorsque $\varphi=(2n+1)\pi$, les séries sont nécessairement divergentes, car si alors elles étaient convergentes, elles auraient pour somme les limites des fonctions,

$$e^{k\delta-k'\delta_1}\left(\cos(k\delta_1+k'\delta)+\sqrt{-1}\,.\sin(k\delta_1+k'\delta)\right),$$

en y faisant α converger vers l'unité, et faisant $\mu=(2n+1)\pi$.

Or $\delta=\frac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)$, $\delta_1=\text{arc. tang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right)$, donc pour $\varphi=(2n+1)\pi$, $\delta=\log(1-\alpha)$, $\delta_1=0$. La fonction en question prendra donc la forme $(1-\alpha)^k[\cos(k'\log(1-\alpha))+\sqrt{-1}\,.\sin(k'\log(1-\alpha))]$.

Or k étant égal à zéro ou négatif, il est clair que cette fonction en y faisant α converger vers l'unité, n'aura pas de limite finie et déterminée. Donc les séries sont divergentes.

De ce qui précède il suit donc, que les séries (21) ont lieu pour toute valeur de φ, lorsque k est positif, et pour toute valeur de φ pour laquelle $\sin\varphi$ n'est pas zéro, lorsque k est compris entre -1 et 0, quelle que soit d'ailleurs la valeur de k'. Dans tout autre cas les séries sont divergentes. Dans le cas que nous examinons la série générale (19), lorsqu'on y fait $b^2+a^2=1$, ou $b=\sqrt{(1-a^2)}$, prend la forme:

$$32)\quad\begin{cases} 1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(a+\sqrt{(a^2-1)})+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2}(a+\sqrt{(a^2-1)})^2 \\ \quad+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})(m-2+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2\,.\,3}(a+\sqrt{(a^2-1)})^3+\text{etc.} \\ =(2+2a)^{\frac{m}{2}}e^{-n\,.\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\left[\cos\left(m\,.\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{1}{2}n\log(2+2a)\right)\right. \\ \qquad\left.+\sqrt{-1}\sin\left(m\,.\,\text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{1}{2}n\log(2+2a)\right)\right]. \end{cases}$$

Voici un résumé des résultats précédents:

I. Lorsque la série,

$$1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(a+b\sqrt{-1})+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2}(a+b\sqrt{-1})^2+\text{etc.}$$

$$+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})\ldots(m-\mu+1-n\sqrt{-1})}{1\;.\;2\;\ldots\;.\;\mu}(a+b\sqrt{-1})^{\mu}+\ldots$$

est convergente, elle a pour somme,

$$((1+a)^2+b^2)^{\frac{m}{2}}\, e^{-n.\,\text{arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)}\Big[\cos\Big(m.\,\text{arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\frac{n}{2}\log((1+a)^2+b^2)\Big)$$
$$+\sqrt{-1}.\sin\Big(m.\,\text{arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\frac{n}{2}\log((1+a)^2+b^2)\Big)\Big].$$

II. La série est convergente pour toute valeur de m et n, lorsque la quantité $\sqrt{(a^2+b^2)}$ est inférieure à l'unite. Si $\sqrt{(a^2+b^2)}$ est égal à l'unité la série est convergente pour toute valeur de m comprise entre -1 et $+\infty$, sinon en même temps $a=-1$. Si $a=-1$, m doit être positif. Dans tout autre cas la série proposée est divergente.

Comme cas particuliers on doit considérer les suivants:

A. Lorsque $n=0$.

On a alors;

$$24)\begin{cases}1+\frac{m}{1}(a+b\sqrt{-1})+\frac{m(m-1)}{1.2}(a+b\sqrt{-1})^2+\ldots\\ =((1+a)^2+b^2)^{\frac{m}{2}}\Big[\cos\Big(m.\,\text{arc.tang.}\left(\frac{b}{1+a}\right)\Big)+\sqrt{-1}.\sin\Big(m.\,\text{arc.tang}\left(\frac{b}{1+a}\right)\Big)\Big].\end{cases}$$

Cette expression donne, en faisant $a=\alpha.\cos\varphi$, $b=\alpha.\sin\varphi$ et en séparant lés termes réels des imaginaires:

$$25)\begin{cases}1+\frac{m}{1}\alpha.\cos\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2.\cos 2\varphi+\text{etc.}=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{m}{2}}\cos\Big(m.\,\text{arc.tang}\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\Big),\\ \frac{m}{1}.\alpha\sin\varphi+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2.\sin 2\varphi+\text{etc.}=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{m}{2}}\sin\Big(m.\,\text{arc.tang}\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\Big).\end{cases}$$

B. Lorsque $b=0$.

Dans ce cas l'expression générale prend la forme suivante:

$$26)\begin{cases}1+\frac{m+n\sqrt{-1}}{1}a+\frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\;.\;2}a^2+\text{etc.}\\ =(1+a)^m\,[\cos(n\log(1+a))+\sqrt{-1}.\sin(n.\log(1+a))].\end{cases}$$

C. Lorsque $n=0$, $b=0$.

Alors on a:

$$27)\quad 1+\frac{m}{1}.a+\frac{m(m-1)}{1.2}.a^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.a^3+\ldots=(1+a)^m.$$

Cette expression a lieu pour toute valeur de m lorsque la valeur numérique de a est inférieure à l'unite, de plus pour toute valeur de m comprise entre -1 et $+\infty$, lorsque $a=1$, et pour toute valeur positive de m, lorsque

$a = -1$. Pour toute autre valeur de a et de m le premier membre est une série divergente.

Faisant p. ex. $a = 1$, $a = -1$, on a,

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \text{etc.} \ldots = 2^m,$$

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \text{etc.} \ldots = 0.$$

La première équation a lieu pour toute valeur de m comprise entre -1 et $+\infty$, et la seconde pour toute valeur positive de m.

D. Lorsque $\sqrt{(a^2+b^2)} = 1$ $(a = \cos\varphi,\ b = \sin\varphi)$.

Alors on a,

$$28)\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(a+\sqrt{(a^2-1)}) + \frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\;.\;2}(a+\sqrt{(a^2-1)})^2 + \text{etc.} \\ = (2+2a)^{\frac{m}{2}} e^{-n.\text{arc.tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\Big[\cos\Big(m.\text{arc.tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \frac{n}{2}\log(2+2a)\Big), \\ \qquad + \sqrt{-1}.\sin\Big(m.\text{arc.tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \frac{n}{2}\log(2+2a)\Big)\Big]. \end{array}\right.$$

Si l'on fait ici $a = \cos\varphi$ on obtient:

$$29)\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{m+n\sqrt{-1}}{1}(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi) + \frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\;.\;2}(\cos 2\varphi+\sqrt{-1}.\sin 2\varphi) + \ldots \\ = (2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}} e^{-n(\frac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)}\Big[\cos\Big(m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi) + \frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\Big), \\ \qquad + \sqrt{-1}\;.\;\sin\Big(m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi) + \frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\Big)\Big] \end{array}\right.$$

en remarquant que $\text{arc.tang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = \text{arc. tang}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \text{arc. tang}(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)$,

$= \frac{1}{2}\varphi - \varrho\pi$, supposé que $\frac{1}{2}\varphi$ soit compris entre $\varrho\pi - \frac{\pi}{2}$ et $\varrho\pi + \frac{\pi}{2}$.

E. Lorsque $\sqrt{(a^2+b^2)} = 1$, $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, $n = 0$.

Dans ce cas l'expression précédente donne.

$$30)\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{m}{1}(\cos\varphi+\sqrt{-1}.\sin\varphi) + \frac{m(m-1)}{1.2}(\cos 2\varphi+\sqrt{-1}.\sin 2\varphi) + \text{etc.} \\ = (2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}(\cos m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi) + \sqrt{-1}.\sin m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{depuis } \frac{1}{2}\varphi = \varrho\pi - \frac{\pi}{2} \\ \text{jusqu'à } \frac{1}{2}\varphi = \varrho\pi + \frac{\pi}{2}\end{array}$$

ou en séparant la partie réelle de l'imaginaire:

$$31)\left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{m}{1}\cos\varphi + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos 2\varphi + \text{etc.} = (2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cos m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi) \\ \frac{m}{1}\sin\varphi + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin 2\varphi + \text{etc.} = (2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\sin m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{depuis } \frac{1}{2}\varphi = \varrho\pi - \frac{\pi}{2} \\ \text{jusqu'à } \frac{1}{2}\varphi = \varrho\pi + \frac{\pi}{2}.\end{array}$$

F. Lorsque $a = 0$, $b = \text{tang}\ \varphi$.

Dans ce cas on obtient lorsque φ est compris entre $+\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$:

$$32)\ \begin{cases} 1 + \frac{m+n\sqrt{-1}}{1}.\text{tang}\,\varphi.\sqrt{-1} + \frac{(m+n\sqrt{-1})(m-1+n\sqrt{-1})}{1\,.\,2}(\text{tang}\,\varphi.\sqrt{-1})^2 + \text{etc.} \\ = \cos\varphi^{-m}.\,e^{-n\varphi}\,(\cos(m\varphi - n\log\cos\varphi) + \sqrt{-1}.\sin(m\varphi - n\log\cos\varphi)). \end{cases}$$

V.

On peut par des transformations convenables des expressions précédentes déduire encore plusieurs autres, entre lesquelles il se trouve de très remarquables. Nous allons en expliquer quelques unes. Pour plus de détail on peut consulter l'ouvrage cité de M. Cauchy.

A.

Sommation des séries

$$\alpha.\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \ldots,$$
$$\alpha.\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi - \ldots.$$

Lorsque α est supérieur à l'unité on voit aisément que ces séries sont divergentes. Si α est inférieur à l'unité nous avons vu plus haut qu'elles sont convergentes, et leurs sommes sont les quantités β et δ du § III, c'est-à-dire en mettant pour β et δ leurs valeurs données par les équations (18).

$$33)\ \begin{cases} \tfrac{1}{2}\log(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2) = \alpha\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi - \text{etc.} \\ \text{arc. tang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right) = \alpha\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi - \text{etc.} \end{cases}$$

Pour avoir les sommes de ces séries lorsque $\alpha = +1$ ou -1, il faut seulement faire α converger vers cette limite.

La première expression donne de cette manière:

$$34)\ \begin{cases} \tfrac{1}{2}\log(2 + 2\cos\varphi) = \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi - \text{etc.} \\ \tfrac{1}{2}\log(2 - 2\cos\varphi) = -\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi - \text{etc.} \end{cases}$$

supposé que les secondes membres de ces équations soient des séries convergentes, ce qui d'après le théorème (II) a lieu pour toute valeur de φ excepté pour $\varphi = (2\mu + 1)\pi$ dans la première expression, et pour $\varphi = 2\mu\pi$ dans la seconde, μ étant un nombre entiér quelconque positif ou négatif.

La seconde formule donne, en supposant φ compris entre π et $-\pi$ et se rappelant qu'on a alors

$$\text{arc. tang}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right) = \text{arc. tang}\,(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{1}{2}\varphi:$$

35) $\frac{1}{2}\varphi = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \ldots$ (depuis $\varphi = +\pi$ jusqu'à $\varphi = -\pi$).

Lorsque $\varphi = \pi$ ou $= -\pi$ la série se réduit à zéro, comme on voit aisément. Il suit de la, que la fonction:

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \text{etc.}$$

a la propriété remarquable pour les valeurs $\varphi = \pi$ et $\varphi = -\pi$ d'être discontinue. En effet lorsque $\varphi = \pm\pi$, la fonction se réduit à zéro, si au contraire $\varphi = \pm(\pi - \alpha)$, α étant positif et moindre que π, la valeur de la fonction est

$$\pm\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

L'expression (33) contient comme cas particulier celle-ci:

36) $$\text{arc tang}\,\alpha = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{5}\alpha^5 - \ldots \text{etc.}$$

expression qu'on trouve en faisant $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

B.

Développement de $\cos m\varphi$ et de $\sin m\varphi$ suivant les puissances de $\tang\varphi$. On peut déduire ces développements de l'expression (32). En effet en faisant $n = 0$, et séparant les parties réelles des imaginaires, on obtient après avoir multiplié par $(\cos\varphi)^m$:

37) $$\begin{cases} \cos m\varphi = (\cos\varphi)^m\left(1 - \frac{m(m-1)}{1.2}(\text{tang}\,\varphi)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(\text{tang}\,\varphi)^4 - \ldots\right), \\ \sin m\varphi = (\cos\varphi)^m\left(m(\text{tang}\,\varphi) - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(\text{tang}\,\varphi)^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}(\text{tang}\,\varphi)^5 - \ldots\right), \end{cases}$$

depuis $\varphi = \frac{\pi}{4}$ jusqu'à $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, et ces équations ont lieu pour toute valeur de m lorsque $\text{tang}\,\varphi$ est moindre que 1. Si $\text{tang}\,\varphi = \pm 1$, elles ont lieu pour tout m compris entre -1 et $+\infty$.

Elles sont alors:

38) $$\begin{cases} \cos\left(m.\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1 - \frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} - \ldots\right) \\ \sin\left(m.\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(m - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} - \ldots\right), \end{cases}$$

C.

Développement de $(\cos x)^n$ et $(\sin x)^n$ en séries ordonnées suivant les cosinus et les sinus des arcs multiples.

Depuis quelque temps plusieurs analystes se sont occupé du développe-

ment de $(\cos x)^n$ et $(\sin x)^n$. Mais jusqu'à présent, si je ne me trompe, tous ces efforts n'ont pas entièrement réussis. On est bién parvenu à des expressions justes sous certaines restrictions, mais ces expressions n'ont pas été rigoureusement fondées. On peut les déduire assez simplement des expressions démontrées ci-dessus. En effet si l'on ajoute les deux équations (31) après avoir multiplié la première par $\cos\alpha$ et la seconde par $\sin\alpha$ on obtient:

$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-\varphi)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha-2\varphi)+\ldots=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cos\left(\alpha-\frac{m\varphi}{2}+m\varrho\pi\right)$$

$$\left(\text{depuis } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}\right).$$

Or $2+2\cos\varphi$ étant $=4(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2$, on oura en faisant $\varphi=2x$:

$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-2x)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha-4x)+\ldots=(2\cos x)^m\cos(\alpha-mx+2m\varrho\pi)\left\{\begin{matrix}\text{depuis } x=2\varrho\pi-\frac{\pi}{2}\\ \text{jusqu'à } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}$$

$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-2x)+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(\alpha-4x)+\ldots=(-2\cos x)^m\cos(\alpha-mx+m(2\varrho+1)\pi)\left\{\begin{matrix}\text{dep. } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2}\\ \text{j. à } x=2\varrho\pi+\frac{3\pi}{2}\end{matrix}\right\}$$

Si l'on fait ici 1. $\alpha=mx$; 2. $\alpha=mx+\frac{\pi}{2}$; 3. $\alpha=my$, $x=y-\frac{\pi}{2}$;

4. $\alpha=my-\frac{\pi}{2}$, $x=y-\frac{\pi}{2}$, on obtiendra:

$$\begin{matrix}1.\ (2\cos x)^m\cos 2m\varrho\pi=\cos mx+\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x+\ldots\\ 2.\ (2\cos x)^m\sin 2m\varrho\pi=\sin mx+\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x+\ldots\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{depuis } x=2\varrho\pi-\frac{\pi}{2}\\ \text{jusqu'à } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{matrix}3.\ (2\sin x)^m\cos m(2\varrho+\frac{1}{2})\pi=\cos mx-\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x+\ldots\\ 4.\ (2\sin x)^m\sin m(2\varrho+\frac{1}{2})\pi=\sin mx-\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x+\ldots\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{depuis } x=2\varrho\pi\\ \text{jusqu'à } x=(2\varrho+1)\pi\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{matrix}5.\ (-2\cos x)^m\cos m(2\varrho+1)\pi=\cos mx+\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x+\ldots\\ 6.\ (-2\cos x)^m\sin m(2\varrho+1)\pi=\sin mx+\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x+\ldots\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{depuis } x=(2\varrho+\frac{1}{2})\pi\\ \text{jusqu'à } x=(2\varrho+\frac{3}{2})\pi\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{matrix}7.\ (-2\sin x)^m\cos m(2\varrho+\frac{3}{2})\pi=\cos mx-\frac{m}{1}\cos(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x-\ldots\\ 8.\ (-2\sin x)^m\sin m(2\varrho+\frac{3}{2})\pi=\sin mx-\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x-\ldots\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{depuis } x=(2\varrho+1)\pi\\ \text{jusqu'à } x=(2\varrho+2)\pi\end{matrix}\right\}$$

Ces formules ont lieu pour toute valeur de x, lorsque m et positif. Lorsque m est compris entre -1 et 0 il faut excepter des valeurs de x:

1) dans les formules (1), (2), (5), (6), les valeurs $x=2\varrho\pi-\frac{\pi}{2}$, et $x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2}$,
2) dans les formules (3), (4), (7), (8), les valeurs $x=2\varrho\pi$, et $x=(2\varrho+1)\pi$. Dans toute autre cas les séries en question sont convergentes. Comme cas particuliers on peut considérer les deux suivants:

$$(\cos x)^m = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x + \dots$$

$$0 = \sin mx + \frac{m}{1}\sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(m-4)x + \dots$$

$$\left(\text{depuis } x = -\frac{\pi}{2} \text{ jusqu'à } x = \frac{\pi}{2}\right).$$

VIII.

Sur quelques intégrales définies.

Lorsque une intégrale définie contient une quantité constante indéterminée, on peut souvent par la différentiation en déduire une équation différentielle par laquelle l'intégrale définie peut se déterminer en fonction de la quantité constante. Cette équation différentielle est en général linéaire; donc si elle est en même temps du premier degré, elle peut, comme on sait, s'intégrer. Quoique cela n'ait pas lieu en général lorsque l'équation est du second degré ou d'un degré plus élevé, on peut pourtant par ces équations quelquefois trouver plusieurs relations intéressantes entre les intégrales définies. Montrer cela c'est ce qui sera l'objet de ce mémoire.

Soit $\frac{d^2y}{da^2} + p \cdot \frac{dy}{da} + q \cdot y = 0$ une équation différentielle linéaire du second degré entre y et a, p et q étant deux fonctions de a. Supposons qu'on connaisse deux intégrales particulières de cette équation, savoir $y = y_1$ et $y = y_2$, et l'on aura:

$$\frac{d^2y_1}{da^2} + p \cdot \frac{dy_1}{da} + q \cdot y_1 = 0; \quad \frac{d^2y_2}{da^2} + p \cdot \frac{dy_2}{da} + q \cdot y_2 = 0.$$

De ces équations on tire en éliminant q,

$$y_2 \cdot \frac{d^2y_1}{da^2} - y_1 \cdot \frac{d^2y_2}{da^2} = \frac{d\left(y_2 \cdot \frac{dy_1}{da} - y_1 \cdot \frac{dy_2}{da}\right)}{da} = -p\left(y_2 \cdot \frac{dy_1}{da} - y_1 \cdot \frac{dy_2}{da}\right).$$

Donc en intégrant

$$0. \quad y_2 \cdot \frac{dy_1}{da} - y_1 \cdot \frac{dy_2}{da} = e^{-\int p da},$$

e étant la base des logarithmes Népériens.

Supposons que les deux fonctions y_1 et y_2 soient exprimées en intégrales définies de sorte que $y_1 = \int v dx$, $y_2 = \int u dx$, v et u étant des fonctions de x et de a; cette relation entre y_1 et y_2 donne en substituant,

$$1) \quad \int u dx . \int \left(\frac{dv}{da}\right) dx - \int v dx . \int \left(\frac{du}{da}\right) dx = e^{-\int p da}.$$

Cette équation exprime, comme on voit, une relation entre les quatre intégrales $\int u dx$, $\int v dx$, $\int \left(\frac{du}{da}\right)dx$, $\int \left(\frac{dv}{da}\right) dx$. Il s'agit maintenant de trouver des intégrales qui puissent satisfaire à une équation différentielle du second degré. Il-y-a plusieurs intégrales qui jouissent de cette propriété, et que nous allons considérer successivement.

I. Soit $v = \frac{(x+a)^{\gamma+1}}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}$ et $y = \int_0^1 \frac{(x+a)^{\gamma+1} dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}$.

$$\frac{dy}{da} = (\gamma+1) . \int_0^1 \frac{(x+a)^{\gamma} dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}, \quad \frac{d^2y}{da^2} = \gamma(\gamma+1) . \int_0^1 \frac{(x+a)^{\gamma-1} dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}},$$

le signe $\int_0^1$ dénotant que l'intégrale est prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. En différentiant la quantité $(x+a)^{\gamma} . x^{\alpha} (1-x)^{\beta} = r$ par rapport à x, on obtient $dr = dx \left(x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(x+a)^{\gamma-1}(\gamma x(1-x) + \alpha(x+a)(1-x) - \beta(x+a)x)\right)$. Or

$$\gamma x(1-x) + \alpha(x+a)(1-x) - \beta(x+a)x$$
$$= -\gamma(a^2+a) + (a(\beta+\gamma) + (a+1)(\alpha+\gamma))(x+a) - (\alpha+\beta+\gamma)(x+a)^2,$$

donc en intégrant entre les limites $x=0$, $x=1$, on obtient

$$0 = -\gamma(a^2+a) . \int_0^1 \frac{(x+a)^{\gamma-1} dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}} + ((\beta+\gamma)a + (\alpha+\gamma)(a+1)) \int_0^1 \frac{(x+a)^{\gamma} . dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}} - (\alpha+\beta+\gamma) . \int_0^1 \frac{(x+a)^{\gamma+1} dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}.$$

De cette équation on tire en divisant par $\frac{a^2+a}{\gamma+1}$ et substituant à la place des intégrales leur valeurs en y,

$$2) \quad \frac{d^2y}{da^2} - \left(\frac{\alpha+\gamma}{a} + \frac{\beta+\gamma}{1+a}\right) . \frac{dy}{da} + \frac{(\gamma+1)(\alpha+\beta+\gamma)}{a(a+1)} . y = 0.$$

Si l'on met à la place de α, β, γ respectivement $1-\beta$, $1-\alpha$, $\alpha+\beta+\gamma-1$, on aura la même équation, donc

$$3) \quad y_1 = \int_0^1 \frac{(x+a)^{\gamma+1} dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}} \text{ et } y_2 = \int_0^1 \frac{(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma} dx}{x^{\beta}(1-x)^{\alpha}}$$

sont deux intégrales particulières de cette équation.

Or $p = -\frac{\alpha+\gamma}{a} - \frac{\beta+\gamma}{1+a}$, et par conséquent $e^{-\int p da} = C . a^{\alpha+\gamma}(1+a)^{\beta+\gamma}$, donc l'équation (0) donne

$$4) \quad y_2 . \frac{dy_1}{da} - y_1 . \frac{dy_2}{da} = C . a^{\alpha+\gamma}(1+a)^{\beta+\gamma}.$$

Pour déterminer la quantité constante C soit $a = \infty$, et l'on trouvera facilement

$$C=(\alpha+\beta-1)\cdot\int_0^1 dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\cdot\int_0^1 dx\,.\,x^{-\beta}(1-x)^{-\alpha},$$

c'est-à-dire

$$C=-\pi\left(\cot(\alpha\pi)+\cot(\beta\pi)\right).$$

Par suite l'équation (4) donne

$$5)\quad\begin{cases}(\alpha+\beta+\gamma)\int_0^1\frac{dx(x+a)^{\gamma+1}}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}\cdot\int_0^1\frac{dx(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{x^{\beta}(1-x)^{\alpha}}\\ -(\gamma+1)\cdot\int_0^1\frac{dx(x+a)^{\gamma}}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}\cdot\int_0^1\frac{dx(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma}}{x^{\beta}(1-x)^{\alpha}}\\ =\pi\left(\cot(\alpha\pi)+\cot(\beta\pi)\right)\cdot a^{\alpha+\gamma}(1+a)^{\beta+\gamma}.\end{cases}$$

Le cas où $\gamma=-\alpha-\beta$, mérite d'être remarqué. On a alors comme on voit aisément:

$$\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(x+a)^{\alpha+\beta}}=\frac{1}{a^{\beta}(1+a)^{\alpha}}\cdot\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}.$$

Or $\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, $\Gamma(m)$ étant $=\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x}.\,dx$,

donc $$\int_0^1\frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(x+a)^{\alpha+\beta}}=\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot\frac{1}{a^{\beta}(1+a)^{\alpha}}.$$

Soit p. ex. $\beta=1-\alpha$, et l'on aura

$$\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^{\alpha}x^{1-\alpha}(x+a)}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)}\cdot\frac{1}{a^{1-\alpha}(1+a)^{\alpha}},$$

or $\Gamma(1)=1$ $\Gamma(\alpha)\,.\,\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$, donc

$$\int_0^1\frac{dx}{(x+a)x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\cdot\frac{1}{a^{1-\alpha}(1+a)^{\alpha}}.$$

II. Soit $y=\int_0^\infty\frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma}}$. En différentiant on obtient

$$\frac{dy}{da}=-\gamma\int_0^\infty\frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma+1}},$$

$$\frac{d^2y}{da^2}=\gamma(\gamma+1)\int_0^\infty\frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma+2}}.$$

Lorsqu'on différentie la fonction $x^{1-\alpha}(1+x)^{1-\beta}(x+a)^{-\gamma-1}=r$ on obtient,

$$dr=\frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma+2}}\cdot\left((1-\alpha)(1+x)(x+a)+(1-\beta)x(x+a)-(\gamma+1)x(1+x)\right)$$

$$=\frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^{\beta}(x+a)^{\gamma+2}}\cdot q,$$

donc puisque,

$$q = (\gamma+1)(1-a)a - ((\alpha+\gamma)(1-a) - (\gamma+\beta)a)(x+a) + (1-\alpha-\beta-\gamma)(x+a)^2,$$

$$dr = (\gamma+1)a(1-a) \cdot \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta\,(x+a)^{\gamma+2}} - ((\alpha+\gamma)(1-a)-(\beta+\gamma)a) \cdot \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta\,(x+a)^{\gamma+1}}$$

$$+ (1-\alpha-\beta-\gamma) \cdot \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta\,(x+a)^\gamma}.$$

On tire de là en intégrant

$$6)\quad \frac{d^2y}{da^2} + \left(\frac{\alpha+\gamma}{a} - \frac{\beta+\gamma}{1-a}\right) \cdot \frac{dy}{da} + \frac{\gamma(1-\alpha-\beta-\gamma)}{a(1-a)} \cdot y = 0$$

En mettant respectivement $1-\beta$, $1-\alpha$, $\gamma+\alpha+\beta-1$ à la place de α, β, γ, il en résulte la même équation, donc

$$y_1 = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{(1+x)^\beta\,(x+a)^\gamma} \text{ et } y_2 = \int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\,dx}{(1+x)^{1-\alpha}(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}},$$

sont deux intégrales particulières de cette équation.

Or p étant $= \frac{\alpha+\gamma}{a} - \frac{\beta+\gamma}{1-a}$ et par suite $e^{-\int p da} = \frac{C}{a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}}$, on a en vertu de l'équation (0)

$$y_2 \cdot \frac{dy_1}{da} - y_1 \cdot \frac{dy_2}{da} = \frac{C}{a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}}.$$

En faisant $a = 1$, on trouve $C = 0$, et par conséquent

$$y_2 \frac{dy_1}{da} - y_1 \frac{dy_2}{da} = 0,$$

c'est-à-dire $y_1 = Cy_2$, C étant une constante. Pour la trouver on fera $a = 1$, et on aura

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}} = C \cdot \int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}}.$$

Or

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\cdot\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \text{ et}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}dx}{(1+x)^{\beta+\gamma}} = \frac{\Gamma(\beta)\cdot\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}, \text{ donc}$$

$$C = \frac{\Gamma(1-\alpha)\cdot\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\beta)\cdot\Gamma(\gamma)}.$$

par suite l'équation $y_1 = Cy_2$ donne

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\,dx}{(1+x)^\beta\,(x+a)^\gamma} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\cdot\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\beta)\cdot\Gamma(\gamma)} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{\beta-1}\,dx}{(1+x)^{1-\alpha}\,(x+a)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}.$$

Si dans l'équation (6.) on met $(1-a)$ à la place de a et β et α à la place de α et β, elle ne change pas de forme.

Il suit de là que

$$y_2 = \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\, dx}{(1+x)^\alpha\, (x+1-a)^\gamma}$$

est de même une intégrale particulière de la même équation. On a donc

$$y_2 \cdot \frac{dy_1}{da} - y_1 \cdot \frac{dy_2}{da} = \frac{C}{a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}}.$$

En mettant xa à la place de x dans l'expression de y_1, on obtient:

$$y_1 = a^{-\alpha-\gamma+1} \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\, dx}{(1+x)^\gamma\, (1+ax)^\beta}\ ;\quad \frac{dy_1}{da} = -\gamma a^{-\alpha-\gamma} \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\, dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^\beta}.$$

On trouve de même, en mettant $(1-a)x$ à la place de x:

$$y_2 = (1-a)^{-\beta-\gamma+1} \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\, dx}{(1+x)^\gamma\, (1+(1-a)x)^\alpha}\ ;$$

$$\frac{dy_2}{da} = \gamma\, (1-a)^{-\beta-\gamma} \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\, dx}{(1+x)^{\gamma+1}\, (1+(1-a)x)^\alpha}.$$

En substituant ces valeurs, multipliant par $a^{\alpha+\gamma}(1-a)^{\beta+\gamma}$ et écrivant C au lieu de $-\frac{C}{\gamma}$, on trouve:

$$7)\quad \begin{cases} C = a \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\, dx}{(1+x)^\gamma\, (1+ax)^\beta} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\, dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+(1-a)x)^\alpha} \\ + (1-a) \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\, dx}{(1+x)^\gamma\, (1+(1-a)x)^\alpha} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\, dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^\beta}. \end{cases}$$

Pour trouver C soit $a = 0$, et on aura:

$$C = \int_0^\infty \frac{x^{-\beta}\, dx}{(1+x)^{\gamma+\alpha}} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\, dx}{(1+x)^{\gamma+1}} = \frac{\Gamma(1-\alpha) \,.\, \Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma+1)} \,.\, \Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1).$$

Si l'on fait p. ex. $\beta = 1-\alpha$, on aura en remarquant que

$$\Gamma(1-\alpha) \cdot \Gamma(\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi},\ \Gamma(\gamma+1) = \gamma\Gamma(\gamma):$$

$$\frac{\pi}{\gamma \cdot \sin(\alpha\pi)} = a \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\, dx}{(1+x)^\gamma\, (1+ax)^{1-\alpha}} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} dx}{(1+x)^{\gamma+1}\, (1+(1-a)x)^\alpha}$$

$$+ (1-a) \cdot \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}\, dx}{(1+x)^{\gamma+1}(1+ax)^{1-\alpha}} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} dx}{(1+x)^\gamma\, (1+(1-a)x)^\alpha}.$$

Lorsque $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ on a:

$$2\pi = a \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x(1+x)(1+ax))}} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x(1+x)^3(1+(1-a)x)}}$$

$$+ (1-a) \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x(1+x)(1+(1-a)x)}} \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x(1+x)^3(1+ax))}}$$

Toutes ces intégrales peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques. En effet, soit $x = (\tang \varphi)^2$, et on aura après quelques transformations légères

$$\frac{\pi}{2} = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-(1-a)\sin^2\varphi)}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \cdot \cos^2\varphi}{\sqrt{(1-a\cdot\sin^2\varphi)}}$$

$$+ (1-a)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-a\sin^2\varphi)}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \cdot \cos^2\varphi}{\sqrt{(1-(1-a)\sin^2\varphi)}},$$

c'est-à-dire, lorsqu'on fait $a = c^2$, $b^2 = 1 - c^2$,

$$\frac{\pi}{2} = F^1(c)\cdot E^1(b) + F^1(b)\cdot E^1(c) - F^1(c)\cdot F^1(b),$$

où, d'après la notation de M. Legendre,

$$F^1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},\ E^1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\cdot\sqrt{(1-c^2\cdot\sin^2\varphi)}.$$

La formule ci-dessus se trouve dans les *exercices du calcul intégral par M. Legendre*, Tom 1, pag 61.

Dans la formule générale (7) les intégrales peuvent s'exprimer par d'autres dont les limites sont 0 et 1. Soit pour cet effet $x = \frac{y}{1-y}$, et on aura:

$$8)\left\{\begin{aligned}\frac{\Gamma(1-\alpha)\cdot\Gamma(1-\beta)\cdot\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1)}{\Gamma(\gamma+1)} &= a\cdot\int_0^1 \frac{dy\,(1-y)^{\alpha+\beta+\gamma-2}}{y^\alpha\,(1-(1-a)y)^\beta}\cdot\int_0^1 \frac{dy\,(1-y)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{y^\beta\,(1-ay)^\alpha} \\ &+ (1-a)\cdot\int_0^1 \frac{dy\,(1-y)^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{y^\alpha\,(1-(1-a)y)^\beta}\cdot\int_0^1 \frac{dy\,(1-y)^{\alpha+\beta+\gamma-2}}{y^\beta\,(1-ay)^\alpha}.\end{aligned}\right.$$

Nous avons vu plus haut que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}\,(1-x)^{1-\beta}\,(x+a)^{\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot\frac{1}{a^\beta\,(1+a)^\alpha}.$$

On peut, comme il suit, trouver une expression plus générale de laquelle celle-ci est un cas particulier. En différentiant l'intégrale

$$y = \int_0^x \frac{dx\cdot x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}$$

par rapport à a on obtient

$$\frac{dy}{da} = -(\alpha+\beta)\cdot\int_0^x \frac{dx\cdot x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta+1}}.$$

Il suit de là que

$$\frac{dy}{da} + \left(\frac{\alpha}{1+a} + \frac{\beta}{a}\right)y = -\frac{x^\alpha\,(1-x)^\beta}{a\,(1+a)\,(x+a)^{\alpha+\beta}}.$$

En multipliant cette équation par $a^\beta(1+a)^\alpha$, le premier membre devient

une différentielle complète, savoir égale à $d(ya^\beta((1+a)^\alpha)$, on aura donc en intégrant:

$$ya^\beta(1+a)^\alpha = C - x^\alpha(1-x)^\beta \int_0^a \frac{da\,.\,a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}}.$$

Pour trouver C, qui peut être une fonction de x, nous ferons $a=\infty$. On aura donc:

$$ya^\beta(1+a)^\alpha = \int_0^x dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \text{ et par conséquent,}$$

$$C = \int_0^x dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} + x^\alpha(1-x)^\beta \int_0^\infty \frac{da\,.\,a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}}.$$

Si l'on fait $a = \frac{x-xy}{y-x}$, et par suite $y = \frac{x+ax}{a+x}$, on trouvera

$$\int_0^\infty \frac{da\,.\,a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(a+x)^{\alpha+\beta}} = -x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\int_1^x dy\,.\,y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}$$

$$= x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}\left(-\int_0^x dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} + \int_0^1 dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\right).$$

En substituant cette valeur, on obtient

$$C = \int_0^1 dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\,.\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \text{ et par conséquent}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,.\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = a^\beta(1+a)^\alpha \int_0^x \frac{dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}} + x^\alpha(1-x)^\beta \int_0^a \frac{da\,.\,a^{\beta-1}(1+a)^{\alpha-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}.$$

Si p. ex. $\alpha+\beta=1$, on aura

$$\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{(1+a)^\alpha}{a^{\alpha-1}}\int_0^x \frac{dx\,.\,x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}}{x+a} + \frac{x^\alpha}{(1-x)^{\alpha-1}}\int_0^a \frac{da\,.\,a^{-\alpha}(1+a)^{\alpha-1}}{x+a}.$$

Si de plus $\alpha=\frac{1}{2}$, on obtient

$$\pi = \sqrt{(a+a^2)}\int_0^x \frac{dx}{(x+a)\sqrt{(x-x^2)}} + \sqrt{(x-x^2)}\int_0^a \frac{da}{(a+x)\sqrt{(a+a^2)}},$$

ce qui est juste, car

$$\int_0^x \frac{dx}{(x+a)\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{(a+a^2)}}\,.\,\text{arc.tang}\sqrt{\left(\frac{x+xa}{a-ax}\right)},$$

$$\int_0^a \frac{da}{(a+x)\sqrt{(a+a^2)}} = \frac{2}{\sqrt{(x+x^2)}}\,.\,\text{arc.tang}\sqrt{\left(\frac{a-ax}{x+xa}\right)};$$

et $\text{arc.tang}(z) + \text{arc.tang}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pi}{2}$.

III. Soit $y = \int_0^1 e^{-ax}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$, où $\alpha>0$, $\beta>0$.

En différentiant par rapport à a on obtient:

$$\frac{dy}{da} = -\int_0^1 e^{-ax} x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} \, dx,$$

$$\frac{d^2y}{da^2} = \int_0^1 e^{-ax} x^{\alpha+1} (1-x)^{\beta-1} \, dx.$$

Lorsqu'on différentie la fonction $r = e^{-ax} x^{\alpha} (1-x)^{\beta}$ par rapport à x on obtient:

$dr = \alpha e^{-ax} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \, dx - (\alpha+\beta+a) \, . \, e^{-ax} x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} \, dx + a e^{-ax} x^{\alpha+1} (1-x)^{\beta-1} \, dx,$
donc en intégrant depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 1$, et substituant pour les intégrales leurs valeur en y, $\frac{dy}{da}$ et $\frac{d^2y}{da^2}$:

$$\frac{d^2y}{da^2} + \left(\frac{\alpha+\beta}{a} + 1\right) \cdot \frac{dy}{da} + \frac{\alpha}{a} \cdot y = 0.$$

On satisfait aussi à cette équation en faisant

$$y = y_1 = \int_1^{\infty} e^{-ax} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

a étant positif. Or on a $p = \frac{\alpha+\beta}{a} + 1$, donc $e^{-\int p da} = \frac{C}{e^a \, a^{\alpha+\beta}}$. Donc l'équation (0) donne:

$$y_1 \cdot \frac{dy}{da} - y \cdot \frac{dy_1}{da} = \frac{C}{e^a \, a^{\alpha+\beta}}.$$

Si dans l'expression de y_1 on met $x+1$ à la place de x, on trouve

$$y_1 = e^{-a} \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{\beta-1} (1+x)^{\alpha-1} \, dx,$$

$$\frac{dy_1}{da} = - e^{-a} \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{\beta-1} (1+x)^{\alpha} \, dx,$$

ou bien en mettant ici $\frac{x}{a}$ à la place de x:

$$y_1 = e^{-a} a^{-\alpha-\beta+1} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\beta-1} (a+x)^{\alpha-1} \, dx,$$

$$\frac{dy_1}{da} = - e^{-a} a^{-\alpha-\beta} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\beta-1} (a+x)^{\alpha} \, dx.$$

Substituant ces valeurs de y_1, $\frac{dy_1}{da}$ de même que celles de y, $\frac{dy}{da}$, multipliant par $e^a \, a^{\alpha+\beta}$, et faisant $a = 0$, on trouvera:

$$C = \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx \, . \, x^{\beta+\alpha-1} \int_0^1 dx \, . \, x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1},$$

c'est-à-dire

$$C = \Gamma(\alpha+\beta) \, . \, \frac{\Gamma(\alpha) \, . \, \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \Gamma(\alpha) \, . \, \Gamma(\beta).$$

On aura donc

$$\Gamma(\alpha) \, . \, \Gamma(\beta) = \int_0^1 e^{-ax} \, dx \, . \, x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx \, . \, x^{\beta-1} (a+x)^{\alpha}$$

$$-a\int_0^1 e^{-ax}\,dx\,.\,x^{\alpha}\,(1-x)^{\beta-1}\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx\,.\,x^{\beta-1}\,(a+x)^{\alpha-1}$$

Lorsque $\beta = 1-\alpha$, on a

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi} = \int_0^1 \frac{dx}{x} e^{-ax}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-x}dx\,.\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\alpha},$$

$$-a\int_0^1 dx\,.\,e^{-ax}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x+a}e^{-x}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\alpha}$$

IV. Soit

$$y = \int_0^{\infty} e^{ax-x^2}\,x^{\alpha-1}\,dx, \text{ où } \alpha > 0.$$

En différentiant on aura

$$\frac{dy}{da} = \int_0^{\infty} e^{ax-x^2}\,x^{\alpha}.dx,\quad \frac{d^2y}{da^2} = \int_0^{\infty} e^{ax-x^2}\,x^{\alpha+1}\,dx.$$

Or $\qquad d(e^{ax-x^2}x^{\alpha}) = dx\,.\,e^{ax-x^2}x^{\alpha-1}(\alpha + ax - 2x^2)$,

donc en intégrant depuis $x=0$, jusqu'à $x=\infty$, substituant les valeurs des intégrales en y, $\frac{dy}{da}$ et $\frac{d^2y}{da^2}$ et divisant par -2 on aura:

$$\frac{d^2y}{da^2} - \tfrac{1}{2}a\,.\,\frac{dy}{da} - \tfrac{1}{2}\alpha\,.\,y = 0.$$

Cétte équation conserve la même forme lorsqu'on remplace a par $-a$, donc

$$y = y_1 = \int_0^{\infty} e^{-ax-x^2}x^{\alpha-1}\,dx$$

est de même une intégrale particulière de cette équation. p étant $= -\tfrac{1}{2}a$, on a $e^{-\int p da} = C\,.\,e^{\frac{a^2}{4}}$, et par conséquent,

$$y_1\,.\,\frac{dy}{da} - y\,.\,\frac{dy_1}{da} = C\,.\,e^{\frac{a^2}{4}}.$$

Si, pour trouver la quantité constante C, on fait $a=0$, on trouvera:

$$y = \int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{\alpha-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\frac{dy}{da} = \int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{\alpha}\,.\,dx = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

$$y_1 = \int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{\alpha-1}\,dx = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\frac{dy_1}{da} = -\int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{\alpha}\,.\,dx = -\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

donc en substituant:

$$C = \tfrac{1}{2}\,.\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\,.\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

et par suite

$$\tfrac{1}{4}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right).e^{\frac{a^2}{4}} = \int_0^\infty e^{ax-x^2}dx.x^{\alpha-1}.\int_0^\infty e^{-ax-x^2}dx.x^{\alpha}$$
$$+\int_0^\infty e^{ax-x^2}dx.x^{\alpha}.\int_0^\infty e^{-ax-x^2}dx.x^{\alpha-1}.$$

Si l'on met $a\sqrt{-1}$ à la place de a, on obtient la formule suivante:

$$\tfrac{1}{4}.\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right).e^{-\frac{a^2}{4}} = \int_0^\infty dx.e^{-x^2}(\cos ax).x^{\alpha-1}.\int_0^\infty dx.e^{-x^2}(\cos ax).x^{\alpha}$$
$$+\int_0^\infty dx.e^{-x^2}(\sin ax).x^{\alpha-1}.\int_0^\infty dx.e^{-x^2}(\sin ax).x^{\alpha}.$$

Note. **Les quantités constantes (exposants), qui se trouvent dans les intégrales de ce mémoire, doivent avoir de telles valeurs que les intégrales ne deviennent pas infinies. Ces valeurs sont faciles à trouver.**

XI.

Sur les fonctions qui satisfont à l'équation
$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$

L'équation

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx),$$

est satisfaite lorsque

$$fy = \tfrac{1}{2}y \text{ et } \varphi x = \psi x = \log x;$$

car cela donne

$$\log x + \log y = \log xy;$$

de même lorsque

$$fy = \sqrt{(1-y^2)} \text{ et } \varphi x = \psi x = \text{arc sin } x,$$

ce qui donne

$$\text{arc sin } x + \text{arc sin } y = \text{arc sin } \left(x\sqrt{(1-y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)}\right).$$

Il serait possible qu'on pourrait encore satisfaire à la même équation d'autres manières. C'est ce que nous allons examiner.

Soit pour abréger

$$xfy + yfx = r,$$

l'équation de condition devient

$$1) \qquad \varphi x + \varphi y = \psi r.$$

En différentiant cette équation par rapport à x et à y, on aura en faisant usage de la notation de Lagrange:

$$\varphi' x = \psi' r \left(\frac{dr}{dx}\right) \text{ et } \varphi' y = \psi' r \left(\frac{dr}{dy}\right).$$

De ces équations on tire en éliminant la fonction $\psi' r$,

$$\varphi' x \left(\frac{dr}{dy}\right) = \varphi' y \left(\frac{dr}{dx}\right).$$

Or l'expression de r donne

$$2) \qquad \left(\frac{dr}{dx}\right) = fy + yf'x \text{ et } \left(\frac{dr}{dy}\right) = fx + xf'y$$

donc en substituant,

$$3)\qquad \varphi'y\,.\,(fy + yf'x) = \varphi'x\,.\,(fx + xf'y).$$

En donnant maintenant à la quantité variable y la valeur particulière zéro, ce qui est permis, parce que x et y sont des quantités indépendantes entre elles, et en faisant pour abréger,

$$\varphi'0 = a,\ f0 = \alpha,\ f'0 = \alpha',$$

l'équation (3) prendra la forme,

$$a\alpha - \varphi'x\,(fx + \alpha'x) = 0,$$

d'où l'on tire en écrivant y au lieu de x,

$$a\alpha - \varphi'y\,(fy + \alpha'y) = 0.$$

Cés deux équations donnent,

$$4)\qquad \varphi'x = \frac{a\alpha}{fx + \alpha'x} \text{ et } \varphi'y = \frac{a\alpha}{fy + \alpha'y}\,;$$

donc en intégrant,

$$5)\qquad \varphi x = a\alpha \int \frac{dx}{fx + \alpha'x}.$$

De cette manière la fonction φx est déterminée par fx. Il s'agit donc de trouver la fonction fx. En substituant dans l'équation (3) les expressions (4) des fonctions $\varphi'x$ et $\varphi'y$, et réduisant, on trouvera:

$$6)\qquad (fx + \alpha'x)(fy + yf'x) = (fy + \alpha'y)(fx + xf'y)$$

d'où l'on tire en développant

$$7)\ fxfy + \alpha'xfy + yfxf'x + \alpha'xyf'x - fxfy - \alpha'yfx - xfyf'y - \alpha'xyf'y = 0,$$

ou bien

$$8)\qquad x(\alpha'fy - fyf'y - \alpha'yf'y) - y\,(\alpha'fx - fxf'x - \alpha'xf'x) = 0,$$

ou en divisant par xy

$$9)\qquad \frac{1}{y}(\alpha'fy - fyf'y - \alpha'yf'y) - \frac{1}{x}(\alpha'fx - fxf'x - \alpha'xf'x) = 0,$$

Les quantités x et y étant indépendantes entre elles, cette équation ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$\frac{1}{y}(\alpha'fy - fyf'y - \alpha'yf'y) = \frac{1}{x}(\alpha'fx - fxf'x - \alpha'xf'x) = \text{Const.}$$

Soit donc

$$10)\qquad \frac{1}{x}(\alpha'fx - fxf'x - \alpha'xf'x) = m,$$

et on aura:

$$11)\qquad f'x\,(fx + \alpha'x) + (mx - \alpha'fx) = 0.$$

Par cette équation la fonction fx est déterminée. On peut l'intégrer en faisant

$$fx = xz;$$

car alors on a $f'x \,.\, dx = zdx + xdz$,
d'où l'on tire en substituant,

$$(zdx + xdz)(xz + \alpha' x) + (mx - \alpha' xz)dx = 0,$$

ce qui donne en divisant par x,

$$(zdx + xdz)(z + \alpha') + (m - \alpha' z)dx = 0,$$

ou $$\bigl(z(z + \alpha') + m - \alpha' z\bigr)\, dx + xdz\,(z + \alpha') = 0,$$

ou bien $$(z^2 + m)\, dx + xdz\,(z + \alpha') = 0,$$

ou en divisant par $x\,(z^2 + m)$,

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz\,(z + \alpha')}{z^2 + m},$$

donc en intégrant,

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{zdz}{z^2 + m} - \alpha' \int \frac{dz}{z^2 + m}.$$

Soit $m = -n^2$, on aura

$$\int \frac{dx}{x} = \log x, \int \frac{zdz}{z^2 - n^2} = \tfrac{1}{2} \log (z^2 - n^2), \int \frac{dz}{z^2 - n^2} = \frac{1}{2n} \log \frac{z-n}{z+n},$$

donc en substituant et ajoutant une constante c,

$$\log c - \log x = \tfrac{1}{2} \log (z^2 - n^2) + \frac{\alpha'}{2n} \log \frac{z-n}{z+n},$$

ou $$\log \frac{c}{x} = \log \left\{ (z^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{z-n}{z+n}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}} \right\}$$

et de là

$$\frac{c}{x} = (z^2 - n^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{z-n}{z+n}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}}$$

Mais on avait $fx = xz$; donc $z = \frac{fx}{x}$, et par suite en substituant,

$$\frac{c}{x} = \frac{((fx)^2 - n^2x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \left(\frac{fx - nx}{fx + nx}\right)^{\frac{\alpha'}{2n}},$$

ou bien

$$c = (fx - nx)^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{2n}} (fx + nx)^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha'}{2n}},$$

ou en élévant à la $2n^{me}$ puissance,

12) $$c^{2n} = (fx - nx)^{n + \alpha'} (fx + nx)^{n - \alpha'}$$

$$x = 0 \text{ donne } c = \alpha, \text{ à cause de } f0 = \alpha.$$

Voila l'équation de laquelle dépend la fonction fx. Elle n'est pas en général résoluble, parce que n et α' sont deux quantités indéterminées, qui peuvent

même être imaginaires. L'équation (12) contient la forme la plus générale de la fonction fx, et on peut démontrer qu'elle satisfait à l'équation de condition donnée dans toute sa généralité. En effet la fonction fx satisfait à l'équation (11), et on voit par la forme de l'équation (9) qu'elle satisfait aussi à cette équation. Or l'équation (6) est l'équation (9) sous une forme différente. Donc la fonction fx satisfait aussi à l'équation (6). De l'équation (6) on tire l'équation (3) en faisant $\varphi' x = \frac{a\alpha}{fx + \alpha' x}$, et l'équation (3) donne en faisant $xfy + yfx = r$:

$$\varphi' x \left(\frac{dr}{dy}\right) - \varphi' y \left(\frac{dr}{dx}\right) = 0.$$

En intégrant cette équation différentielle partielle par les regles connues on trouvera:

$$r = F(\varphi x + \varphi y),$$

et de là

$$\varphi x + \varphi y = \psi r,$$

ou

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx),$$

ce qui est l'équation de condition donnée.

Il reste encore à trouver la fonction ψ. Pour cet effet soit $y = 0$, on aura en remarquant que $f0 = \alpha$,

$$\varphi x = \psi(\alpha x) - \varphi 0,$$

ou en mettant $\frac{x}{\alpha}$ au lieu de x,

$$\psi x = \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \varphi 0.$$

On trouve donc, en résumant, que les formes les plus générales des fonctions, satisfaisant à l'équation de condition,

$$\varphi x + \varphi y = \psi(xfy + yfx)$$

sont les suivantes:

$$\varphi x = a\alpha \int \frac{dx}{fx + \alpha' x}$$

et

$$\psi x = \varphi 0 + \varphi \frac{x}{\alpha} = a\alpha \int \frac{dx}{\alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \alpha' x} + \varphi 0,$$

où fx dépend de l'équation

$$\alpha^{2n} = (fx - nx)^{n+\alpha'} (fx + nx)^{n-\alpha'}.$$

Soit par exemple

$$n = \alpha' = \tfrac{1}{2},$$

on aura

$$\alpha = fx - \tfrac{1}{2}x;$$

donc $$fx = \alpha + \tfrac{1}{2}x;$$

et par suite $$\varphi x = a\alpha \int \frac{dx}{\alpha + x} = a\alpha \log(\alpha + x) + k,$$

$$\psi x = \varphi 0 + \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = 2k + a\alpha \log \alpha + a\alpha \log\left(\alpha + \frac{x}{\alpha}\right),$$

ou $$\psi x = 2k + a\alpha \log(\alpha^2 + x).$$

L'équation de condition devient donc

$$k + a\alpha \log(\alpha + x) + k + a\alpha \log(\alpha + y) = 2k + a\alpha \log(\alpha^2 + x(\alpha + \tfrac{1}{2}y) + y(\alpha + \tfrac{1}{2}x));$$

ce qui a effectivement lieu, car les deux membres de cette équation se reduisent à

$$2k + a\alpha \log(\alpha^2 + \alpha x + \alpha y + xy).$$

La fonction φx est trouvée ci-dessus en forme d'une intégrale. On peut aussi trouver une forme finie pour cette fonction par des logarithmes en supposant la fonction fx connue. Savoir soit

$$fx + nx = v \quad \text{et } fx - nx = t,$$

l'équation (12) donne

$$\alpha^{2n} = v^{n-\alpha'} . t^{n+\alpha'},$$

donc $$t^{n+\alpha'} = \alpha^{2n} . v^{\alpha'-n},$$

et de là $$t = \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} \cdot v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}.$$

Or $$fx = \tfrac{1}{2}(v + t) \quad \text{et} \quad nx = \tfrac{1}{2}(v - t),$$

donc $$fx = \tfrac{1}{2}\left\{v + \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} \cdot v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}}\right\},$$

et $$x = \frac{1}{2n} v - \frac{1}{2n} . \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} \cdot v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}},$$

d'où l'on tire en différentiant

$$dx = \left\{\frac{1}{2n} - \frac{\alpha' - n}{2n(\alpha'+n)} \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} \cdot v^{\frac{-2n}{\alpha'+n}}\right\} dv.$$

On trouve de même

$$fx + \alpha' x = \left(\tfrac{1}{2} + \frac{\alpha'}{2n}\right) v + \left(\tfrac{1}{2} - \frac{\alpha'}{2n}\right) \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} \cdot v^{\frac{\alpha'-n}{\alpha'+n}},$$

ou bien $$fx + \alpha' x = (n + \alpha')\left\{\frac{1}{2n} - \frac{\alpha' - n}{2n(\alpha'+n)} \alpha^{\frac{2n}{n+\alpha'}} \cdot v^{-\frac{2n}{\alpha'+n}}\right\} v,$$

donc $$\frac{dx}{fx + \alpha' x} = \frac{dv}{(n+\alpha')v};$$

ce qui donne en intégrant,

$$\int \frac{dx}{fx+\alpha' x} = \frac{1}{n+\alpha'} \log cv = \frac{\varphi x}{a\alpha};$$

où c est une constante arbitraire. En mettant donc peur v sa valeur $fx + nx$, on aura

$$13) \qquad \varphi x = \frac{a\alpha}{n+\alpha'} \log (cnx + cfx).$$

Dans les deux cas, $\alpha' = \infty$, et $n = 0$, la fonction fx prend une valeur particulière. Pour la trouver, il faut recourir à l'équation différentielle (11).

Soit d'abord $n = 0$,

l'équation (11) donne, à cause de $m = -n^2$:

$$f'x(fx + \alpha' x) - \alpha' fx = 0.$$

Soit $$fx = zx,$$

on trouvera $$\frac{dx}{x} = -\frac{dz(z+\alpha')}{z^2} = -\frac{dz}{z} - \frac{\alpha' dz}{z^2},$$

et en intégrant

$$\log c' + \log x = -\log z + \frac{\alpha'}{z}, \text{ ou } \log(c'xz) = \frac{\alpha'}{z},$$

ou, puisque $$z = \frac{fx}{x}$$

$$\log (c'fx) = \frac{\alpha' x}{fx}, \text{ ou } \alpha' x = fx \log (c'fx).$$

Pour $x = 0$, on a $0 = \alpha \log c'\alpha$, donc $c'\alpha = 1$ et $c' = \frac{1}{\alpha}$,

donc 14) $$\alpha' x = fx \log \left(\frac{fx}{\alpha}\right),$$

ou $$e^{\alpha' x} = \left(\frac{fx}{\alpha}\right)^{fx}.$$

Cette équation détermine donc la fonction fx dans le cas où $n = 0$. L'équation (13) donne dans ce cas:

$$\varphi x = \frac{a\alpha}{\alpha'} \log (cfx) = \frac{a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{a\alpha}{\alpha'} \log \left(\frac{fx}{\alpha}\right);$$

en vertu de (14) on a $$\log \left(\frac{fx}{\alpha}\right) = \frac{\alpha' x}{fx};$$

donc 15) $$\varphi x = \frac{a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{a\alpha x}{fx}.$$

De plus

$$16) \qquad \psi x = \varphi 0 + \varphi \left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{2a\alpha}{\alpha'} \log c\alpha + \frac{ax}{f\left(\frac{x}{\alpha}\right)}.$$

L'équation de condition devient donc:

$$\frac{a\alpha}{\alpha'}\log c\alpha + \frac{a\alpha x}{fx} + \frac{a\alpha}{\alpha'}\log c\alpha + \frac{a\alpha y}{fy} = \frac{2a\alpha}{\alpha'}\log c\alpha + \frac{a\,(xfy+yfx)}{f\left(\frac{xfy+yfx}{\alpha}\right)}$$

c'est-à-dire on aura

17) $$\alpha f\left(\frac{xfy+yfx}{\alpha}\right) = fx\,fy.$$

Pour examiner cette équation nous mettrons au lieu de x et de y leurs valeurs de l'équation (14) savoir $\frac{fx}{\alpha'}\log\left(\frac{fx}{\alpha}\right)$ et $\frac{fy}{\alpha'}\log\left(\frac{fy}{\alpha}\right)$; ce qui donne:

18) $$\alpha f\left\{\frac{fx\,fy\log\left(\frac{fx fy}{\alpha^2}\right)}{\alpha\alpha'}\right\} = fy\,fx = \alpha fr,$$

en faisant pour abréger

19) $$\frac{fx\,fy\log\left(\frac{fx\,fy}{\alpha^2}\right)}{\alpha\alpha'} = r.$$

Il suit de la:

$$2\log\alpha + \log\frac{fr}{\alpha} = \log(fx\,fy).$$

Or en vertu de l'équation (14) on a $\log\frac{fr}{\alpha} = \frac{\alpha' r}{fr}$,

donc en substituant

20) $$2\log\alpha + \frac{\alpha' r}{fr} = \log(fx\,fy).$$

Mais puisque $fr = \frac{fx\,fy}{\alpha}$ (18), on a en vertu de (19) $\frac{fr\log\left(\frac{fx\,fy}{\alpha^2}\right)}{\alpha'} = r$,

donc $\frac{\alpha' r}{fr} = \log\left(\frac{fx fy}{\alpha^2}\right)$, et par conséquent: $2\log\alpha + \log\left(\frac{fx fy}{\alpha^2}\right) = \log(fx\,fy)$, ce qui a, comme on voit aisément, effectivement lieu.

Soit ensuite $$\alpha' = \infty.$$

En mettant dans ce cas l'équation (11) sous la forme:

$$\frac{fx\,f'x}{\alpha'} + xf'x + \frac{mx}{\alpha'} - fx = 0,$$

il est clair qu'on doit avoir $xf'x - fx = 0$, lorsque m est fini. Il faut donc que

$$\frac{f'x.dx}{fx} = \frac{dx}{x}, \text{ ou } fx = cx.$$

Si $$m = -p\alpha'$$

on a $$xf'x - px - fx = 0.$$

Soit $$fx = xz,$$
on aura $$x(xdz + zdx) - (p + xz)\,dx = 0,$$
ou $$xdz = pdx;$$
donc $$z = p \log cx = \frac{fx}{x}, \text{ et par suite}$$
$$fx = px \log cx.$$

Pour trouver φx, on substituera la valeur de la fonction fx dans l'équation (3), et l'on aura à cause de $f'x = p \log cx + p$:
$$\varphi' y\,(py \log cy + yp \log cx + py) - \varphi' x\,(px \log cx + xp \log cy + px) = 0;$$
donc en divisant par $p\,(\log c^2xy + 1)$
$$y\varphi' y - x\varphi' x = 0,$$
donc $$x\varphi' x = k \text{ et } d\varphi x = \frac{kdx}{x},$$
et de là $$\varphi x = k \log mx.$$

L'équation de condition donnée deviendra donc:
$$k \log mx + k \log my = \psi\,(xpy \log cy + ypx \log cx),$$
ou $$k \log m^2xy = \psi\,(pxy \log c^2xy),$$
ou en faisant $$pxy \log c^2xy = r \text{ et } xy = v,$$
$$\psi r = k \log m^2 v.$$

Par le même procédé, qui a donné ci-dessus les fonctions qui satisfont à l'équation,
$$\varphi x + \varphi y = \psi\,(xfy + yfx),$$
on peut trouver les fonctions inconnues dans toute autre équation à deux quantités variables. En effet, on peut par des différentiations successives par rapport aux deux quantités variables trouver autant d'équations qui sont nécessaires, pour éliminer des fonctions quelconques, de sorte qu'on parviendra à une équation qui ne contient qu'une seule de ces fonctions, et qui sera en général une équation différentielle d'un certain ordre. On peut donc en général trouver chacune de ces fonctions par une seule équation. Il suit de là qu'une telle équation n'est que très rarement possible. Car, comme la forme d'une fonction quelconque contenue dans l'équation de condition donnée, en vertu de l'équation même, doit être indépendante des formes des autres fonctions, il est évident qu'en général on ne peut considérer aucune de ces fonctions comme donnée. Ainsi par exemple l'équation ci-dessus ne pourrait plus être satisfaite, si la fonction fx eût eu une forme différente de celle qu'on vient de trouver.

X.

Note sur le mémoire No. 4 du second tome du journal de M. Crelle, ayant pour titre "remarques sur les séries infinies et leur convergence."

On trouve pag. 34 dans ce mémoire le théorème suivant pour reconnaître si une série est convergente ou divergente:

"Si l'on trouve que dans une série infinie le produit du n^{me} terme ou du "n^{me} des groupes de termes qui conservent le même signe, par n, est zéro pour "$n=\infty$, on peut regarder cette seule circonstance comme une marque, que la "série est convergente; et réciproquement, la série ne peut pas être conver-"gente si le produit $n.a_n$ n'est pas nul pour $n=\infty$."

La dernière partie de ce théorème est très juste, mais la première ne semble pas l'être. Par exemple la série

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}\cdots\cdot\frac{1}{n\log n}$$

est divergente quoique $na_n=\frac{1}{\log n}$ soit zéro pour $n=\infty$. En effet les logarithmes hyperboliques dont il est question sont toujours moindre que leurs nombres moins 1, c'est-à-dire, on a toujours $\log(1+x)<x$. Si $x>1$ cela est évident. Si $x<1$ on a

$$\log(1+x)=x-x^2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}x)-x^4(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}x)\ldots$$

donc aussi dans ce dernier cas $\log(1+x)<x$, puisque $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}x$ sont tous positifs. En faisant $x=\frac{1}{n}$, cela donne

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n} \text{ ou bien } \log\frac{1+n}{n}<\frac{1}{n},$$

ou

$$\log(1+n)<\frac{1}{n}+\log n<\left(1+\frac{1}{n\log n}\right)\log n:$$

donc

$$\log\log(1+n)<\log\log n+\log\left(1+\frac{1}{n\log n}\right).$$

Mais puisque $\log(1+x)<x$, on a $\log\left(1+\frac{1}{n\log n}\right)<\frac{1}{n\log n}$, donc en vertu de l'expression précédente,

$$\log\log(1+n)<\log\log n+\frac{1}{n\log n}.$$

En faisant successivement $n=2, 3, 4, \ldots$ on trouve

$$\log\log 3<\log\log 2+\frac{1}{2\log 2},$$

$$\log\log 4<\log\log 3+\frac{1}{3\log 3},$$

$$\log\log 5<\log\log 4+\frac{1}{4\log 4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log\log(1+n)<\log\log n+\frac{1}{n\log n},$$

donc, en prenant la somme,

$$\log\log(1+n)<\log\log 2+\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}\cdots+\frac{1}{n\log n}.$$

Mais $\log\log(1+n)=\infty$ pour $n=\infty$, donc la somme de la série proposée $\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\frac{1}{4\log 4}\cdots+\frac{1}{n\log n}$ est infiniment grande et par conséquent cette série est divergente. Le théorème énoncé dans l'endroit cité est donc en défaut dans ce cas.

En général on peut démontrer qu'il est impossible de trouver une fonction φn telle, qu'une série quelconque $a_0+a_1+a_2+a_3\ldots+a_n$, dont nous supposons tous les termes positifs, soit convergente, si $\varphi n.a_n$ est zéro pour $n=\infty$ et divergente dans le cas contraire. C'est ce qu'on peut faire voir à l'aide du théorème suivant.

Si la série $a_0+a_1+a_2\ldots+a_n\ldots$ est divergente, la suivante

$$\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2}{a_0+a_1}+\frac{a_3}{a_0+a_1+a_2}\cdots+\frac{a_n}{a_0+a_1\ldots+a_{n-1}}\cdots$$

le sera aussi. En effet, en remarquant que les quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont positives, on a en vertu du théorème $\log(1+x)<x$, démontré ci-dessus,

$$\log(a_0+a_1+a_2\ldots+a_n)-\log(a_0+a_1+a_2\ldots a_{n-1})$$

c'est-à-dire

$$\log\left(1+\frac{a_n}{a_0+a_1+a_2\ldots+a_{n-1}}\right)<\frac{a_n}{a_0+a_1+a_2\ldots+a_{n-1}}$$

donc, en faisant successivement $n=1, 2, 3, \ldots$:

$$\log(a_0+a_1)-\log a_0<\frac{a_1}{a_0},$$
$$\log(a_0+a_1+a_2)-\log(a_0+a_1)<\frac{a_2}{a_0+a_1},$$
$$\log(a_0+a_1+a_2+a_3)-\log(a_0+a_1+a_2)<\frac{a_3}{a_0+a_1+a_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\log(a_0+a_1\ldots+a_n)-\log(a_0+a_1\ldots+a_{n-1})<\frac{a_n}{a_0+a_1\ldots+a_{n-1}},$$

et en prenant la somme,

$$\log(a_0+a_1\ldots+a_n)-\log a_0<\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2}{a_0+a_1}\ldots+\frac{a_n}{a_0+a_1\ldots+a_{n-1}}.$$

Mais si la série $a_0+a_1+a_2\ldots+a_n$ est divergente, sa somme est infinie et le logarithme de cette somme l'est également; donc la somme de la série $\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2}{a_0+a_1}\ldots+\frac{a_n}{a_0+a_1\ldots+a_{n-1}}$ est aussi infiniment grande, et cette série est par conséquent divergente, si la série $a_0+a_1+a_2\ldots+a_{n-1}$ l'est. Cela posé, supposons que φn soit une fonction de n telle, que la série $a_0+a_1+a_2\ldots+a_n\ldots$ soit convergente ou divergente selon que $\varphi n.a_n$ est zéro ou non pour $n=\infty$. Alors la série

$$\frac{1}{\varphi 1}+\frac{1}{\varphi 2}+\frac{1}{\varphi 3}+\frac{1}{\varphi 4}\ldots+\frac{1}{\varphi n}\ldots$$

sera divergente et la série

$$\frac{1}{\varphi 2.\frac{1}{\varphi 1}}+\frac{1}{\varphi 3\left(\frac{1}{\varphi 1}+\frac{1}{\varphi 2}\right)}+\frac{1}{\varphi 4\left(\frac{1}{\varphi 1}+\frac{1}{\varphi 2}+\frac{1}{\varphi 3}\right)}\ldots$$
$$+\frac{1}{\varphi n\left(\frac{1}{\varphi 1}+\frac{1}{\varphi 2}+\frac{1}{\varphi 3}\ldots\frac{1}{\varphi(n-1)}\right)}\ldots$$

convergente; car dans la première on a $a_n\varphi n=1$ et dans la seconde $a_n\varphi n=0$ pour $n=\infty$. Or selon le théorème établi plus haut, la seconde série est nécessairement divergente, en même temps que la première; donc une fonction φn telle qu'on l'a supposée n'existe pas. En faisant $\varphi n=n$, les deux séries en question deviendront

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\ldots+\frac{1}{n}\ldots$$

et $$\frac{1}{2.1}+\frac{1}{3(1+\frac{1}{2})}+\frac{1}{4(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}\ldots+\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots\frac{1}{n-1}\right)}\ldots$$

qui par conséquent sont divergentes toutes deux.

XI.

Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement.

Il est vrai que les équations algébriques ne sont pas résolubles généralement; mais il y en a une classe particulière de tous les degrés dont la résolution algébrique est possible. Telles sont p. ex. les équations de la forme $x^n - 1 = 0$. La résolution de ces équations est fondée sur certaines relations qui existent entre les racines. J'ai essayé à généraliser cette remarque en supposant que deux racines d'une équation donnée soient tellement liées entre elles, qu'on puisse exprimer rationnellement l'une par l'autre, et j'ai trouvé, qu'une telle équation peut toujours être résolue à l'aide d'un certain nombre d'équations *moins élevées*. Il y a même des cas où l'on peut résoudre *algébriquement* l'équation donnée elle même. Cela arrive p. ex. toutes les fois que, l'équation donnée étant irréductible, son degré est un nombre premier. La même chose a lieu encore si toutes les racines d'une équation peuvent être exprimées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x, \ldots \theta^{n-1} x, \text{ ou } \theta^n x = x,$$

θx étant une fonction rationnelle de x, et $\theta^2 x$, $\theta^3 x, \ldots$ des fonctions de la même forme de θx, prise deux fois, trois fois, etc....

L'équation $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, si n est un nombre premier, est dans ce cas; car en désignant par α une racine primitive pour le module n, on peut, comme on sait, exprimer les $n - 1$ racines par:

$$x,\ x^\alpha,\ x^{\alpha^2},\ x^{\alpha^3}, \ldots . x^{\alpha^{n-2}}, \text{ où } x^{\alpha^{n-1}} = x,$$

c'est-à-dire en faisant $x^\alpha = \theta x$, par:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x, \ldots . \theta^{n-2} x, \text{ où } \theta^{n-1} x = x.$$

La même propriété convient à une certaine classe d'équations qu'offre la théorie des fonctions elliptiques.

En général je suis parvenu à démontrer le théorème suivant:

"Si les racines d'une équation d'un degré quelconque sont liées entre-elles de sorte, que *toutes* ces racines peuvent être exprimées rationnellement au moyen

de l'une d'elles, que nous désignerons par x; si de plus, en désignant par θx, $\theta_1 x$ deux autres quelconques des racines en question, on a

$$\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x,$$

l'équation dont il s'agit sera toujours résoluble algébriquement. De même si l'on suppose l'équation irréductible et son degré exprimé par

$$\alpha_1^{\nu_1} . \alpha_2^{\nu_2} \dots . \alpha_\omega^{\nu_\omega},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\omega$ sont des nombres premiers différents, on pourra réduire la résolution de cette équation à celle de ν_1 équations du degré α_1, de ν_2 équations du degré α_2 de ν_3 équations du degré α_3 etc."

Après avoir présenté généralement cette théorie, je l'appliquerai aux fonctions circulaires et elliptiques.

---

§. 1.

Nous allons d'abord considérer le cas où l'on suppose que deux racines d'une équation irréductible*) soient liées tellement entre-elles, que l'une puisse être exprimée rationnellement par l'autre.

Soit

1) $$\varphi x = 0$$

une équation du degré μ, et x' et x_1 les deux racines qui sont liées entre-elles par l'équation

2) $$x' = \theta x_1,$$

où θx désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues. La quantité x' étant une des racines de l'équation, on aura $\varphi(x') = 0$ et en vertu de (2).

3) $$\varphi(\theta x_1) = 0.$$

Je dis maintenant que cette équation aura encore lieu, si au lieu de x_1 on met une autre racine quelconque de l'équation proposée. On aura effectivement le théorème suivant**).

---

*) Une équation $\varphi x = 0$, dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles d'un certain nombre de quantités connues $a, b, c, \dots$ s'appelle *irréductible*, lorsqu'il est impossible d'exprimer ses racines par une équation moins élevée, dont les coefficiens soient également des fonctions rationnelles de $a, b, c, \dots$

**) Ce théorème se démontrera aisément comme il suit:
Quelle que soit la fonction rationnelle fx, on peut toujours faire $fx = \frac{M}{N}$, où M et N sont des fonctions entières de x, qui n'ont pas de facteur commun; mais une fonction entière de x peut toujours être mise sous la forme $P + Q . \varphi x$, où P et Q sont des

Théorème I. "Si une des racines d'une équation irréductible $\varphi x = 0$ satisfait à une autre équation $fx = 0$, où fx désigne une fonction rationnelle de x et des quantités connues qu'on suppose contenues dans φx; cette dernière équation se trouvera encore satisfaite en mettant au lieu de x une racine quelconque de l'équation $\varphi x = 0$; mais le premier membre de l'équation (3) est une fonction rationnelle de x, donc on aura

4) $$\varphi(\theta x) = 0, \quad \text{si } \varphi x = 0,$$

c'est-à-dire, si x est une racine de l'équation $\varphi x = 0$, la quantité θx le sera également.

Maintenant, en vertu de ce qui précède, θx_1 est une racine de l'équation $\varphi x = 0$, donc $\theta\theta x_1$ le sera aussi; également $\theta\theta\theta x_1$, etc. le seront encore en répétant l'opération désignée par θ un nombre quelconque de fois.

Soit pour abréger

$$\theta\theta x_1 = \theta^2 x_1;\ \theta\theta^2 x_1 = \theta^3 x_1;\ \theta\theta^3 x_1 = \theta^4 x_1 \text{ etc.}$$

on aura la série

5) $$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1,\ \theta^3 x_1,\ \theta^4 x_1, \ldots$$

et toutes ces quantités seront des racines de l'équation $\varphi x = 0$, La série (5) aura une infinité de termes, mais l'équation $\varphi x = 0$ n'ayant qu'un nombre fini de racines différentes, il faut que plusieurs quantités de la série (5) soient égales entre-elles.

Supposons donc p. ex

$$\theta^m x_1 = \theta^{m+n} x_1,$$

ou bien

6) $$\theta^n(\theta^m x_1) - \theta^m x_1 = 0,$$

en observant que $\theta^{m+n} x_1 = \theta^n \theta^m x_1$.

Le premier membre de l'équation (6) est une fonction rationnelle de $\theta^m x_1$; or cette quantité est une racine de l'équation $\varphi x = 0$, donc en vertu du théorème énoncé plus haut, on pourra mettre x_1 au lieu de $\theta^m x_1$. Cela donne

---

fonctions-entières, telles, que le degré de P soit moindre que celui de la fonction φx. Donc, en faisant $M = P + Q.\varphi x$, on aura $fx = \frac{P + Q.\varphi x}{N}$. Cela posé, soit x_1 la racine de $\varphi x = 0$, qui satisfait en même temps à $fx = 0$; x_1 sera également une racine de l'équation $P = 0$. Or si P n'est pas zéro pour une valeur quelconque de x, cette équation donnera x, comme racine d'une équation d'un degré moindre que celui de $\varphi x = 0$; ce qui est contre l'hypothèse; donc $P = 0$ et par suite $fx = \varphi x \frac{Q}{N}$, d'où l'on voit que fx sera égal à zéro en même tems que φx q. e. d.

7) $$\theta^n x_1 = x_1,$$
où l'on peut supposer que n ait la plus petite valeur qui existe, en sorte que toutes les quantités

8) $$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$$
soient différentes entre-elles.

L'équation (7) donnera
$$\theta^k \theta^n x_1 = \theta^k x_1, \text{ c'est-à-dire: } \theta^{n+k} x_1 = \theta^k x_1.$$

Cette formule fait voir qu'à partir du terme $\theta^{n-1} x_1$, les termes de la suite (8) se reproduiront dans le même ordre. Les n quantités (8) seront donc les seules de la série (5) différentes entre-elles.

Cela posé, si $\mu > n$, soit x_2 une autre racine de l'équation proposée, qui n'est pas contenue dans la suite (8), il suit du théorème I., que toutes les quantités

9) $$x_2,\ \theta x_2,\ \theta^2 x_2, \ldots \theta^{n-1} x_2, \ldots$$
seront également des racines de l'équation proposée. Or je dis que cette suite ne contiendra que n quantités différentes entre-elles et des quantités (8). En effet, ayant $\theta^n x_1 - x_1 = 0$, on aura en vertu du théorème I: $\theta^n x_2 = x_2$ et par suite:
$$\theta^{n+k} x_2 = \theta^k x_2.$$
Donc les seules quantités de la série (9) qui *pourront* être différentes entre-elles, seront les n premières

10) $$x_2,\ \theta x_2,\ \theta^2 x_2, \ldots \theta^{n-1} x_2.$$
Or celles-ci seront néccessairement différentes entre-elles et des quantités (8). En effet, si l'on avait
$$\theta^m x_2 = \theta^\nu x_2,$$
où m et ν sont moindre que n, il en résulterait $\theta^m x_1 = \theta^\nu x_1$, ce qui est impossible, car toutes les quantités (8) sont différentes entre-elles. Si au contraire on avait:
$$\theta^m x_2 = \theta^\nu x_1,$$
il en résulterait
$$\theta^{n-m} \theta^\nu x_1 = \theta^{n-m} \theta^m x_2 = \theta^{n-m+m} x_2 = \theta^n x_2 = x_2$$
donc
$$x_2 = \theta^{n-m+\nu} x_1,$$
c'est-à-dire la racine x_2 serait contenue dans la série (8), ce qui est contre l'hypothèse.

Le nombre des racines contenues dans (8) et (10) est $2n$, donc μ sera ou égal à $2n$, ou plus grand que ce nombre.

Soit dans le dernier cas x_3 une racine différente des racines (8) et (10), on aura une nouvelle série de racines

$$x_3,\ \theta x_3,\ \theta^2 x_3, \ldots \theta^{n-1} x_3, \ldots$$

et on démontrera précisément de la même manière, que les n premières de ces racines sont différentes entre-elles et des racines (8) et (10).

En continuant ce procédé jusqu'à ce que toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$ soient épuisées, on verra que les μ racines de cette équation seront divisées en plusieurs groupes, composés de n termes; donc μ sera divisible par n, et en nommant m le nombre des groupes, on aura:

11) $$\mu = m . n .$$

Les racines elles mêmes seront:

12) $$\begin{cases} x_1, & \theta x_1, & \theta^2 x_1, \ldots & \theta^{n-1} x_1, \\ x_2, & \theta x_2, & \theta^2 x_2, \ldots & \theta^{n-1} x_2, \\ x_3, & \theta x_3, & \theta^2 x_3, \ldots & \theta^{n-1} x_3, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_m, & \theta x_m, & \theta^2 x_m, \ldots & \theta^{n-1} x_m . \end{cases}$$

Si $m = 1$, on aura $n = \mu$, et les μ racines de l'équation $\varphi x = 0$ seront exprimées par

13) $$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1, \ldots . \theta^{\mu-1} x_1 .$$

Dans ce cas comme on verra dans la suite, l'équation $\varphi x = 0$ est résoluble algébriquement. Mais la même chose n'aura pas toujours lieu lorsque m est plus grand que l'unité. On pourra seulement réduire la résolution de l'équation $\varphi x = 0$ à celle d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, dont les coefficiens dépendront d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré; c'est ce que nous allons démontrer dans le paragraphe suivant.

§. 2.

Considérons un quelconque des groupes (12), p. ex. le premier, et faisons

14) $$\begin{cases} (x - x_1)(x - \theta x_1)(x - \theta^2 x_1) \ldots (x - \theta^{n-1} x_1) \\ = x^n + A'_1 . x^{n-1} + A''_1 . x^{n-2} \ldots + A_1^{(n-1)} . x + A_1^{(n)} = 0, \end{cases}$$

les racines de cette équation seront

$$x_1,\ \theta x_1,\ \theta^2 x_1, \ldots . \theta^{n-1} x_1$$

et les coefficiens A'_1, $A''_1, \ldots . A_1^{(n)}$ seront des fonctions rationnelles et symé-

triques de ces quantités. Nous verrons qu'on peut faire dépendre le développement de ces coefficiens de la résolution d'une seule équation du degré m.

Pour le montrer, considérons en général une fonction quelconque rationnelle et symétrique de $x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$, et soit

15) $$y_1 = f(x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1)$$

cette fonction.

En mettant au lieu de x_1 successivement $x_2, x_3, \ldots x_m$, la fonction y_1 prendra différentes valeurs, que nous désignerons par $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$. Cela posé, si l'on forme une équation du degré m:

16) $$y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \ldots + p_{m-1} y + p_m = 0,$$

dont les racines sont $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$, je dis que les coefficiens de cette équation pourront être exprimés rationnellement par les quantités connues, qu'on suppose données par l'équation proposée.

Les quantités $\theta x_1, \theta^2 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$ étant des fonctions rationnelles de x_1, la fonction y_1 le sera également. Soit

17) $$\begin{cases} y_1 = F x_1, \\ \text{nous aurons aussi} \\ y_2 = F x_2;\ y_3 = F x_3; \ldots y_m = F x_m. \end{cases}$$

Mettant dans (15) successivement $\theta x_1, \theta^2 x_1, \theta^3 x_1, \ldots \theta^{n-1} x_1$ au lieu de x_1, et remarquant que $\theta^n x_1 = x_1$; $\theta^{n+1} x_1 = \theta x_1$; $\theta^{n+2} x_1 = \theta^2 x_1$, etc. il est clair que la fonction y_1 ne changera pas de valeur; on aura donc

$$y_1 = F x_1 = F(\theta x_1) = F(\theta^2 x_1) = \ldots = F(\theta^{n-1} x_1)$$

et également

$$y_2 = F x_2 = F(\theta x_2) = F(\theta^2 x_2) = \ldots = F(\theta^{n-1} x_2),$$

. . . .

$$y_m = F x_m = F(\theta x_m) = F(\theta^2 x_m) = \ldots = F(\theta^{n-1} x_m).$$

Élevant chaque membre de ces équations à la $\nu^{\text{ième}}$ puissance, on en tire:

$$y_1^\nu = \frac{1}{n} \cdot \left[(F x_1)^\nu + (F\theta x_1)^\nu + \ldots + (F\theta^{n-1} x_1)^\nu\right],$$

$$y_2^\nu = \frac{1}{n} \cdot \left[(F x_2)^\nu + (F\theta x_2)^\nu + \ldots + (F\theta^{n-1} x_2)^\nu\right],$$

. . . .

$$y_m^\nu = \frac{1}{n} \cdot \left[(F x_m)^\nu + (F\theta x_m)^\nu + \ldots + (F\theta^{n-1} x_m)^\nu\right],$$

En ajoutant ces dernières équations on aura la valeur de

$$y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \ldots + y_m^\nu$$

exprimée en fonction *rationnelle* et *symétrique* de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$, savoir:

$$19)\qquad y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \dots + y_m^\nu = \frac{1}{n}\,\Sigma(Fx)^\nu.$$

Le second membre de cette équation peut être exprimé rationnellement par les coefficiens de φx et θx, c'est-à-dire par des quantités connues. Donc en faisant

$$20)\qquad r_\nu = y_1^\nu + y_2^\nu + y_3^\nu + \dots + y_m^\nu,$$

on aura la valeur de r_ν, pour une valeur quelconque entière de ν. Or connaissant $r_1, r_2, \dots r_m$, on en pourra tirer rationnellement la valeur de toute fonction symétrique des quantités $y_1, y_2, \dots y_m$. On pourra donc trouver de cette manière tous les coefficiens de l'équation (16) et par conséquent déterminer toute fonction rationnelle et symétrique de x_1, θx_1, $\theta^2 x_1, \dots \theta^{n-1}x_1$ à l'aide d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré. Donc on aura de cette manière les coefficiens de l'équation (14), dont la résolution donnera ensuite la valeur de x_1 etc.

On voit par là qu'on peut ramener la résolution de l'équation $\varphi x = 0$, qui est du degré $\mu = m.n$, à celle d'un certain nombre d'équations du degré m et n. Il suffit même, comme nous allons voir, de résoudre une seule équation du degré m et m équations du degré n.

Soit ψx_1 un quelconque des coefficiens A_1', A_1'', $\dots A_1^{(n)}$ et faisons

$$21)\qquad t_\nu = y_1^\nu.\psi x_1 + y_2^\nu.\psi x_2 + y_3^\nu.\psi x_3 + \dots + y_m^\nu.\psi x_m.$$

Puisque $y_1^\nu.\psi x_1$ est une fonction symétrique des quantités x_1, $\theta x_1, \dots \theta^{n-1}x_1$, on aura, en remarquant que $\theta^n x_1 = x_1$; $\theta^{n+1}x_1 = \theta x_1$ etc.

$$y_1^\nu \psi x_1 = (Fx_1)^\nu.\psi x_1 = (F\theta x_1)^\nu.\psi\theta x_1 = \dots (F\theta^{n-1}x_1)^\nu.\psi\theta^{n-1}x_1,$$

donc:

$$y_1^\nu \psi x_1 = \frac{1}{n}.\left[(Fx_1)^\nu.\psi x_1 + (F\theta x_1)^\nu.\psi\theta x_1 + \dots (F\theta^{n-1}x_1)^\nu.\psi\theta^{n-1}x_1\right].$$

On trouvera de semblables expressions pour $y_2^\nu.\psi x_2$, $y_3^\nu.\psi x_3, \dots y_m^\nu.\psi x_m$, en mettant $x_2, x_3, \dots x_m$ à la place de x_1. En substituant ces valeurs, on voit que t_ν deviendra une fonction *rationnelle* et *symétrique* de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$. En effet on aura

$$22)\qquad t_\nu = \frac{1}{n}\,\Sigma(Fx)^\nu.\psi x.$$

Donc on peut exprimer t_ν rationnellement par des quantités connues.

Cela posé, en faisant $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots m-1$, la formule (21) donnera:

$$\begin{aligned}
\psi x_1 + \quad \psi x_2 + \ldots + \quad \psi x_m &= t_0, \\
y_1 \psi x_1 + y_2 \psi x_2 + \ldots + y_m \psi x_m &= t_1, \\
y_1^2 \psi x_1 + y_2^2 \psi x_2 + \ldots + y_m^2 \psi x_m &= t_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_1^{m-1} \psi x_1 + y_2^{m-1} \psi x_2 + \ldots + y_m^{m-1} \psi x_m &= t_{m-1}.
\end{aligned}$$

On tirera aisément de ces équations, linéaires par rapport à ψx_1, ψx_2, $\ldots \psi x_m$, les valeurs de ces quantités en fonctions rationnelles de y_1, y_2, y_3, $\ldots y_m$.

En effet, en faisant

$$23) \quad \begin{aligned} &(y-y_2)(y-y_3)\ldots(y-y_m) \\ &= y^{m-1} + R_{m-2} y^{m-2} + R_{m-3} y^{m-3} + \ldots + R_1 . y + R_0, \end{aligned}$$

on aura

$$24) \qquad \psi x_1 = \frac{t_0 R_0 + t_1 R_1 + t_2 R_2 + \ldots + t_{m-2} R_{m-2} + t_{m-1}}{R_0 + R_1 y_1 + R_2 y_1^2 + \ldots + R_{m-2} y_1^{m-2} + y_1^{m-1}}.$$

Les quantités R_0, R_1, $\ldots$ R_{m-2} sont des fonctions rationnelles de y_2, y_3, y_4, $\ldots y_m$, mais on peut les exprimer par y_1 seul. En effet, en multipliant (23) par $y - y_1$, on aura:

$$\begin{aligned}(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_m) &= y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \ldots + p_{m-1} y + p_m \\ &= y^m + (R_{m-2} - y_1) y^{m-1} + (R_{m-3} - y_1 R_{m-2}) y^{m-2} + \ldots\end{aligned}$$

d'où l'on tirera, en comparant les puissances égales de y:

$$25) \quad \begin{cases} R_{m-2} = y_1 + p_1, \\ R_{m-3} = y_1 R_{m-2} + p_2 = y_1^2 + p_1 y_1 + p_2, \\ R_{m-4} = y_1 R_{m-3} + p_3 = y_1^3 + p_1 y_1^2 + p_2 y_1 + p_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_0 \quad = y_1^{m-1} + p_1 y_1^{m-2} + p_2 y_1^{m-3} + \ldots + p_{m-1}. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs, l'expression de ψx_1 diviendra une fonction rationnelle de y_1 et de quantités connues, et on voit qu'il est toujours possible de trouver ψx_1 de cette sorte, sous condition que le dénominateur

$$R_0 + R_1 y_1 + R_2 y_1^2 + \ldots + R_{m-2} y_1^{m-2} + y_1^{m-1}$$

ne soit pas zéro. Or on peut donner à la fonction y_1 une infinité de formes qui rendront impossible cette équation, p. ex. en faisant

$$26) \quad y_1 = (\alpha - x_1)(\alpha - \theta x_1)(\alpha - \theta^2 x_1)\ldots(\alpha - \theta^{n-1} x_1),$$

où α est indéterminé, le dénominateur dont il s'agit ne peut pas s'évanouir. En effet ce dénominateur étant la même chose que

$$(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)\ldots(y_1 - y_m),$$

on aurait

$$y_1 = y_k,$$

s'il était nul, c'est-à-dire

$$(\alpha - x_1)(\alpha - \theta x_1)\dots(\alpha - \theta^{n-1}x_1) = (\alpha - x_k)(\alpha - \theta x_k)\dots(\alpha - \theta^{n-1}x_k),$$

ce qui est impossible, car toutes les racines x_1, θx_1, $\theta^2 x_1, \dots \theta^{n-1}x_1$ sont différentes de celle-ci: x_k, θx_k, $\theta^2 x_k, \dots \theta^{n-1}x_k$.

Les coefficiens A_1', A_1'', $\dots A_1^{(n)}$ peuvent donc s'exprimer rationnellement par une même fonction y_1, dont l'expression dépend d'une équation du degré m.

Les racines de l'équation (14) sont

$$x_1, \ \theta x_1, \ \theta^2 x_1 \dots \theta^{n-1}x_1.$$

En remplaçant dans les coefficiens A_1', A_1'' etc. y_1 par $y_2, y_3, \dots y_m$, on obtiendra $m-1$ autres équations, dont les racines seront respectivement:

$$\begin{array}{l} x_2, \ \theta x_2, \ \dots \ \theta^{n-1}x_2, \\ x_3, \ \theta x_3, \ \dots \ \theta^{n-1}x_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_m, \ \theta x_m, \dots \ \theta^{n-1}x_m. \end{array}$$

Théorème II. L'équation proposée $\varphi x = 0$ peut donc être décomposée en un nombre de m équations du degré n, dont les coefficiens sont respectivement des fonctions rationnelles d'une même racine d'une seule équation du degré m.

Cette dernière équation n'est pas généralement résoluble algébriquement quand elle passe le quatrième degré, mais l'équation (14) et les autres semblables le sont toujours en supposant connus les coefficiens A_1', A_1'' etc., comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

§. 3.

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré le cas où m est plus grand que l'unité. Maintenant nous allons nous occuper du cas où $m=1$.

Dans ce cas on aura $\mu = n$, et les racines de l'équation $\varphi x = 0$ seront

27) $$x_1, \ \theta x_1, \ \theta^2 x_1, \dots \theta^{\mu-1}x_1;$$

or je dis que toute équation dont les racines peuvent être exprimées de cette sorte est résoluble algébriquement.

Soit α une racine quelconque de l'équation $\alpha^\mu - 1 = 0$, et faisons

28) $$\psi x = (x + \alpha\theta x + \alpha^2\theta^2 x + \alpha^3\theta^3 x + \dots + \alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)^\mu,$$

ψx sera une fonction rationnelle de x. Or cette fonction peut s'exprimer rationnellement par les coefficiens de φx et θx.

En mettant $\theta^m x$ au lieu de x, on aura

$\psi\theta^m x =$
$(\theta^m x + \alpha\theta^{m+1}x + \alpha^2\theta^{m+2}x + \ldots + \alpha^{\mu-m}.\theta^\mu x + \alpha^{\mu-m+1}.\theta^{\mu+1}x \ldots \alpha^{\mu-1}.\theta^{\mu+m-1}x)^\mu$;

maintenant on a

$$\theta^\mu x = x,\; \theta^{\mu+1}x = \theta x, \ldots \theta^{\mu+m-1}x = \theta^{m-1}x,$$

donc:

$\psi\theta^m x =$
$(\alpha^{\mu-m}x + \alpha^{\mu-m+1}\theta x + \ldots + \alpha^{\mu-1}\theta^{m-1}x + \theta^m x + \alpha\theta^{m+1}x + \ldots + \alpha^{\mu-m-1}\theta^{\mu-1}x)^\mu$.

Or $\alpha^\mu = 1$, donc:

$$\psi\theta^m x = [\alpha^{\mu-m}(x + \alpha\theta x + \alpha^2\theta^2 x + \ldots + \alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)]^\mu$$
$$= \alpha^{\mu(\mu-m)}(x + \alpha\theta x + \ldots + \alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x)^\mu,$$

donc,

$$\alpha^{\mu(\mu-m)} \text{ étant} = 1,$$

on voit que

$$\psi\theta^m x = \psi x.$$

En faisant $m = 0, 1, 2, 3, \ldots \mu - 1$, et ajoutant ensuite, on trouvera:

$$29) \qquad \psi x = \frac{1}{\mu}(\psi x + \psi\theta x + \psi\theta^2 x + \ldots + \psi\theta^{\mu-1}x).$$

ψx sera donc une fonction rationnelle et symétrique de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$, et par conséquent on pourra l'exprimer rationnellement en quantités connues.

Soit $\psi x = v$, on tire de l'équation (28):

$$30) \qquad \sqrt[\mu]{v} = x + \alpha\theta x + \alpha^2\theta^2 x + \ldots + \alpha^{\mu-1}\theta^{\mu-1}x.$$

Cela posé, désignons les μ racines de l'équation

$$\alpha^\mu - 1 = 0$$

par

$$31) \qquad 1,\; \alpha_1,\; \alpha_2,\; \alpha_3, \ldots \alpha_{\mu-1}$$

et les valeurs correspondantes de v par

$$32) \qquad v_0,\; v_1,\; v_2,\; v_3, \ldots v_{\mu-1},$$

l'équation (30) donnera, en mettant à la place de α successivement $1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{\mu-1}$:

$$33)\quad \begin{cases} \sqrt[\mu]{v_0} = x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{\mu-1} x, \\ \sqrt[\mu]{v_1} = x + \alpha_1 \theta x + \alpha_1^2 \theta^2 x + \ldots + \alpha_1^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x, \\ \sqrt[\mu]{v_2} = x + \alpha_2 \theta x + \alpha_2^2 \theta^2 x + \ldots + \alpha_2^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}} = x + \alpha_{\mu-1} \theta x + \alpha_{\mu-1}^2 \theta^2 x + \ldots + \alpha_{\mu-1}^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x. \end{cases}$$

En ajoutant ces équations on aura:

$$34)\quad x = \frac{1}{\mu}[-A + \sqrt[\mu]{v_1} + \sqrt[\mu]{v_2} + \sqrt[\mu]{v_3} + \ldots + \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}],$$

où $-A$ exprime la quantité rationnelle $\sqrt[\mu]{v_0}$.

On connait par là la racine x. Généralement on trouve la racine $\theta^m x$ en multipliant la première des équations (33) par 1, la seconde par α_1^{-m}, la troisième par α_2^{-m} etc., et ajoutant; il viendra alors:

$$35)\quad \theta^m x = \frac{1}{\mu}[-A + \alpha_1^{-m}.\sqrt[\mu]{v_1} + \alpha_2^{-m}.\sqrt[\mu]{v_2} + \ldots + \alpha_{\mu-1}^{-m}.\sqrt[\mu]{v_{\mu-1}}].$$

En donnant à m les valeurs $0, 1, 2, \ldots \mu-1$, on aura la valeur de toutes les racines de l'équation.

L'expression précédente des racines contient généralement un nombre $\mu-1$ de radicaux différents, de la forme $\sqrt[\mu]{v}$. Elle aura donc un nombre $\mu^{\mu-1}$ de valeurs, tandis que la racine de l'équation $\varphi x = 0$ n'en a que μ. Mais on peut donner à l'expression des racines une autre forme, qui n'est pas exposée à cette difficulté. En effet, lorsque la valeur de $\sqrt[\mu]{v_1}$ est fixée, celle des autres radicaux la sera également, comme nous allons le voir.

Quel que soit le nombre μ, premier ou non, on peut toujours trouver une racine α de l'équation $\alpha^\mu - 1 = 0$, telle que les racines

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_{\mu-1}$$

puissent être représentées par

$$36)\quad \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{\mu-1}.$$

Cela posé on aura

$$37)\quad \begin{cases} \sqrt[\mu]{v_k} = x + \alpha^k.\theta x + \alpha^{2k}\theta^2 x + \ldots + \alpha^{(\mu-1)k}.\theta^{\mu-1} x, \\ \sqrt[\mu]{v_1} = x + \alpha.\theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \ldots + \alpha^{\mu-1}.\theta^{\mu-1} x, \end{cases}$$

d'où l'on tire:

$$38)\ \begin{cases}\sqrt[\mu]{v_k}.(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = (x+\alpha^k.\theta x+\alpha^{2k}.\theta^2 x+\ldots+\alpha^{(\mu-1)k}.\theta^{\mu-1}x) \\ \qquad\qquad \times\ (x+\alpha.\theta x+\alpha^2.\theta^2 x+\ldots+\alpha^{\mu-1}.\theta^{\mu-1}x)^{\mu-k}.\end{cases}$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle de x, qui ne changera pas de valeur en mettant au lieu de x une autre racine quelconque $\theta^m x$, comme on le verra aisément, en faisant cette substitution et ayant égard à l'équation $\theta^{\mu+\nu}x=\theta^\nu x$. En désignant donc la fonction dont il s'agit par ψx, on aura:

$$\sqrt[\mu]{v_k}.(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k}=\psi x=\psi\theta x=\psi\theta^2 x=\ldots=\psi\theta^{\mu-1}x,$$

et de là:

$$39)\quad \sqrt[\mu]{v_k}.(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k}=\frac{1}{\mu}[\psi x+\psi\theta x+\psi\theta^2 x+\ldots+\psi\theta^{\mu-1}x].$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines, donc on peut l'exprimer en quantités connues. En la désignant par a_k, on aura:

$$40)\qquad \sqrt[\mu]{v_k}(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k}=a_k$$

et de là:

$$41)\qquad \sqrt[\mu]{v_k}=\frac{a_k}{v_1}(\sqrt[\mu]{v_1})^k.$$

A l'aide de cette formule l'expression de la racine x deviendra:

$$42)\quad x=\frac{1}{\mu}\left(-A+\sqrt[\mu]{v_1}+\frac{a_2}{v_1}(\sqrt[\mu]{v_1})^2+\frac{a_3}{v_1}(\sqrt[\mu]{v_1})^3+\ldots+\frac{a_{\mu-1}}{v_1}(\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-1}\right).$$

Cette expression de x n'a que μ valeurs différentes, qu'on obtiendra en mettant au lieu de $\sqrt[\mu]{v_1}$ les μ valeurs:

$$\sqrt[\mu]{v_1},\ \alpha\sqrt[\mu]{v_1},\ \alpha^2\sqrt[\mu]{v_1},\ \ldots\ \alpha^{\mu-1}\sqrt[\mu]{v_1}.$$

La méthode que nous avons suivie précédemment pour la résolution de l'équation $\varphi x=0$ s'accorde au fond avec celle, dont *Mr. Gauss* a fait usage dans ses *"Disquisitiones arithmeticae pag. 645 et seq."* pour résoudre une certaine classe d'équations, auxquelles il était parvenu dans ses recherches sur l'équation $x^n-1=0$. Ces équations ont la même propriété que notre équation $\varphi x=0$; savoir que toutes ses racines peuvent être représentées sous la forme:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ldots\theta^{\mu-1}x,$$

θx étant une fonction rationnelle.

En vertu de ce qui précède nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème III. Si les racines d'une équation algébrique peuvent être représentées par:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x, \ldots \theta^{\mu-1}x,$$

où $\theta^\mu x = x$ et θx désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues, cette équation sera toujours résoluble algébriquement.

On en tire le suivant, comme corollaire:

Théorème IV. Si deux racines d'une équation *irréductible*, dont le degré est un nombre *premier*, sont dans un tel rapport, qu'on puisse exprimer l'une *rationnellement* par l'autre, cette équation sera résoluble algébriquement.

En effet cela suit immédiatement de l'équation (11)

$$\mu = m.n,$$

où l'on doit avoir $m=1$, si μ est un nombre premier, et par conséquent les racines s'expriment par $x, \theta x, \theta^2 x, \ldots \theta^{\mu-1}x$.

Dans le cas, où toutes les quantités connues de φx et θx sont *réelles*, les racines de l'équation $\varphi x = 0$ jouiront d'une propriété remarquable, que nous allons démontrer.

Par ce qui précède on voit que $a_{\mu-1}$ peut être exprimée rationnellement par les coefficiens de φx et θx, et par α. Si donc ces coefficiens sont réels, $a_{\mu-1}$ doit avoir la forme

$$a_{\mu-1} = a + b\sqrt{-1},$$

où $\sqrt{-1}$ n'entre qu'à cause de la quantité α, qui en général est imaginaire, et qui généralement peut avoir la valeur

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{2\pi}{\mu}.$$

En changeant donc dans α le signe de $\sqrt{-1}$ et désignant par $a'_{\mu-1}$ la valeur correspondente de $a_{\mu-1}$, on aura

$$a'_{\mu-1} = a - b\sqrt{-1}.$$

Or suivant (40) il est évident, que $a'_{\mu-1} = a_{\mu-1}$, donc $b=0$ et

43) $$a_{\mu-1} = a.$$

Donc $a_{\mu-1}$ a toujours une valeur réelle. On démontrera de la même manière que

$$v_1 = c + d\sqrt{-1} \text{ et } v_{\mu-1} = c - d\sqrt{-1},$$

où c et d sont réels.

Donc:

$$v_1 + v_{\mu-1} = 2c,$$
$$v_1 v_{\mu-1} = a^\mu.$$

De là on tire

44) $$v_1 = c + \sqrt{-1}\,.\sqrt{(a^\mu - c^2)},$$

et par suite $\sqrt{(a^\mu - c^2)} = d$; d'où l'on voit que $\sqrt{(a^\mu - c^2)}$ a toujours une valeur réelle.

Cela posé, on peut faire

45) $$c = (\sqrt{\varrho})^\mu \cos\delta, \quad \sqrt{(a^\mu - c^2)} = (\sqrt{\varrho})^\mu \sin\delta,$$

où ϱ est une quantité positive.

On en tire

$$c^2 + [\sqrt{(a^\mu - c^2)}]^2 = (\sqrt{\varrho})^{2\mu},$$

c'est-à-dire

46) $$a^\mu = \varrho^\mu;$$

par conséquent ϱ sera égal à la valeur numérique de a. D'ailleurs on voit que a est toujours positif, si μ est un nombre impair.

Connaissant ϱ et δ, on aura

$$v_1 = (\sqrt{\varrho})^\mu . (\cos\delta + \sqrt{-1}\,.\sin\delta)$$

et par suite

$$\sqrt[\mu]{v_1} = \sqrt{\varrho}\,.\left[\cos\left(\frac{\delta+2m\pi}{\mu}\right) + \sqrt{-1}\,.\sin\left(\frac{\delta+2m\pi}{\mu}\right)\right].$$

En substituant cette valeur de $\sqrt[\mu]{v_1}$ dans l'expression de x (42), elle prendra la forme:

47) $$\begin{aligned} x = \frac{1}{\mu}\Big[& -A + \sqrt{\varrho}\,.\left(\cos\frac{\delta+2m\pi}{\mu} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{\delta+2m\pi}{\mu}\right) \\ & + (f + g\sqrt{-1})\left(\cos\frac{2(\delta+2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{2(\delta+2m\pi)}{\mu}\right) \\ & + (F + G\sqrt{-1})\sqrt{\varrho}\,.\left(\cos\frac{3(\delta+2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{3(\delta+2m\pi)}{\mu}\right) \\ & + (f_1 + g_1\sqrt{-1})\left(\cos\frac{4(\delta+2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{4(\delta+2m\pi)}{\mu}\right) \\ & + \text{etc.} \Big] \end{aligned}$$

où ϱ, A, f, g, F, G etc., sont des fonctions rationnelles de $\cos\frac{2\pi}{\mu}$, $\sin\frac{2\pi}{\mu}$ et des coefficiens de φx et θx. On trouvera toutes les racines, en donnant à m les valeurs 0, 1, 2, 3, ... $\mu - 1$.

L'expression précédente de x fait voir:

Théorème V. que pour résoudre l'équation $\varphi x = 0$, il suffit:

1) de diviser la circonférence entière du cercle en μ parties égales,

2) de diviser un angle δ, qu'on peut construire ensuite, en μ parties égales,

3) d'extraire la racine carrée d'une seule quantité ϱ.

Ce théorème n'est que l'extension d'un théorème semblable, que *Mr. Gauss* donne sans démonstration dans l'ouvrage cité plus haut pag. 651.

Il y a encore à remarquer que les racines de l'équation $\varphi x = 0$ sont ou toutes réelles ou toutes imaginaires. En effet si une racine x est réelle, les autres le sont également, comme les expressions

$$\theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{\mu-1} x,$$

qui ne contiennent que des quantités réelles, le font voir. Si au contraire x est imaginaire, les autres racines le sont aussi, car si p. ex. $\theta^m x$ était réelle, $\theta^{\mu-m}(\theta^m x) = \theta^\mu x = x$, le serait également, contre l'hypothèse. Dans le premier cas a sera positif et dans le second négatif.

Si μ est un nombre impair, toutes les racines seront réelles.

La méthode que nous avons donné dans ce paragraphe, pour résoudre l'équation $\varphi x = 0$, est appliquable dans tous les cas, le nombre μ étant premier ou non; mais si μ est un nombre composé, il existe encore une autre méthode qui offre quelques simplifications et que nous allons exposer en peu de mots.

Soit $\mu = m.n$, les racines

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ \theta^{\mu-1} x$$

pourront être groupées de la manière suivante:

$$\begin{array}{lllll} x, & \theta^m x, & \theta^{2m} x, & \ldots & \theta^{(n-1)m} x, \\ \theta x, & \theta^{m+1} x, & \theta^{2m+1} x, & \ldots & \theta^{(n-1)m+1} x, \\ \theta^2 x, & \theta^{m+2} x, & \theta^{2m+2} x, & \ldots & \theta^{(n-1)m+2} x, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta^{m-1} x, & \theta^{2m-1} x, & \theta^{3m-1} x, & \ldots & \theta^{mn-1} x. \end{array}$$

En faisant pour abréger:

48) $$\theta^m x = \theta_1 x,$$

49) $$x = x_1,\ \theta x = x_2,\ \theta^2 x = x_3,\ \ldots\ \theta^{m-1} x = x_m,$$

on peut écrire les racines comme il suit:

50) $$\left\{\begin{array}{llllll} 1') & x_1, & \theta_1 x_1, & \theta_1^2 x_1, & \ldots & \theta_1^{n-1} x_1, \\ 2') & x_2, & \theta_1 x_2, & \theta_1^2 x_2, & \ldots & \theta_1^{n-1} x_2, \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m') & x_m, & \theta_1 x_m, & \theta_1^2 x_m, & \ldots & \theta_1^{n-1} x_m, \end{array}\right.$$

Donc en vertu de ce qu'on a vu dans le §. 2 on peut décomposer l'équation $\varphi x = 0$, qui est du degré $m.n$, en m équations du degré n, dont les coefficiens dépendront d'une équation du degré m. Les racines de ces m équations seront respectivement les racines $1', 2', \ldots m'$.

Si n est un autre nombre composé $m_1 . n_1$, on peut décomposer de la même manière chacune des équations du degré n, en m_1 équations du degré n_1, dont les coefficiens dépendront d'une équation du degré m_1. Si n_1 est encore un nombre composé, on peut continuer la décomposition de la même manière.

Théorème VI. En général, si l'on suppose

51) $$\mu = m_1 . m_2 . m_3 \ldots m_n,$$

la résolution de l'équation proposée $\varphi x = 0$ sera ramenée à celle de n équations des degrés:

$$m_1, \; m_2, \; m_3, \ldots m_n.$$

Il suffit même de connaitre une seule racine de ces équations, car si on connait une racine de l'équation proposée, on aura toutes les autres racines, exprimées en fonctions rationnelles de celle-ci.

La méthode précédente est au fond la même que celle, que *Mr. Gauss* donne pour la réduction de l'équation à deux termes $x^\mu - 1 = 0$.

Pour faire voir plus clairement la décomposition précédente de l'équation $\varphi x = 0$ en d'autres de degrés moins élevés, supposons p. ex. $\mu = 30 = 5.3.2$.

Dans ce cas les racines seront:

$$x, \; \theta x, \; \theta^2 x, \; \ldots \; \theta^{29} x.$$

D'abord nous formerons une équation du 6ième degré, dont les racines seront:

$$x, \; \theta^5 x, \; \theta^{10} x, \; \theta^{15} x, \; \theta^{20} x, \; \theta^{25} x.$$

Soit $R = 0$ cette équation, on peut déterminer ses coefficiens, rationnellement, par une même quantité y, qui sera la racine d'une équation du cinquième degré: $P = 0$.

Le degré de l'équation $R = 0$ étant lui même un nombre composé, nous formerons une équation du 3ième degré: $R_1 = 0$, dont les racines seront:

$$x, \; \theta^{10} x, \; \theta^{20} x,$$

et dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles de y, et d'une même quantité z, qui est racine d'une équation du second degré $P_1 = 0$, dans laquelle les coefficiens sont exprimés rationnellement par y.

Voici le tableau des opérations:

$$x^3+f(y,z).x^2+f_1(y,z).x+f_2(y,z)=0,$$
$$z^2+fy.z+f_1y=0,$$
$$y^5+A_1.y^4+A_2.y^3+A_3.y^2+A_4.y+A_5=0.$$

On peut aussi commencer par une équation du $2^{\text{ième}}$ degré en x, ou bien par une équation du $5^{\text{ième}}$ degré.

Reprenons l'équation générale $\varphi x=0$.

En supposant $\mu=m.n$, on peut faire

52) $$x^n+fy.x^{n-1}+f_1y.x^{n-2}+\ldots=0,$$

où y est déterminé par une équation du $m^{\text{ième}}$ degré:

53) $$y^m+A.y^{m-1}+\ldots=0,$$

dont tous les coefficiens sont exprimés rationnellement en quantités connues.

Cela posé, soient:

54) $$\begin{cases}\mu=m_1.m_2.m_3\ldots m_\omega \quad \text{et} \quad \mu=m_1.n_1, \\ \mu=m_2.n_2;\ldots\ldots\ldots \quad \mu=m_\omega.n_\omega,\end{cases}$$

plusieurs manières de décomposer le nombre μ en deux facteurs, on pourra décomposer l'équation proposée $\varphi x=0$ en deux autres des ω manières suivantes:

(1) $F_1(x,y_1)=0$, dont les racines seront x, $\theta^{m_1}x$, $\theta^{2m_1}x, \ldots \theta^{(n_1-1)m_1}x$ et les coefficiens des fonctions rationnelles d'une quantité y_1 racine d'une équation $f_1y_1=0$, du degré m_1.

(2) $F_2(x,y_2)=0$, dont les racines seront x, $\theta^{m_2}x$, $\theta^{2m_2}x, \ldots \theta^{(n_2-1)m_2}x$ et les coefficiens des fonctions rationnelles d'une même quantité y_2, racine d'une équation $f_2y_2=0$, du degré m_2.

. . . .

(ω) $F_\omega(x,y_\omega)=0$, dont les racines seront x, $\theta^{m_\omega}x$, $\theta^{2m_\omega}x, \ldots \theta^{(n_\omega-1)m_\omega}x$ et les coefficiens des fonctions rationnelles d'une même quantité y_ω, racine d'une équation $f_\omega y_\omega=0$, du degré m_ω.

Supposons maintenant que $m_1, m_2, \ldots m_\omega$ pris deux à deux, soient premiers entre eux, je dis qu'on pourra exprimer la valeur de x rationnellement par les quantités $y_1, y_2, y_3, \ldots y_\omega$. En effet, si $m_1, m_2, \ldots m_\omega$ sont premiers entre eux, il est clair qu'il n'y a qu'une seule racine, qui satisfera à la fois à toutes les équations

55) $$F_1(x,y_1)=0, \; F_2(x,y_2)=0, \ldots F_\omega(x,y_\omega)=0;$$

savoir la racine x. Donc, suivant un théorème connu, on peut exprimer x

rationnellement par les coefficiens de ces équations et conséquemment par les quantités $y_1, y_2, \dots y_\omega$.

Voila donc ramenée la résolution de l'équation proposée à celle de ω équations: $f_1 y_1 = 0$; $f_2 y_2 = 0$; .... $f_\omega y_\omega = 0$, qui sont respectivement des degrés: m_1, m_2, ... m_ω, et dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles des coefficiens de φx et θx.

Si l'on veut que les équations

$$56)\qquad f_1 y_1 = 0;\quad f_2 y_2 = 0; \dots f_\omega y_\omega = 0$$

soient les moins élevées possibles, il faut choisir m_1, m_2, ... m_ω tels, que ces nombres soient des puissances de nombres premiers. P. ex si l'équation proposée $\varphi x = 0$ est du degré:

$$57)\qquad \mu = \varepsilon_1^{\nu_1} . \varepsilon_2^{\nu_2} \dots \varepsilon_\omega^{\nu_\omega},$$

où ε_1, ε_2, ... ε_ω sont des nombres premiers differents, on aura

$$58)\qquad m_1 = \varepsilon_1^{\nu_1};\quad m_2 = \varepsilon_2^{\nu_2}; \dots m_\omega = \varepsilon_\omega^{\nu_\omega}.$$

L'équation proposée étant résoluble algébriquement, les équations (56) le seront aussi; car les racines de ces équations sont des fonctions rationnelles de x. On peut aisément les résoudre de la manière suivante.

La quantité y est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation (52), c'est-à-dire de:

$$59)\qquad x,\ \theta^m x,\ \theta^{2m} x, \dots \theta^{(n-1)m} x.$$

Soit

$$60)\qquad y = Fx = f(x,\ \theta^m x,\ \theta^{2m} x, \dots \theta^{(n-1)m} x),$$

les racines de l'équation (53) seront

$$61)\qquad Fx;\ F(\theta x);\ F(\theta^2 x); \dots F(\theta^{m-1} x);$$

or je dis que l'on peut exprimer ces racines de la manière suivante:

$$62)\qquad y,\ \lambda y,\ \lambda^2 y,\ \dots\ \lambda^{m-1} y,$$

où λy est une fonction rationnelle de y et de quantités connues.

On aura

$$63)\qquad F(\theta x) = f[\theta x,\ \theta(\theta^m x),\ \theta(\theta^{2m} x), \dots \theta(\theta^{(n-1)m} x)],$$

donc $F(\theta x)$ sera, autant que Fx, une fonction rationnelle et symétrique des racines x, $\theta^m x$, ... $\theta^{(n-1)m} x$, donc on peut, par le procédé, trouvé (24) exprimer $\psi(\theta x)$ rationnellement par ψx. Soit donc

$$\psi\theta x = \lambda\psi x = \lambda y,$$

on aura, en remplaçant (en vertu du 1. théorème) x par θx, $\theta^2 x$, ... $\theta^{m-1} x$:

$$\psi\theta^2 x = \lambda\psi\theta x \quad = \lambda^2 y,$$
$$\psi\theta^3 x = \lambda\psi\theta^2 x \quad = \lambda^3 y,$$
$$\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots$$
$$\psi\theta^{m-1} x = \lambda\psi\theta^{m-2} \quad = \lambda^{m-1} y,$$

c. q. f. d.

Maintenant les racines de l'équation (53) pouvant être représentées par

$$y,\ \lambda y,\ \lambda^2 y, \dots \lambda^{m-1} y,$$

on peut résoudre algébriquement cette équation de la même manière que l'équation $\varphi x = 0$. (Voyez le théorème III).

Si m est une puissance d'un nombre premier $= \varepsilon^\nu$, on peut encore déterminer y à l'aide de ν équations du degré ε. (Voyez le théorème VI).

Si dans le théorème III, l'on suppose, que μ soit une puissance de 2, on aura, comme corollaire, le théorème suivant.

Théorème VII. Si les racines d'une équation du degré 2^ω peuvent être représentées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \dots\ \theta^{2^\omega - 1} x, \quad \text{où } \theta^{2^\omega} x = x,$$

cette équation pourra être résolue à l'aide de l'extraction de ω racines quarrées.

Ce théorème, appliqué à l'équation $\dfrac{x^{1+2^\omega} - 1}{x - 1} = 0$, où $1 + 2^\omega$ est un nombre premier, donne le théorème de *Mr. Gauss* pour le cercle.

§. 4.

Des équations dont toutes les racines peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'entre elles.

Nous avons vu précédemment (théorème III) qu'une équation de degré quelconque, dont les racines peuvent être exprimées par

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \dots\ \theta^{\mu-1} x$$

est toujours résoluble algébriquement.

Dans ce cas toutes les racines sont exprimées rationnellement par l'une d'entre elles; mais une équation, dont les racines ont cette propriété, n'est pas toujours résoluble algébriquement; néanmoins, hors le cas considéré précédemment, il y a encore un autre, dans lequel cela a lieu. On aura le théorème suivant:

Théorème VIII. Soit $\chi x = 0$ une équation algébrique quelconque, dont toutes les racines peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'entre elles, que nous désignerons par x. Soient θx et $\theta_1 x$ deux autres racines

quelconques, l'équation proposée sera résoluble algébriquement, si l'on a $\theta\theta_1 x = \theta_1 \theta x$.

La démonstration de ce théorème peut être réduite sur le champ à la théorie exposée §. 2, comme nous allons le voir.

Si l'on connait la racine x, on en aura en même temps toutes les autres; il suffit donc de chercher la valeur de x.

Si l'équation

64) $$\chi x = 0$$

n'est pas irréductible, soit

65) $$\varphi x = 0$$

l'équation la moins élevée, à laquelle puisse satisfaire la racine x, les coefficiens de cette équation ne contenant que des quantités connues. Dans ce cas les racines de l'équation $\varphi x = 0$ se trouveront parmi celles de l'équation $\chi x = 0$ (voyez le premier théorème), et par conséquent elles pourront s'exprimer rationnellement par l'une d'entre elles.

Cela posé soit θx une racine différente de x, en vertu de ce qu'on a vu dans le premier paragraphe, les racines de l'équation $\varphi x = 0$ pourront être exprimées comme il suit:

$$\begin{array}{lllll} x, & \theta x, & \theta^2 x, & \ldots & \theta^{n-1} x, \\ x_1, & \theta x_1, & \theta^2 x_1, & \ldots & \theta^{n-1} x_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m-1}, & \theta x_{m-1}, & \theta^2 x_{m-1}, & \ldots & \theta^{n-1} x_{m-1}, \end{array}$$

et en formant l'équation

66) $$x^n + A' . x^{n-1} + A'' x^{n-2} + A''' x^{n-3} + \ldots + A^{(n-1)} x + A^{(n)} = 0,$$

dont les racines sont $x, \theta x, \theta^2 x, \ldots \theta^{n-1} x$, les coefficiens $A', A'', \ldots A^{(n)}$ pourront être exprimées rationnellement par une même quantité y, qui sera racine d'une équation irréductible*):

67) $$y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \ldots + p_{m-1} y + p_m = 0.$$

dont les coefficiens sont des quantités connues (voyez §. 2).

---

*) On démontrera aisément, que cette équation ne pourra être réductible. Soit $R = 0$ l'équation irréductible en y, et ν son degré. En éliminant y, on aura une équation en x du degré $n\nu$; donc $n\nu \overline{\gtrless} \mu$. Mais on a

$$\mu = m . n,$$

donc

$$\nu \overline{\gtrless} m,$$

ce qui est impossible, car ν est moindre que m.

La détermination de x peut s'effectuer à l'aide des deux équations (66) et (67). La première de ces équations est résoluble algébriquement, en supposant les coefficiens connus, c'est-à-dire la quantité y (voyez le théorème III). Quant à l'équation en y, nous allons démontrer que ses racines ont la même propriété que celles de l'équation proposée $\varphi x = 0$, savoir d'être exprimables rationnellement par l'une d'entre elles.

La quantité y est (voy. 15) une certaine fonction rationnelle et symétrique des racines $x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{n-1} x$. En faisant:

$$68) \left\{ \begin{array}{l} y = f(x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{n-1} x), \\ \text{les autres racines de l'équation (67) seront:} \\ y_1 = f(x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots \theta^{n-1} x_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{m-1} = f(x_{m-1}, \theta x_{m-1}, \theta^2 x_{m-1}, \dots \theta^{n-1} x_{m-1}). \end{array} \right.$$

Maintenant, dans le cas en question $x_1, \dots x_{m-1}$ seront des fonctions rationnelles de la racine x. Faisons en conséquence

$$x_1 = \theta_1 x, \quad x_2 = \theta_2 x, \quad \dots \quad x_{m-1} = \theta_{m-1} x,$$

les racines de l'équation (67) auront la forme:

$$y_1 = f(\theta_1 x, \theta\theta_1 x, \theta^2\theta_1 x, \dots \theta^{n-1}\theta_1 x).$$

Suivant l'hypothèse les fonctions θ et θ_1 ont la propriété que:

$$\theta\theta_1 x = \theta_1 \theta x,$$

équation qui, en vertu du théorème I, aura lieu en substituant à la place de x une autre racine quelconque de l'équation $\varphi x = 0$. On en tire successivement

$$\begin{array}{l} \theta^2\theta_1 x = \theta\theta_1\theta x = \theta_1\theta^2 x, \\ \theta^3\theta_1 x = \theta\theta_1\theta^2 x = \theta_1\theta^3 x, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \theta^{n-1}\theta_1 x = \theta\theta_1\theta^{n-2} x = \theta_1\theta^{n-1} x. \end{array}$$

L'expression de y_1 deviendra par là:

$$y_1 = f(\theta_1 x, \theta_1\theta x, \theta_1\theta^2 x, \dots \theta_1\theta^{n-1} x),$$

et on voit que y_1, comme y, est une fonction *rationnelle* et *symétrique* des racines

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{n-1} x.$$

Donc en vertu du théorème II on peut exprimer y_1 rationnellement par y et des quantités connues. Le même raisonnement s'appliquera à toute autre racine de l'équation (67). Soient maintenant λy, $\lambda_1 y$ deux racines quelconques, je dis qu'on aura

$$\lambda\lambda_1 y = \lambda_1 \lambda y.$$

En effet ayant p. ex.

$$\lambda y = f(\theta_1 x,\ \theta\theta_1 x, \ldots \theta^{n-1}\theta_1 x),$$

si

$$y = f(x,\ \theta x, \ldots \theta^{n-1} x),$$

on aura, en mettant $\theta_2 x$ au lieu de x:

$$\lambda y_2 = f(\theta_1\theta_2 x,\ \theta\theta_1\theta_2 x, \ldots \theta^{n-1}\theta_1\theta_2 x)$$

où

$$y_2 = f(\theta_2 x,\ \theta\theta_2 x, \ldots \theta^{n-1}\theta_2 x) = \lambda_1 y,$$

donc

$$\lambda\lambda_1 y = f(\theta_1\theta_2 x,\ \theta\theta_1\theta_2 x, \ldots \theta^{n-1}\theta_1\theta_2 x)$$

et également

$$\lambda_1\lambda y = f(\theta_2\theta_1 x,\ \theta\theta_2\theta_1 x, \ldots \theta^{n-1}\theta_2\theta_1 x),$$

donc, puisque $\theta_1\theta_2 x = \theta_2\theta_1 x,$

$$\lambda\lambda_1 y = \lambda_1\lambda y.$$

Les racines de l'équation (67) auront donc précisément la même propriété que celles de l'équation $\varphi x = 0$.

Cela posé, on peut appliquer à l'équation (67) le même procédé, qu'à l'équation $\varphi x = 0$; c'est-à-dire, la détermination de y peut s'effectuer à l'aide de deux équations, dont l'une sera résoluble algébriquement et l'autre aura la propriété de l'équation $\varphi x = 0$.

Donc le même procédé peut encore être appliqué à cette dernière équation. En continuant, il est clair que la détermination de x pourra s'effectuer à l'aide d'un certain nombre d'équations, qui seront toutes résolubles algébriquement. Donc enfin l'équation $\varphi x = 0$ sera résoluble à l'aide d'opérations algébriques, en supposant connues les quantités qui avec x composent les fonctions:

$$\varphi x,\ \theta x,\ \theta_1 x,\ \theta_2 x, \ldots, \theta_{m-1} x.$$

Il est clair que le degré de chacune des équations auxquelles se réduit la détermination de x, sera un facteur de μ qui marque le degré de l'èquation $\varphi x = 0$; et:

Théorème IX. Si l'on désigne les degrés de ces équations respectivement par

$$n,\ n_1,\ n_2, \ldots n_\omega,$$

on aura:

$$\mu = n . n_1 . n_2 \ldots n_\omega.$$

En rapprochant ce qui précède de ce qui a été exposé dans le §. 3, on aura le théorème suivant:

Théorème X. Supposant le degré μ de l'équation $\varphi x = 0$ décomposé comme il suit:

69) $$\mu = \varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \cdot \varepsilon_3^{\nu_3} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_\alpha$ sont des nombres premiers, la détermination de x pourra s'effectuer à l'aide de la résolution de ν_1 équations du degré ε_1, de ν_2 équations du degré ε_2, etc., et toutes ces équations seront résolubles algébriquement.

Dans le cas où $\mu = 2^\nu$, on peut trouver la valeur de x à l'aide de l'extraction de ν racines carrées.

§. 5.

Application aux fonctions circulaires.

En désignant par a la quantité $\frac{2\pi}{\mu}$, on sait qu'on peut trouver une équation algébrique du degré μ, dont les racines seront les μ quantités:

$$\cos a,\ \cos 2a,\ \cos 3a, \ldots \cos \mu a,$$

et dont les coefficiens seront des nombres rationnels. Cette équation sera

70) $$x^\mu - \tfrac{1}{4}\mu \cdot x^{\mu-2} + \tfrac{1}{16} \cdot \frac{\mu(\mu-3)}{1.2} \cdot x^{\mu-4} \ldots = 0.$$

Nous allons voir que cette équation a la même forme que l'équation $\chi x = 0$ considérée dans le paragraphe précédent.

Soit $\cos a = x$, on aura d'après une formule connue, quel que soit a:

71) $$\cos ma = \theta(\cos a),$$

où θ désigne une fonction entière. Donc $\cos ma$, qui exprime une racine quelconque de l'équation (70), sera une fonction rationnelle de la racine x. Soit $\theta_1 x$ une autre racine, je dis qu'on aura

$$\theta\theta_1 x = \theta_1 \theta x.$$

En effet, soit $\theta_1 x = \cos m'a$, la formule (71) donnera, en mettant $m'a$ au lieu de a:

$$\cos(mm'a) = \theta(\cos m'a) = \theta\theta_1 x.$$

Da la même manière on aura

$$\cos(m'ma) = \theta_1(\cos ma) = \theta_1 \theta x,$$

donc:

$$\theta\theta_1 x = \theta_1 \theta x.$$

Donc suivant ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent,

$$x \text{ ou } \cos a = \cos \frac{2\pi}{\mu}$$

pourra être déterminé algébriquement. Cela est connu.

Supposons maintenant que μ soit un nombre premier $= 2n+1$, les racines de l'équation (70) seront:

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1}, \ \cos \frac{4\pi}{2n+1}, \ \ldots \cos \frac{4n\pi}{2n+1}, \ \cos 2\pi$$

La dernière racine $\cos 2\pi$ est égale à l'unité donc l'équation (70) est divisible par $x-1$. Les autres racines seront toujours égales entre-elles par couples, car on a $\cos \frac{2m\pi}{2n+1} = \cos \frac{(2n+1-m)2\pi}{2n+1}$, donc on peut trouver une équation dont les racines seront,

72) $$\cos \frac{2\pi}{2n+1}, \ \cos \frac{4\pi}{2n+1}, \ \ldots \cos \frac{2n\pi}{2n+1}.$$

Cette équation sera:

73) $$x^n + \tfrac{1}{2} x^{n-1} - \tfrac{1}{4}(n-1)x^{n-2} - \tfrac{1}{8}(n-2)x^{n-3}$$
$$+ \tfrac{1}{16} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} x^{n-4} + \tfrac{1}{32} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} . x^{n-5} - \text{etc.} = 0.$$

Cela posé, soit

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1} = x = \cos a,$$

on aura d'après ce qui précède:

$$\cos \frac{2m\pi}{2n+1} = \theta x = \cos ma.$$

L'équation (73) sera donc satisfaite par les racines

74) $$x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ \theta^3 x, \ldots$$

On a, quelle que soit la valeur de a:

$$\theta(\cos a) = \cos ma.$$

De la on tire successivement:

$$\theta^2(\cos a) = \theta(\cos ma) = \cos m^2 a,$$
$$\theta^3(\cos a) = \theta(\cos m^2 a) = \cos m^3 a,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\theta^\mu(\cos a) = \theta(\cos m^{\mu-1} a) = \cos m^\mu a.$$

Les racines (74) deviendront donc

75) $$\cos a, \ \cos ma, \ \cos m^2 a, \ \cos m^3 a, \ldots \cos m^\mu a, \ldots$$

Celà posé, si m est une racine primitive pour le module $2n+1$ (voyez *Gauss Disquis. arithm. pag.* 53), je dis que toutes les racines

76) $$\cos a,\ \cos ma,\ \cos m^2 a, \ldots \cos m^{n-1} a$$
seront différentes entre elles. En effet si l'on avait
$$\cos m^\mu a = \cos m^\nu a,$$
où μ et ν sont moindres que n, on en tirerait:
$$m^\mu a = \pm m^\nu a + 2k\pi,$$
où k est entier. Celà donne en remettant pour a sa valeur $\frac{2\pi}{2n+1}$,
$$m^\mu = \pm m^\nu + k(2n+1),$$
donc
$$m^\mu \mp m^\nu = m^\nu (m^{\mu-\nu} \mp 1) = k(2n+1)$$
et par conséquent
$$m^{2(\mu-\nu)} - 1$$
serait divisible par $2n+1$, ce qui est impossible, car $2(\mu-\nu)$ est moindre que $2n$, et nous avons supposé que m est une racine primitive.

On aura encore:
$$\cos m^n a = \cos a,$$
car $m^{2n} - 1 = (m^n - 1)(m^n + 1)$ est divisible par $2n+1$; donc:
$$m^n = \pm 1 + k(2n+1),$$
et par suite:
$$\cos m^n a = \cos(\pm a + k.2\pi) = \cos a.$$

De là on voit que les n racines de l'équation (73.) pourront s'exprimer par (76.); c'est-à-dire par:
$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \theta^3 x, \ldots \theta^{n-1} x, \text{ où } \theta^n x = x.$$
Donc, en vertu du théorème (III), cette équation sera résoluble algébriquement.

En faisant $n = m_1 . m_2 \ldots m_\omega$, on peut diviser la circonférence entière du cercle en $2n+1$ parties égales, à l'aide de ω équations des degrés $m_1, m_2, m_3, \ldots m_\omega$. Si les nombres $m_1, m_2, \ldots m_\omega$ sont premiers entre eux, les coefficiens de ces équations seront des mombres rationnels.

En supposant $n = 2^\omega$, on aura le théorème connu sur les polygones reguliers, qui peuvent être construits géométriquement.

En vertu du théorème V. on voit que pour diviser la circonférence entiére du cercle en $2n+1$ parties égales, il suffit

1) de diviser la circonférence entière du cercle en $2n$ parties égales,
2) de diviser un arc, qu'on peut construire ensuite, en $2n$ parties égales,
3) et d'extraire la racine carrée d'une seule quantité ϱ.

M. Gauss a énoncé ce théorème dans ses *Disquis.*, et il ajoute que la quantité dont il faut extraire la racine, sera égale à $2n+1$. C'est ce qu'on peut démontrer aisément comme il suit.

On a vu (40, 38, 46) que ϱ est la valeur numérique de la quantité

$$(x+\alpha\theta x+\alpha^2\theta^2 x+\ldots+\alpha^{n-1}\theta^{n-1}x)\,(x+\alpha^{n-1}\theta x+\alpha^{n-2}\theta^2 x+\ldots+\alpha.\theta^{n-1}x)$$

où $\alpha=\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}.\sin\frac{2\pi}{n}$. En substituant pour x, $\theta x, \ldots$ leurs valeurs $\cos a$, $\cos ma$, $\cos m^2 a, \ldots$ on aura:

$$\pm\varrho=(\cos a+\alpha\cos ma+\alpha^2\cos m^2 a+\ldots+\alpha^{n-1}.\cos m^{n-1}a)$$
$$\times(\cos a+\alpha^{n-1}\cos ma+\alpha^{n-2}\cos m^2 a+\ldots+\alpha\,.\,\cos m^{n-1}a).$$

En développant et mettant $\pm\varrho$ sous la forme

$$\pm\varrho=t_0+t_1\alpha+t_2\alpha^2+\ldots+t_{n-1}.\alpha^{n-1},$$

on trouvera facilement.

$$t_\mu=\cos a.\cos m^\mu a+\cos ma.\cos m^{\mu+1}a+\ldots+\cos m^{n-1-\mu}a.\cos m^{n-1}a$$
$$+\cos m^{n-\mu}a.\cos a+\cos m^{n-\mu+1}a.\cos ma+\ldots+\cos m^{n-1}a.\cos m^{\mu-1}a.$$

Maintenant on a

$$\cos m^\nu a.\cos m^{\mu+\nu}a=\tfrac{1}{2}\cos(m^{\mu+\nu}a+m^\nu a)+\tfrac{1}{2}\cos(m^{\mu+\nu}a-m^\nu a),$$

donc:

$$t_\mu=\tfrac{1}{2}\left(\cos(m^\mu+1)a+\cos(m^\mu+1)ma+\cos(m^\mu+1)m^2a+\ldots+\cos(m^\mu+1)m^{n-1}a\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\cos(m^\mu-1)a+\cos(m^\mu-1)ma+\cos(m^\mu-1)m^2a+\ldots+\cos(m^\mu-1)m^{n-1}a\right).$$

Si l'on fait $(m^\mu+1)\,a=a'$, $(m^\mu-1)\,a=a''$, on aura

$$t_\mu=\tfrac{1}{2}\left(\cos a'+\theta(\cos a')+\theta^2(\cos a')+\ldots+\theta^{n-1}(\cos a')\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\cos a''+\theta(\cos a'')+\theta^2(\cos a'')+\ldots+\theta^{n-1}(\cos a'')\right).$$

Celà posé, il y a deux cas, savoir: μ est différent de zéro ou non.

Dans le premier cas il est clair que $\cos a'$ et $\cos a''$ sont des racines de l'équation (73), donc $\cos a'=\theta^\delta x$, $\cos a''=\theta^\varepsilon x$. En substituant, il viendra, en remarquant que $\theta^n x=x$:

$$t_\mu=\tfrac{1}{2}(\theta^\delta x+\theta^{\delta+1}x+\ldots+\theta^{n-1}x+x+\theta x+\ldots+\theta^{\delta-1}x)$$
$$+\tfrac{1}{2}(\theta^\varepsilon x+\theta^{\varepsilon+1}x+\ldots+\theta^{n-1}x+x+\theta x+\ldots+\theta^{\varepsilon-1}x),$$

donc

$$t_\mu=x+\theta x+\theta^2 x+\ldots+\theta^{n-1}x,$$

c'est-à-dire t_μ est égal à la somme des racines; par suite en vertu de l'équation (73):

$$t_\mu=-\tfrac{1}{2}.$$

Dans le cas où $\mu=0$, la valeur de t_μ deviendra:

$$t_0=\tfrac{1}{2}(\cos 2a+\cos 2ma+\ldots+\cos 2m^{n-1}a)+\tfrac{1}{2}.n;$$

òr $\cos 2a$ est une racine dé l'équation (73), donc en faisant

$$\cos 2a=\theta^\delta x,$$

on aura

$$\cos 2a + \cos 2ma + \ldots + \cos 2m^{n-1}a$$
$$= \theta^{\delta}x + \theta^{\delta+1}x + \ldots + \theta^{n-1}x + x + \theta x + \ldots + \theta^{\delta-1}x = -\tfrac{1}{2},$$

par conséquent:

$$t_0 = \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{4}.$$

En vertu de ces valeurs de t_0 et t_μ, la valeur de $\pm\varrho$ deviendra.

$$\pm\varrho = \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}.(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{n-1}),$$

mais

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{n-1} = -1,$$

donc

$$\pm\varrho = \tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{4},$$

et puisque ϱ est essentiellement positif,

$$\varrho = \frac{2n+1}{4}.$$

Cette valeur de ϱ donne

$$\sqrt{\varrho} = \tfrac{1}{2}.\sqrt{(2n+1)},$$

donc la racine carrée qu'il y a à extraire est celle du nombre $2n+1$, comme le dit *M. Gauss* *).

Christiania, 29. Mars 1828.

---

*) L'auteur donnera dans une autre occasion des applications aux fonctions elliptiques. (Note de Mr. Crelle.)

XII.

Recherches sur les fonctions elliptiques.

Depuis longtemps les fonctions logarithmiques, et les fonctions exponentielles et circulaires ont été les seules fonctions transcendantes, qui ont attiré l'attention des géomètres. Ce n'est que dans les derniers temps, qu'on a commencé à en considérer quelques autres. Parmi celles-ci il faut distinguer les fonctions, nommées elliptiques, tant pour leur belles propriétés analytiques, que pour leur application dans les diverses branches des mathématiques. La première idée de ces fonctions à été donnée par l'immortel *Euler*, en démontrant, que l'équation séparée

$$1)\qquad \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}+\frac{dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4)}}=0$$

est intégrable algébriquement. Après *Euler*, *Lagrange* y a ajouté quelque chose, en donnant son élégante théorie de la transformation de l'intégrale $\int\frac{R.dx}{\sqrt{[(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)]}}$, ou R est une fonction rationnelle de x. Mais le premier et, si je ne me trompe, le seul, qui ait approfondi la nature de ces fonctions, est *M. Legendre*, qui, d'abord dans un mémoire sur les fonctions elliptiques, et ensuite dans ses excellents exercices de mathématiques, a développé nombre de propriétés élégantes de ces fonctions, et a montré leur application. Depuis la publication de cet ouvrage, rien n'a été ajouté à la théorie de *M. Legendre*. Je crois qu'on ne verra pas ici sans plaisir des recherches ultérieures sur ces fonctions.

En général on comprend sous la dénomination de fonctions elliptiques, toute fonction, comprise dans l'intégrale

$$\int\frac{Rdx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}},$$

où R est une fonction rationnelle et α, β, γ, δ, ε sont des quantités constantes et *réelles*. *M. Legendre* a démontré, que par des substitutions convenables on peut toujours ramener cette intégrale à la forme

$$\int \frac{P dy}{\sqrt{(a+by^2+cy^4)}},$$

où P est une fonction rationnelle de y^2. Par les réductions convenables, cette intégrale peut être ensuite ramenée à la forme

$$\int \frac{A+By^2}{C+Dy^2} \cdot \frac{dy}{\sqrt{a+by^2+cy^4)}},$$

et celle-ci a:

$$\int \frac{A+B\sin^2\theta}{C+D\sin^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}},$$

où c est réel, et moindre que l'unité.

De là suit, que toute fonction elliptique peut être réduite à l'une des trois formes:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}}; \int d\theta \sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}, \int \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}},$$

auxquelles *M. Legendre* donne les noms de fonctions elliptiques de la première, seconde et troisième espèce. Ce sont ces trois fonctions, que *M. Legendre* a considérées, surtout la première, qui a les propriétés les plus remarquables et les plus simples.

Je me propose, dans ce mémoire, de considérer la fonction inverse, c'est-a-dire la fonction $\varphi\alpha$, déterminée par les équations

$$\alpha = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}} \text{ et}$$

$$\sin\theta = \varphi(\alpha) = x.$$

La dernière équation donne

$$d\theta . \sqrt{(1-\sin^2\theta)} = d.\varphi\alpha = dx,$$

donc

$$\alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}.$$

M. Legendre suppose c^2 positif, mais j'ai remarqué, que les formules deviennent plus simples, en supposant c^2 négatif, $= -e^2$. De même j'écris pour plus de symétrie $1-c^2x^2$ au lieu de $1-x^2$. En sorte que la fonction $\varphi\alpha = x$ sera donnée par l'èquation

$$\alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

ou bien

$$\varphi'\alpha = \sqrt{((1-c^2\varphi^2\alpha)(1+e^2\varphi^2\alpha))}$$

Pour abréger, j'introduis deux autres fonctions de α, savoir:

$$f\alpha = \sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)};\ F\alpha = \sqrt{(1+e^2\varphi^2\alpha)}.$$

Plusieurs propriétés de ces fonctions se déduisent immédiatement des propriétés connues de la fonction elliptique de la première espéce, mais d'autres sont plus cachées. Par ex. on démontre, que les équations $\varphi\alpha = 0$, $f\alpha = 0$, $F\alpha = 0$ ont un nombre infini de racines, qu'on peut trouver toutes. Une des propriétés les plus remarquables est, qu'on peut exprimer rationnellement $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$ (m étant un nombre entier) en $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Aussi rien n'est plus facile, que de trouver $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$ $F(m\alpha)$, lorsqu'on connait $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$; mais le problème inverse, savoir de déterminer $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ en $\varphi(m\alpha)$, $f(m\alpha)$, $F(m\alpha)$ est plus difficile, parcequ'il dépend d'une équation d'un degré plus élevé (savoir du degré m^2).

La solution de cette équation est l'objet principal de ce mémoire. D'abord on fera voir, comment on peut trouver toutes les racines, au moyen des fonctions φ, f, F. On traitera ensuite de la solution algébrique de l'équation en question, et on parviendra à ce résultat remarquable, que $\varphi\left(\frac{\alpha}{m}\right)$; $f\left(\frac{\alpha}{m}\right)$; $F\left(\frac{\alpha}{m}\right)$ peuvent être exprimés en $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, au moyen d'une fonction, qui, par rapport à α, ne contient d'autres irrationnalités que des radicaux. Cela produit une classe très générale d'équations, qui sont résolubles algébriquement. Il est à remarquer, que les expressions des racines contiennent des quantités constantes, qui, en général, ne sont pas exprimables par des quantités algébriques. Ces quantités constantes dépendent d'une équation du degré $m^2 - 1$. On fera voir comment, au moyen de fonctions algébriques, on peut en ramener la solution à celle d'une équation du degré $m + 1$. On donnera plusieurs expressions des fonctions $\varphi(2n+1)\alpha$; $f(2n+1)\alpha$; $F(2n+1)\alpha$ en fonctions de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. On en déduira ensuite les valeurs de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ en fonctions de α. On démontrera, que ces fonctions peuvent être décomposées en un nombre infini de facteurs, et même en une infinité de fractions partielles.

§. 1.

Propriétes fondamentales des fonctions $\varphi\alpha$; $f\alpha$; $F\alpha$.

1.

En supposant, que $\varphi\alpha = x$ (1), on aura en vertu de ce qui précède:

2) $$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

Par là on voit, que α, considéré comme fonction de x, est positif depuis $x=0$, jusqu'à $x=\frac{1}{c}$. En faisant donc

$$3)\qquad \frac{\omega}{2}=\int_0^{\frac{1}{c}}\frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}},$$

il est évident, que $\varphi\alpha$ et positif et va en augmentant depuis $\alpha=0$ jusqu'à $\alpha=\frac{\omega}{2}$, et qu'on aura

$$4)\qquad \varphi(0)=0,\ \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{c}.$$

Parceque α change de signe, lorsqu'on écrit $-x$ à la place de x; il en est de même de la fonction $\varphi\alpha$ par rapport à α, et par conséquent on aura l'équation

$$5)\qquad \varphi(-\alpha)=-\varphi(\alpha).$$

En mettant dans (1) xi au lieu de x (où i, pour abréger, représente la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$) et désignant la valeur de α par βi, il viendra

$$6)\qquad xi=\varphi(\beta i) \text{ et } \beta=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{[(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)]}}.$$

β est réel et positif depuis $x=0$ jusqu'a $x=\frac{1}{e}$, donc en faisant

$$7)\qquad \frac{\varpi}{2}=\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dx}{\sqrt{[(1-e^2x^2)(1+c^2x^2)]}},$$

x sera positif, depuis $\beta=$ zéro jusqu'a $\beta=\frac{\varpi}{2}$, c'est-à-dire, la fonction $\frac{1}{i}\varphi(\beta i)$ sera positive entre les mêmes limites. En faisant $\beta=\alpha$ et $y=\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$, on a

$$\alpha=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{[(1-e^2y^2)(1+c^2y^2)]}},$$

donc on voit, qu'en supposant c au lieu de e et e au lieu de c,

$$\frac{\varphi(\alpha i)}{i} \text{ se changera en } \varphi\alpha.$$

Et parceque
$$f\alpha=\sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)},$$
$$F\alpha=\sqrt{(1+e^2\varphi^2\alpha)},$$

on voit, que par le changemant de c en e et e en c, $f(\alpha i)$ et $F(\alpha i)$ rentreront respectivement en $F\alpha$ et $f\alpha$. Enfin les équations (3) et (7) font voir, que par la même transformation, ω et ϖ rentreront respectivement en ϖ et ω.

Suivant (7) on aura $x=\frac{1}{e}$ pour $\beta=\frac{\varpi}{2}$, donc en vertu de l'équation $xi=\varphi(\beta i)$, il viendra

$$8)\qquad \varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\right)=i.\frac{1}{e}.$$

2.

En vertu de ce qui précède, on aura les valeurs de $\varphi\alpha$ pour toute valeur réelle de α, comprise entre $-\frac{\omega}{2}$ et $+\frac{\omega}{2}$, et pour toute valeur imaginaire de la forme βi de cette quantité, si β est une quantité contenue entre les limites $-\frac{\varpi}{2}$ et $+\frac{\varpi}{2}$. Il s'agit maintenant de trouver la valeur de cette fonction pour une valeur quelconque, réelle ou imaginaire, de la variable. Pour y parvenir, nous allons d'abord établir les propriétés fondamentales des fonctions φ, f et F.

Parce qu'on a

$$f^2\alpha = 1 - c^2\varphi^2\alpha,$$
$$F^2\alpha = 1 + e^2\varphi^2\alpha,$$

on aura, en différentiant:

$$f\alpha . f'\alpha = - c^2\varphi\alpha . \varphi'\alpha,$$
$$F\alpha . F'\alpha = e^2\varphi\alpha . \varphi'\alpha.$$

Or d'après (2) on a

$$\varphi'\alpha = \sqrt{((1-c^2\varphi^2\alpha)(1+e^2\varphi^2\alpha))} = f\alpha . F\alpha,$$

donc, en substituant cette valeur de $\varphi'\alpha$ dans les deux équations précédentes, on trouvera, que les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ sont liées entre elles par les équations

$$9)\quad \begin{cases} \varphi'\alpha = f\alpha . F\alpha, \\ f'\alpha = - c^2\varphi\alpha . F\alpha, \\ F'\alpha = e^2\varphi\alpha . f\alpha. \end{cases}$$

Cela posé, je dis, qu'en désignant par α et β deux indéterminées, on aura

$$10)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varphi\alpha . f\beta . F\beta + \varphi\beta . f\alpha . F\alpha}{1+e^2c^2 . \varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}, \\ f(\alpha+\beta) = \dfrac{f\alpha . f\beta - c^2 . \varphi\alpha . \varphi\beta . F\alpha . F\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}, \\ F(\alpha+\beta) = \dfrac{F\alpha . F\beta + e^2 . \varphi\alpha . \varphi\beta . f\alpha . f\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha . \varphi^2\beta}. \end{cases}$$

Ces formules peuvent être déduites sur le champ des propriétés connues des fonctions elliptiques; mais on peut aussi les vérifier aisément de la manière suivante.

En désignant par r le second membre de la première des équations (10), on aura, en différentiant par rapport à α:

$$\left(\frac{dr}{d\alpha}\right) = \frac{(\varphi'\alpha.f\beta.F\beta+\varphi\beta.F\alpha.f'\alpha+\varphi\beta.f\alpha.F'\alpha)}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}$$
$$-\frac{(\varphi\alpha.f\beta.F\beta+\varphi\beta.f\alpha.F\alpha).2e^2c^2\varphi\alpha.\varphi^2\beta.\varphi'\alpha}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)^2}$$

En substituant pour $\varphi'\alpha$, $f'\alpha$, $F'\alpha$ leurs valeurs données par les équations (9), il viendra

$$\left(\frac{dr}{d\alpha}\right) = \frac{f\alpha.F\alpha.f\beta.F\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta} - \frac{2e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta.f\alpha.f\beta.F\alpha.F\beta}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)^2}$$
$$+\frac{\varphi\alpha.\varphi\beta.(1+e^2c^2\varphi^2\alpha\varphi^2\beta)(-c^2F^2\alpha+e^2f^2\alpha)-2e^2c^2\varphi\alpha\varphi\beta.\varphi^2\beta.f^2\alpha.F^2\alpha}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha\varphi^2\beta)^2}$$

d'où, en substituant pour $f^2\alpha$ et $F^2\alpha$ leurs valeurs: $1-c^2\varphi^2\alpha$, , $1+e^2\varphi^2\alpha$, et en réduisant, on tire

$$\left(\frac{dr}{d\alpha}\right) = \frac{(1-e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)[(e^2-c^2)\varphi\alpha.\varphi\beta+f\alpha.f\beta.F\alpha.f\beta]-2e^2c^2\varphi\alpha.\varphi\beta(\varphi^2\alpha+\varphi^2\beta)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)^2}$$

Maintenant α et β entrent symétriquement dans l'expression de r; donc on aura la valeur de $\left(\frac{dr}{d\beta}\right)$, en permutant α et β dans la valeur de $\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)$. Or par cela l'expression de $\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)$ ne change pas de valeur, donc on aura $\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)=\left(\frac{dr}{d\beta}\right)$.

Cette équation aux différentielles partielles fait voir que r est fonction de $\alpha+\beta$; donc on aura

$$r = \psi(\alpha+\beta).$$

La forme de la fonction ψ se trouvera, en donnant a β une valeur particulière. En supposant par ex. $\beta=0$, et remarquant que $\varphi(0)=0$, $f(0)=1$, $F(0)=1$, les deux valeurs de r deviendront

$$r=\varphi(\alpha) \text{ et } r=\psi(\alpha),$$

donc

$$\psi(\alpha)=\varphi(\alpha),$$

et de là

$$r=\psi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha+\beta).$$

La première des formules (10) a donc lieu effectivement.

De la même manière on vérifiera les deux autres formules.

Des formules (10) on peut déduire une foule d'autres. Je vais rapporter quelques-unes des plus remarquables. Pour abréger je fais

$$11) \qquad 1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta = R$$

En changeant d'abord le signe de β, on obtiendra

$$12)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+\beta)+\varphi(\alpha-\beta)=\dfrac{2\varphi\alpha.f\beta.F\beta}{R}, \\ \varphi(\alpha+\beta)-\varphi(\alpha-\beta)=\dfrac{2\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{R}, \\ f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)=\dfrac{2f\alpha.f\beta}{R}, \\ f(\alpha+\beta)-f(\alpha-\beta)=\dfrac{-2c^2.\varphi\alpha.\varphi\beta.F\alpha.F\beta}{R}, \\ F(\alpha+\beta)+F(\alpha-\beta)=\dfrac{2F\alpha.F\beta}{R}, \\ F(\alpha+\beta)-F(\alpha-\beta)=\dfrac{2e^2.\varphi\alpha.\varphi\beta.f\alpha.f\beta}{R}. \end{cases}$$

En formant le produit de $\varphi(\alpha+\beta)$ et $\varphi(\alpha-\beta)$, on trouvera

$$\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varphi\alpha.f\beta.F\beta+\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{R}.\frac{\varphi\alpha.f\beta.F\beta-\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{R}$$

$$=\frac{\varphi^2\alpha.f^2\beta.F^2\beta-\varphi^2\beta f^2\alpha.F^2\alpha}{R^2},$$

ou, en substituant les valeurs de $f^2\beta$, $F^2\beta$, $f^2\alpha$, $F^2\alpha$ en $\varphi\beta$ et $\varphi\alpha$:

$$\varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varphi^2\alpha-\varphi^2\beta-e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^4\beta+e^2c^2\varphi^2\beta.\varphi^4\alpha}{R^2}$$

$$=\frac{(\varphi^2\alpha-\varphi^2\beta)(1+e^2e^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta)}{R^2};$$

or $R=1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta$, donc

$$13)\qquad \varphi(\alpha+\beta).\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varphi^2\alpha-\varphi^2\beta}{R}.$$

On trouvera de même

$$14)\quad \begin{cases} f(\alpha+\beta).f(\alpha-\beta)=\dfrac{f^2\alpha-c^2\varphi^2\beta.F^2\alpha}{R}=\dfrac{f^2\beta-c^2\varphi^2\alpha.F^2\beta}{R} \\ =\dfrac{1-c^2\varphi^2\alpha-c^2\varphi^2\beta-c^2e^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}=\dfrac{f^2\alpha.f^2\beta-c^2(c^2+e^2)\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}, \\ F(\alpha+\beta).F(\alpha-\beta)=\dfrac{F^2\alpha+e^2\varphi^2\beta.f^2\alpha}{R}=\dfrac{F^2\beta+e^2\varphi^2\alpha.f^2\beta}{R} \\ =\dfrac{1+e^2\varphi^2\alpha+e^2\varphi^2\beta-e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}=\dfrac{F^2\alpha.F^2\beta-e^2(c^2+e^2)\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{R}. \end{cases}$$

4.

En faisant dans les formules (10) $\beta=\pm\frac{\omega}{2}$, $\beta=\pm\frac{\varpi}{2}i$, et remarquant que $f\left(\pm\frac{\omega}{2}\right)=0$, $F\left(\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=0$, on aura

$$15)\quad\begin{cases}\varphi\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)=\pm\varphi\frac{\omega}{2}\cdot\frac{f\alpha}{F\alpha};\ f\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)=\mp\frac{F\frac{\omega}{2}}{\varphi\frac{\omega}{2}}\cdot\frac{\varphi\alpha}{F\alpha};\\ F\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)=\frac{F\frac{\omega}{2}}{F\alpha};\\ \varphi\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=\pm\varphi\frac{\varpi}{2}i.\frac{F\alpha}{f\alpha};\ F\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=\mp\frac{f\frac{\varpi}{2}i}{\varphi\frac{\varpi}{2}i}\cdot\frac{\varphi\alpha}{f\alpha};\\ f\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=\frac{f\frac{\varpi}{2}i}{f\alpha};\end{cases}$$

ou bien:

$$16)\quad\begin{cases}\varphi\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)=\pm\frac{1}{c}\cdot\frac{f\alpha}{F\alpha};\ f\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)=\mp\sqrt{(e^2+c^2)}.\frac{\varphi\alpha}{F\alpha}.\\ F\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\sqrt{(e^2+c^2)}}{c}\cdot\frac{1}{F\alpha};\\ \varphi\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=\pm\frac{i}{e}\cdot\frac{F\alpha}{f\alpha};\ F\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=\pm i\sqrt{(e^2+c^2)}.\frac{\varphi\alpha}{f\alpha}.\\ f\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right)=\frac{\sqrt{(e^2+c^2)}}{e}\cdot\frac{1}{f\alpha};\end{cases}$$

De là on tire sur le champ:

$$17)\quad\begin{cases}\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right);\ f\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)=-f\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right);\\ F\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)=F\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right);\\ \varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i-\alpha\right);\ F\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=-F\left(\frac{\varpi}{2}i-\alpha\right);\\ f\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=f\left(\frac{\varpi}{2}i-\alpha\right);\end{cases}$$

$$18)\quad \varphi\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right)\cdot\varphi\left(\alpha+\frac{\varpi}{2}i\right)=\pm\frac{i}{ce};\ F\left(\alpha\pm\frac{\omega}{2}\right).F\alpha=\frac{b}{c};f\left(\alpha\pm\frac{\varpi}{2}i\right).f\alpha=\frac{b}{e}.$$

En faisant $\alpha=\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\varpi}{2}i$, on trouve de là

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)=\frac{1}{0},\ f\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)=\frac{1}{0},\ F\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)=\frac{1}{0}.$$

Ensuite les équations (17), en y mettant dans les trois premières $\alpha+\frac{\omega}{2}$ au lieu de α, et dans les trois dernières $\alpha+\frac{\varpi}{2}i$ au lieu de α, donnent les suivantes

$$19)\begin{cases}\varphi(\alpha+\omega)=-\varphi\alpha;\; f(\alpha+\omega)=-f\alpha;\; F(\alpha+\omega)=\quad F\alpha;\\ \varphi(\alpha+\varpi i)=-\varphi\alpha;\; f(\alpha+\varpi i)=\quad f\alpha;\; F(\alpha+\varpi i)=-F\alpha;\end{cases}$$

et en mettant $\alpha+\omega$ et $\alpha+\varpi i$ au lieu de α:

$$20)\begin{cases}\varphi(2\omega+\alpha)=\varphi\alpha;\;\varphi(2\varpi i+\alpha)=\varphi\alpha;\;\varphi(\omega+\varpi i+\alpha)=\varphi\alpha;\\ f(2\omega+\alpha)=f\alpha;\; f(2\varpi i+\alpha)=f\alpha;\\ F(2\omega+\alpha)=F\alpha;\; F(2\varpi i+\alpha)=F\alpha.\end{cases}$$

Ces équations font voir que les fonctions $\varphi\alpha, f\alpha, F\alpha$ sont des fonctions *périodiques*. On en déduira sans peine les suivantes, où m et n sont deux nombres entiers positifs ou négatifs:

$$21)\begin{cases}\varphi((m+n)\omega+(m-n)\varpi i+\alpha)=\varphi\alpha;\;\varphi((m+n)\omega+(m-n+1)\varpi i+\alpha)=-\varphi\alpha;\\ f(2m\omega+n\varpi i+\alpha)=f\alpha;\quad f((2m+1)\omega+n\varpi i+\alpha)=-f\alpha;\\ F(m\omega+2n\varpi i+\alpha)=+F\alpha;\; F(m\omega+(2n+1)\varpi i+\alpha)=-F\alpha.\end{cases}$$

Ces formules peuvent aussi s'écrire comme il suit:

$$22)\quad\begin{cases}\varphi(m\omega+n\varpi i\pm\alpha)=\pm(-1)^{m+n}.\varphi\alpha,\\ f(m\omega+n\varpi i\pm\alpha)=(-1)^{m}.f\alpha,\\ F(m\omega+n\varpi i\pm\alpha)=(-1)^{n}.F\alpha.\end{cases}$$

On peut remarquer comme cas particuliers:

$$22')\begin{cases}\varphi(m\omega\pm\alpha)=\pm(-1)^{m}.\varphi\alpha;\;\varphi(n\varpi i\pm\alpha)=\pm(-1)^{n}.\varphi\alpha;\\ f(m\omega\pm\alpha)=(-1)^{m}.f\alpha;\quad f(n\varpi i\pm\alpha)=f\alpha;\\ F(m\omega\pm\alpha)=F\alpha;\quad F(n\varpi i\pm\alpha)=(-1)^{n}.F\alpha.\end{cases}$$

5.

Les formules qu'on vient d'établir, font voir qu'on aura les valeurs des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de la variable, lorsqu'on les connaît pour les valeurs réelles de cette quantité, comprises entre $\frac{\omega}{2}$ et $-\frac{\omega}{2}$ et pour les valeurs imaginaires de la forme βi, où β est compris entre $\frac{\varpi}{2}$ et $-\frac{\varpi}{2}$.

En effet, supposons qu'on demande la valeur des fonctions $\varphi(\alpha+\beta i)$, $f(\alpha+\beta i)$, $F(\alpha+\beta i)$, où α et β sont des quantités réelles quelconques. En mettant dans les formules (10) βi à la place de β, il est clair, qu'on aura les trois fonctions dont il s'agit, exprimées par les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, $\varphi(\beta i)$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$. Il ne reste donc, qu'à déterminer ces dernières. Or, quelles que soient les valeurs de α et β, on peut toujours trouver deux nombres entiers m et n, tels que $\alpha=m.\omega\pm\alpha'$, $\beta=n\varpi\pm\beta'$, où α' est une quantité comprise

entre 0 et $+\frac{\omega}{2}$, et β' entre 0 et $+\frac{\varpi}{2}$. Donc on aura, en vertu des équations (22′), en substituant les valeurs précédentes de α et β:

$$\varphi(\alpha)=\varphi(m\omega\pm\alpha')=\pm(-1)^m.\varphi\alpha',$$
$$f(\alpha)=f(m\omega\pm\alpha')=(-1)^m.f\alpha',$$
$$F(\alpha)=F(m\omega\pm\alpha')=F\alpha',$$
$$\varphi(\beta i)=\varphi(n\varpi i\pm\beta' i)=\pm(-1)^n.\varphi(\beta' i),$$
$$f(\beta i)=f(n\varpi i\pm\beta' i)=f(\beta' i),$$
$$F(\beta i)=F(n\varpi i\pm\beta' i)=(-1)^n.F(\beta' i).$$

Donc les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, $\varphi(\beta i)$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$ seront exprimées comme on vient de le dire, et par suite aussi les fonctions $\varphi(\alpha+\beta i)$, $f(\alpha+\beta i)$, $F(\alpha+\beta i)$.

Nous avons vu précédemment, que $\varphi\alpha$ est réel depuis $\alpha=-\frac{\omega}{2}$ jusqu'à $\alpha=+\frac{\omega}{2}$, et que $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ est réel depuis $\alpha=-\frac{\varpi}{2}$ jusqu'à $\alpha=+\frac{\varpi}{2}$.

Donc en vertu des équations (22) il est clair:

1) que $\varphi(\alpha)$ et $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ sont réels pour toute valeur réelle de α; $\varphi\alpha$ est compris entre $-\frac{1}{c}$ et $+\frac{1}{c}$, et $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ entre $-\frac{1}{e}$et $+\frac{1}{e}$;

2) que $\varphi(\alpha)$ s'évanouit pour $\alpha=m\omega$, et $\frac{\varphi(\alpha i)}{i}$ pour $\alpha=m\varpi$, m étant un nombre entier positif ou négatif; mais $\varphi(\alpha)$ n'est pas nul pour aucune autre valeur réelle de α.

En remarquant, que $f\alpha=\sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)}$, $F\alpha=\sqrt{(1+e^2\varphi^2\alpha)}$, il suit de ce que nous venons de dire:

1) que les fonctions $f(\alpha)$, $F(\alpha)$, $f(\alpha i)$, $F(\alpha i)$ sont réelles pour toute valeur de α;

2) que $f(\alpha)$ est compris entre les limites -1 et $+1$ et $F(\alpha)$ entre les litmites $+1$ et $+\sqrt{\left(1+\frac{e^2}{c^2}\right)}$, ensorte que $F\alpha$ est positif pour toute valeur réelle de α;

3) que $f(\alpha i)$ est positif et compris entre les limites $+1$ et $\sqrt{\left(1+\frac{c^2}{e^2}\right)}$ et $F(\alpha i)$ entre les limites -1 et $+1$ pour toute valeur réelle de α;

4) que $f(\alpha)$ s'évanouit pour $\alpha=(m+\frac{1}{2})\omega$ et $F(i\alpha)$ pour $\alpha=(m+\frac{1}{2})\varpi$; mais pour nulle autre valeur de α.

On remarquera ce qui suit, comme corrollaires qu'on tire des formules (22):

1) Soit $\alpha = 0$. Dans ce cas, en remarquant que $\varphi(0) = 0$, $f(0) = 1$, $F(0) = 1$, on aura

$$23) \quad \begin{cases} \varphi(m\omega + n\varpi i) = 0 \\ f(m\omega + n\varpi i) = (-1)^m \\ F(m\omega + n\varpi i) = (-1)^n \end{cases}$$

2) Soit $\alpha = \frac{\omega}{2}$ En vertu des équations:

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{c},\ f\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0,\ F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{b}{c},$$

on aura

$$24) \quad \begin{cases} \varphi((m+\frac{1}{2})\omega + n\varpi i) = (-1)^{m+n} \cdot \frac{1}{c}, \\ f((m+\frac{1}{2})\omega + n\varpi i) = 0, \\ F((m+\frac{1}{2})\omega + n\varpi i) = (-1)^n \cdot \frac{b}{c}. \end{cases}$$

3) Soit $\alpha = \frac{\varpi}{2} i$. En vertu des équations

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{i}{e},\ f\left(\frac{\varpi}{2} i\right) = \frac{b}{e},\ F\left(\frac{\varpi}{2} i\right) = 0,$$

on aura

$$25) \quad \begin{cases} \varphi(m\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i) = (-1)^{m+n} \cdot \frac{i}{e}, \\ f(m\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i) = (-1)^m \cdot \frac{b}{e}, \\ F(m\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i) = 0. \end{cases}$$

4) Soit $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i$. En vertu des équations ci-dessus on aura

$$26) \quad \begin{cases} \varphi((m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i) = \frac{1}{0}, \\ f((m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i) = \frac{1}{0}, \\ F((m+\frac{1}{2})\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i) = \frac{1}{0}. \end{cases}$$

6.

Les équations (23), (24), (25) font voir que la fonction $\varphi(\alpha)$ s'évanouit toutes les fois que α est de la forme $\alpha = m\omega + n\varpi i$; que $f\alpha$ s'évanouit toutes les fois que α est de la forme $\alpha = (m+\frac{1}{2})\omega + n\varpi i$, et que $F\alpha$ s'évanouit toutes les fois que α est de la forme $\alpha = m\omega + (n+\frac{1}{2})\varpi i$. Or je dis que pour toute autre valeur de α, les fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ auront nécessairement une valeur différente de zéro.

Supposons en effet qu'on ait

$$\varphi(\alpha+\beta i)=0,$$

α et β étant des quantités réelles. En vertu de la première des formules (10), cette équation peut s'écrire comme il suit:

$$\frac{\varphi\alpha.f(\beta i).F(\beta i)+\varphi(\beta i).f\alpha.F\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2(\beta i)}=0.$$

Maintenant les quantités $\varphi\alpha$, $f(\beta i)$, $F(\beta i)$ sont réelles et $\varphi(\beta i)$ est de la forme $i.A$, où A est réel; donc cette équation ne peut pas subsister à moins qu'on n'ait séparément:

$$\varphi(\alpha).f(\beta i).F(\beta i)=0;\ \varphi(\beta i).f\alpha.F\alpha=0.$$

Ces équations ne peuvent être satisfaites, que de deux manières, savoir en faisant

$$\varphi(\alpha)=0,\ \varphi(\beta i)=0,$$

ou

$$f(\beta i).F(\beta i)=0,\ f\alpha.F\alpha=0.$$

Les deux premières équations donnent $\alpha=m\omega$; $\beta=n\varpi$.

Les deux dernières, en remarquant que $F\alpha$ et $f(\beta i)$ ne peuvent jamais s'évanouir, donnent

$$f\alpha=0,\ F(\beta i)=0,$$

d'où

$$\alpha=(m+\tfrac{1}{2})\omega,\ \beta=(n+\tfrac{1}{2})\varpi.$$

Mais pour ces valeurs de α et β la valeur de $\varphi(\alpha+\beta i)$ deviendra infinie; donc les seules valeur de α et β sont $\alpha=m\omega$ et $\beta=n\varpi$, et par conséquent toutes les racines de l'équation

$$\varphi(x)=0,$$

peuvent être représentées par

$$x=m\omega+n\varpi i. \qquad 27)$$

De la même manière on trouvera, que toutes les racines de l'équation

$$f(x)=0,$$

peuvent être représentées par

$$x=(m+\tfrac{1}{2})\omega+n\varpi i, \qquad 28)$$

et celles de l'équation

$$F(x)=0,$$

par

$$x=m\omega+(n+\tfrac{1}{2})\varpi i. \qquad 29)$$

7.

Les formules (26) font voir qu'on satisfait aux trois équations

$$\varphi(x)=\tfrac{1}{0},\ f(x)=\tfrac{1}{0},\ F(x)=\tfrac{1}{0},$$

en donnant à x une des valeurs de la forme

30) $$x = (m+\tfrac{1}{2})\omega + (n+\tfrac{1}{2})\varpi i.$$

Or on peut démontrer que les équations en question n'ont pas d'autres racines.

En effet, ayant

$$\varphi(x) = \frac{i}{ec}\cdot\frac{1}{\varphi\left(x-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)},\ f(x) = \frac{b}{e}\cdot\frac{1}{f\left(x-\frac{\varpi}{2}i\right)},\ F(x) = \frac{b}{c}\cdot\frac{1}{F\left(x-\frac{\omega}{2}\right)},$$

les équations en question entraîneront celles-ci:

$$\varphi\left(x-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right) = 0,\ f\left(x-\frac{\varpi}{2}i\right) = 0,\ F\left(x-\frac{\omega}{2}\right) = 0;$$

mais en vertu de ce qu'on vient de voir dans le numéro précédent, ces équations donnent respectivement:

$$x - \frac{\omega}{2} - \frac{\varpi}{2}i = m\omega + n\varpi i;\ x - \frac{\varpi}{2}i = (m+\tfrac{1}{2})\omega + n\varpi i,$$

$$x - \frac{\omega}{2} = m\omega + (n+\tfrac{1}{2})\varpi i;$$

c'est-à-dire, on aura pour les trois équations:

$$x = (m+\tfrac{1}{2})\omega + (n+\tfrac{1}{2})\varpi i,$$

c. q. f. d.

8.

Ayant trouvé comme ci-dessus toutes les racines des équations

$$\varphi(x) = 0,\ f(x) = 0,\ F(x) = 0,$$

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{0},\ f(x) = \tfrac{1}{0},\ F(x) = \tfrac{1}{0};$$

je vais maintenant chercher les racines des équations plus générales.

$$\varphi(x) = \varphi a,\ f(x) = fa,\ F(x) = Fa,$$

où a est une quantité quelconque réelle où imaginaire.

Considérons d'abord l'équation

$$\varphi(x) - \varphi a = 0.$$

En faisant dans la seconde des formules (12)

$$\alpha = \frac{x+a}{2},\quad \beta = \frac{x-a}{2},$$

on trouvera

$$\varphi x - \varphi a = \frac{2\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right).f\left(\frac{x+a}{2}\right).F\left(\frac{x+a}{2}\right)}{1+e^2c^2.\varphi^2\left(\frac{x+a}{2}\right).\varphi^2\left(\frac{x-a}{2}\right)} = 0.$$

Cette équation ne peut subsister que dans l'un des cinq cas suivants

1. si $\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right)=0$, d'où $x=a+2m\omega+2n\varpi i$,

2. si $f\left(\frac{x+a}{2}\right)=0$, d'où $x=-a+(2m+1)\omega+2n\varpi i$,

3. si $F\left(\frac{x+a}{2}\right)=0$, d'où $x=-a+2m\omega+(2n+1)\varpi i$,

4. si $\varphi\left(\frac{x-a}{2}\right)=\frac{1}{0}$, d'où $x=a+(2m+1)\omega+(2n+1)\varpi i$,

5. si $\varphi\left(\frac{x+a}{2}\right)=\frac{1}{0}$, d'où $x=-a+(2m+1)\omega+(2n+1)\varpi i$.

La résolution de ces cinq équations est contenue dans les formules (27), (28), (29).

Des valeurs trouvées de x il faut rejeter celles, que donne la formule

$$x=-a+(2m+1)\omega+(2n+1)\varpi i,$$

car une telle valeur de x donne en vertu de (22):

$$\varphi x=-\varphi a,$$

tandis qu'on doit avoir $\varphi x=\varphi a$; mais les autres valeurs de x, exprimées par les quatre premières formules, peuvent être admises. Elles sont, comme on voit, contenues dans la seule formule:

31) $$x=(-1)^{m+n}.a+m\omega+n\varpi i.$$

Telle est donc l'éxpression générale de toutes les racines de l'équation

$$\varphi x=\varphi a.$$

De la même maniere on trouvera, que toutes le racines de l'équation

$$fx=fa$$

sont représentées par la formule

32) $$x=\pm a+2m\omega+n\varpi i,$$

et toutes celles de l'équation

$$Fx=Fa,$$

par la formule

33) $$x=\pm a+m\omega+2n\varpi i.$$

§. II.

Formules qui donnent les valeurs de $\varphi(n\alpha)$, $f(n\alpha)$, $F(n\alpha)$ exprimées en fonctions rationnelles de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

9.

Reprenons les formules (12). En faisant dans la 1[e], 3[e] et 5[e] $\alpha=n\beta$, il viendra:

$$34)\quad \begin{cases} \varphi(n+1)\beta = -\varphi(n-1)\beta + \dfrac{2\varphi(n\beta).f\beta.F\beta}{R}, \\ f(n+1)\beta = -f(n-1)\beta + \dfrac{2f(n\beta).f\beta}{R}, \\ F(n+1)\beta = -F(n-1)\beta + \dfrac{2F(n\beta).F\beta}{R}, \end{cases}$$

où $R = 1 + c^2e^2.\varphi^2(n\beta).\varphi^2\beta$.

Ces formules donnent la valeur de $\varphi(n+1)\beta$ en $\varphi(n-1)\beta$ et $\varphi(n\beta)$; celle de $f(n+1)\beta$ en $f(n-1)\beta$ et $f(n\beta)$, et celle de $F(n+1)\beta$ en $F(n-1)\beta$ et $F(n\beta)$. Donc en faisant successivement $n = 1, 2, 3 \ldots$, on trouvera successivement les valeurs des fonctions:

$$\varphi(2\beta),\ \varphi(3\beta),\ \varphi(4\beta) \ldots \varphi(n\beta),$$
$$f(2\beta),\ f(3\beta),\ f(4\beta) \ldots f(n\beta),$$
$$F(2\beta),\ F(3\beta),\ F(4\beta) \ldots F(n\beta),$$

exprimées en fonctions rationnelles des trois quantités

$$\varphi\beta;\ f\beta;\ F\beta.$$

En faisant p. ex. $n = 1$, on aura,

$$35)\quad \begin{cases} \varphi(2\beta) = \dfrac{2.\varphi\beta.f\beta.F\beta}{1+e^2c^2\varphi^4\beta}, \\ f(2\beta) = -1 + \dfrac{2f^2\beta}{1+e^2c^2\varphi^4\beta}, \\ F(2\beta) = -1 + \dfrac{2F^2\beta}{1+e^2c^2\varphi^4\beta}. \end{cases}$$

Les fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ étant des fonctions rationnelles de $\varphi\beta$, $f\beta$, $F\beta$, on peut toujours les réduire à la forme $\dfrac{P}{Q}$, où P et Q sont des fonctions entières de $\varphi\beta$, $f\beta$, $F\beta$. De même il est clair, que le dénominateur Q aura la même valeur pour les trois fonctions que l'on considère. Soit donc

$$35')\quad \varphi(n\beta) = \frac{P_n}{Q_n},\ f(n\beta) = \frac{P'_n}{Q_n},\ F(n\beta) = \frac{P''_n}{Q_n},$$

on aura également

$$\varphi(n+1)\beta = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}},\ f(n+1)\beta = \frac{P'_{n+1}}{Q_{n+1}},\ F(n+1)\beta = \frac{P''_{n+1}}{Q_{n+1}},$$
$$\varphi(n-1)\beta = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ f(n-1)\beta = \frac{P'_{n-1}}{Q_{n-1}},\ F(n-1)\beta = \frac{P''_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

En substituant ces valeurs, la première des formules (34) deviendra:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = -\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \frac{2f\beta.F\beta.\dfrac{P_n}{Q_n}}{1+c^2e^2\varphi^2\beta.\dfrac{P^2_n}{Q^2_n}},$$

ou bien $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{-P_{n-1}.(Q^2_n+c^2e^2\varphi^2\beta.P^2_n)+2P_n.Q_n.Q_{n-1}.f\beta.F\beta}{Q_{n-1}.(Q^2_n+e^2c^2\varphi^2\beta.P^2_n)}$.

En égalant les numérateurs et les dénominateurs de ces deux fractions, on aura

36) $P_{n+1} = -P_{n-1}(Q^2_n + c^2e^2\varphi^2\beta.P^2_n) + 2f\beta.F\beta.P_n.Q_n.Q_{n-1}$,

37) $Q_{n+1} = \quad Q_{n-1}(Q^2_n + e^2c^2\varphi^2\beta.P^2_n)$.

La seconde et la troisième des équations (34) donneront de la même manière:

38) $P'_{n+1} = -P'_{n-1}.(Q^2_n + c^2e^2\varphi^2\beta.P^2_n) + 2f\beta.P'_n.Q_n.Q_{n-1}$,

39) $P''_{n+1} = -P''_{n-1}.(Q^2_n + c^2e^2\varphi^2\beta.P^2_n) + 2F\beta.P''_n.Q_n.Q_{n-1}$.

En faisant dans ces quatre formules $n=1, 2, 3\ldots$, et remarquant, qu'on aura:

$$Q_0 = 1,\ Q_1 = 1,\quad P_0 = 0,\ P_1 = \varphi\beta,$$
$$P'_0 = 1,\ P'_1 = f\beta,\ P''_0 = 1,\ P''_1 = F\beta,$$

on trouvera successivement les fonctions entières Q_n, P_n, P'_n, P''_n, pour toutes les valeurs de n.

Soient pour abréger:

40) $$\varphi\beta = x,\ f\beta = y,\ \mathrm{F}\beta = z \text{ et}$$

41) $$R_n = Q^2_n + e^2c^2x^2P^2_n,$$

les formules précédentes donneront:

42) $$\begin{cases} Q_{n+1} = Q_{n-1}.R_n, \\ P_{n+1} = -P_{n-1}.R_n + 2yz.P_n.Q_n.Q_{n-1}, \\ P'_{n+1} = -P'_{n-1}.R_n + 2y.P'_n.Q_n.Q_{n-1}, \\ P''_{n+1} = -P''_{n-1}.R_n + 2z.P''_n.Q_n.Q_{n-1}. \end{cases}$$

En posant $n=1, 2$, on aura:

43) $$\begin{cases} R_1 = Q^2_1 + e^2c^2x^2P^2_1 = 1 + e^2c^2x^4, \\ Q_2 = Q_0R_1 = 1 + e^2c^2x^4, \\ P_2 = -P_0R_1 + 2yzP_1.Q_1.Q_0 = 2xyz, \\ P'_2 = -P'_0R_1 + 2yP'_1.Q_1.Q_0 = -1 - e^2c^2x^4 + 2y^2, \\ P''_2 = -P''_0R_1 + 2zP''_1.Q_1.Q_0 = -1 - e^2c^2x^4 + 2z^2. \end{cases}$$

44) $$\begin{cases} R_2 = Q^2_2 + e^2c^2x^2.P^2_2 = (1+e^2c^2x^4)^2 + e^2c^2x^2.4x^2y^2z^2, \\ Q_3 = Q_1R_2 = R_2, \\ P_3 = -P_1R_2 + 2yzP_2Q_2Q_1 = -xR_2 + 4y^2z^2x.Q_2 \\ \quad = x(4y^2z^2\,Q_2 - R_2), \\ P'_3 = -P'_1.R_2 + 2y.P'_2.Q_2Q_1 = -y.R_2 + 2yP'_2Q_2 \\ \quad = y(2Q_2P'_2 - R_2), \\ P''_3 = z(2Q_2P''_2 - R_2). \end{cases}$$

En continuant de cette sorte, et en remarquant que $y^2 = 1 - c^2x^2$, $z^2 = 1 + e^2x^2$, on verra aisément, que les quantités:

$$Q_n, \frac{P_{2n}}{xyz}, \frac{P_{2n+1}}{x}, P'_{2n}, \frac{P'_{2n+1}}{y}, P''_{2n}, \frac{P''_{2n+1}}{z}$$

sont des fonctions entières des trois quantités x^2, y^2, z^2 et par conséquent aussi de l'une de ces quantités quelconque pour une valeur entière quelconque de n.

Cela fait voir que les expressions de $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ seront de la forme suivante:

$$45) \begin{cases} \varphi(2n\beta) = \varphi\beta . f\beta . F\beta . T, & \varphi(2n+1)\beta = \varphi\beta . T' \\ f(2n\beta) = T_1, & f(2n+1)\beta = f\beta . T'', \\ F(2n\beta) = T_2, & F(2n+1)\beta = F\beta . T''', \end{cases}$$

où T etc. représentent des fonctions rationnelles des quantités $(\varphi\beta)^2$, $(f\beta)^2$, $(F\beta)^2$.

§. III.

Résolution des équations

$$\varphi(n\beta) = \frac{P_n}{Q_n}, \quad f(n\beta) = \frac{P'_n}{Q_n}, \quad F(n\beta) = \frac{P''_n}{Q_n}.$$

10.

Suivant ce qu'on a vu, les fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ s'expriment rationnellement en x, y, z. Le réciproque n'a pas lieu, car les équations (35') sont en général d'un degré très élevé. Elles ont par cette raison un certain nombre de racines. Nous allons voir, comment on peut aisément exprimer toutes ces racines au moyen des fonctions φ, f, F.

A. Considérons d'abord l'équation $\varphi(n\beta) = \frac{P_n}{Q_n}$, ou $Q_n . \varphi(n\beta) = P_n$, et cherchons toutes les valeurs de x.

Il faut distinguer deux cas, selon que n est pair ou impair:

1) *Si n est un nombre pair.*

D'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent (45), on aura dans ce cas

$$\varphi(2n\beta) = \psi(x^2) . x . y . z,$$

c'est-à-dire, en vertu des formules

$$y = \sqrt{(1 - c^2x^2)}, \quad z = \sqrt{(1 + e^2x^2)},$$
$$\varphi(2n\beta) = x\psi(x^2) . \sqrt{((1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2))}.$$

Donc l'équation en x deviendra,

$$\varphi^2(2n\beta) = x^2(\psi(x^2))^2 . (1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2).$$

En désignant le second membre par $\theta(x^2)$, on aura

$$\varphi^2(2n\beta) = \theta(x^2).$$

$\varphi\beta$ étant une des valeurs de x, on aura

$$46)\qquad \varphi^2(2n\beta) = \theta(\varphi^2\beta),$$

équation qui a lieu, quelle que soit la valeur de β. Pour trouver les autres valeurs de x, soit $x = \varphi\alpha$ une racine quelconque, on doit avoir

$$\varphi^2(2n\beta) = \theta(\varphi^2\alpha).$$

Or, en mettant dans (46) α au lieu de β, il viendra

$$\varphi^2(2n\alpha) = \theta(\varphi^2\alpha), \text{ donc:}$$

$$47)\qquad \varphi^2(2n\beta) = \varphi^2(2n\alpha),$$

équation qui revient à ces deux-ci:

$$\varphi(2n\alpha) = \varphi(2n\beta) \text{ et } \varphi(2n\alpha) = -\varphi(2n\beta).$$

La première donne en vertu de (31)

$$2n\alpha = 2n\beta.(-1)^{m+\mu} + m\omega + \mu\varpi i,$$

où m et μ sont deux nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs, zéro y compris.

La seconde donne les mêmes valeurs de $2n\alpha$, mais de signe contraire, comme il est aisé de voir, en l'écrivant comme suit:

$$\varphi(-2n\alpha) = \varphi(2n\beta).$$

Toute valeur de $2n\alpha$, qui satisfait à l'équation (47), peut donc être représentée par

$$2n\alpha = \pm\left(2n\beta.(-1)^{m+\mu} + m\omega + \mu\varpi i\right).$$

De là on tire la valeur de α, en divisant par $2n$, savoir:

$$\alpha = \pm\left((-1)^{m+\mu}.\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right).$$

Ayant la valeur de α, on aura

$$48)\qquad \varphi\alpha = \pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}.\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right) = x.$$

Donc toutes les valeurs de x sont contenues dans cette expression, et on les trouvera, en donnant aux nombres m et μ toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Or pour avoir toutes celles qui sont différentes entre elles, il suffit de donner à m et μ des valeurs entières moindres que $2n$. En effet, quels que soient ces nombres, on peut toujours les supposer réduits à la forme:

$$m = 2n.k + m', \quad \mu = 2n.k' + \mu',$$

où k, k' sont des nombres entiers, et m', μ', des nombres entiers moindres que $2n$. En substituant ces valeurs dans l'expression de x, elle deviendra:

$$x = \pm\varphi\left((-1)^{m'+\mu'}\beta + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\varpi i + k\omega + k'\varpi i\right),$$

or en vertu de (22) cette expression se réduit à

49) $$x = \pm\varphi\left((-1)^{m'+\mu'}\beta + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\varpi i\right).$$

Cette valeur de x est de la même forme que la précédente (48), m et μ seulement sont remplacés par m' et μ', qui, tous les deux, sont positifs et moindres que $2n$; donc on obtiendra toutes les valeurs différentes de x, en donnant seulement à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ excl. Toutes ces valeurs sont nécessairement différentes entre elles. En effet, supposons par ex. qu'on ait

$$\pm\varphi\left((-1)^{m'+\mu'}\beta + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\varpi i\right)$$
$$= \pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right),$$

il s'en suivrait, d'après (31):

$$(-1)^{m'+\mu'}\beta + \frac{m'}{2n}\omega + \frac{\mu'}{2n}\varpi i = \pm\left((-1)^{m+\mu}.\beta + \frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right) + k\omega + k'\varpi i,$$

k et k' étant des entiers.

Cette équation donne:

$$\mu' = k'.2n \pm \mu,\ m' = k.2n \pm m,\ (-1)^{m'+\mu'} = \pm(-1)^{m+\mu}.$$

Les deux premières équations ne peuvent pas subsister à moins que $k' = 1$, $k = 1$, $\mu' = 2n - \mu$, $m' = 2n - m$, et alors la dernière deviendra:

$$(-1)^{4n-m-\mu} = -(-1)^{m+\mu},$$

d'où l'on tire:

$$(-1)^{2m+2\mu} = -1,$$

résultat absurde.

Donc toutes les valeurs de x, contenues dans la formule (48) sont différentes entre elles, si m et μ sont positifs et moindres que $2n$.

Le nombre total des valeurs de x est, comme il est aisé de voir, égal à $2(2n)^2 = 8n^2$; or l'équation $\varphi^2(2n\beta) = \theta(x^2)$ ne peut pas avoir des racines égales, car dans ce cas on aurait $\frac{d.\theta(x^2)}{dx} = 0$, ce qui donnerait pour x une valeur indépendante de β. Donc le degré de l'équation $\varphi^2(2n\beta) = \theta(x^2)$ est égal au nombre des racines, c'est-à-dire à $8n^2$. Si par ex. $n = 1$, on aura l'équation

$$\varphi^2(2\beta) = \theta(x^2) = \frac{4x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}{(1+e^2c^2x^4)^2},$$

ou bien $$(1+e^2c^2x^4)^2.\varphi^2(2\beta) = 4x^2(1-c^2x^2)(1+e^2x^2),$$

et d'après la formule (48) les racines de cette équation, au nombre de huit, seront:

$$x = \pm \varphi\beta,\ x = \pm \varphi\left(-\beta + \frac{\omega}{2}\right),$$
$$x = \pm \varphi\left(-\beta + \frac{\varpi}{2} i\right);\ x = \pm \varphi\left(\beta + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right).$$

2) *Si n est un nombre impair $= 2n + 1$.*

Dans ce cas $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$ est, comme nous l'avons vu, une fonction rationnelle de x, et par conséquent l'équation en x sera:

50) $$\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Précisément comme dans le cas précédent, on trouvera, que toutes les racines de cette équation peuvent être représentées par

51) $$x = \varphi\left((-1)^{m+\mu}.\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

où il faut donner à m et μ toutes les valeurs entières depuis $-n$ jusqu'à $+n$ incl. Donc le nombre des racines différentes est $(2n+1)^2$. C'est aussi le degré de l'équation en question. On peut aussi exprimer les racines par

$$x = (-1)^{m+\mu}.\varphi\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right).$$

Si par ex. $n=1$, on aura une équation du degré $3^2 = 9$.

La formule (51) donne pour x les 9 valeurs suivantes:

$$\varphi(\beta);$$
$$\varphi\left(-\beta - \frac{\omega}{3}\right),$$
$$\varphi\left(-\beta + \frac{\omega}{3}\right),$$
$$\varphi\left(-\beta - \frac{\varpi}{3} i\right),$$
$$\varphi\left(-\beta + \frac{\varpi}{3} i\right),$$
$$\varphi\left(\beta - \frac{\omega}{3} - \frac{\varpi}{3} i\right),$$
$$\varphi\left(\beta - \frac{\omega}{3} + \frac{\varpi}{3} i\right),$$
$$\varphi\left(\beta + \frac{\omega}{3} - \frac{\varpi}{3} i\right),$$
$$\varphi\left(\beta + \frac{\omega}{3} + \frac{\varpi}{3} i\right).$$

B. Considérons maintenant l'équation

52) $$f(n\beta) = \frac{P'_n}{Q_n}$$

et cherchons les valeurs de y, qui satisfont à cette équation. La fonction $\frac{P'_n}{Q_n}$ étant, comme on a vu plus haut, rationnelle en y: l'équation en y, en faisant $\frac{P'_n}{Q_n} = \psi(y)$, sera

$$f(n\beta) = \psi(y).$$

Une des racines de cette équation est $y = f\beta$, donc, quelle que soit la valeur de β:

53) $$f(n\beta) = \psi(f\beta);$$

Pour trouver les autres valeurs de y, soit α une nouvelle inconnue, telle que $y = f\alpha$, on aura

$$f(n\beta) = \psi(f\alpha);$$

or, en vertu de (53) le second membre est égal à $f(n\alpha)$, donc pour déterminer α, on aura l'équation

$$f(n\alpha) = f(n\beta).$$

En vertu de (32) cette équation donne pour expression générale de $n\alpha$:

$$n\alpha = \pm n\beta + 2m\omega + \mu\varpi i,$$

m et μ étant deux nombres entiers positifs ou négatifs, zéro y compris.

De là on tire

$$\alpha = \pm\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i$$

et par conséquent:

$$f\alpha = f\left(\pm\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right) = y,$$

C'est la valeur générale de y. Maintenant pour avoir les valeurs différentes de y, je dis, qu'il suffit de prendre β avec le signe $+$ et de donner à m et μ toutes les valeurs entières, moindres que n. En effet, comme on a $f(+\alpha) = f(-\alpha)$, on aura d'abord:

$$f\left(-\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right) = f\left(\beta - \frac{2m}{n}\omega - \frac{\mu}{n}\varpi i\right).$$

Donc on peut toujours dans l'expression de y prendre β avec le signe $+$. Ainsi toutes les valeurs de y sont contenues dans l'expression

54) $$y = f\left(\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right).$$

Maintenant quels que soient les nombres m et μ, on peut toujours supposer,

$$m = k.n + m', \quad \mu = k'.n + \mu',$$

où k, k', m', μ' sont des nombres entiers, les deux derniers étant en même temps positifs et moindres que n.

En substituant il viendra

$$y = f\left(\beta + \frac{2m'}{n}\omega + \frac{\mu'}{n}\varpi i + 2k\omega + k'\varpi i\right).$$

Or, en vertu de (22) le second membre de cette équation est égal à

$$55)\qquad f\left(\beta + \frac{2m'}{n}\omega + \frac{\mu'}{n}\varpi i\right) = y,$$

quantité de la même forme que le second membre de (54); seulement m' et μ' sont positifs et moindres que n. Donc etc.

En donnant à m et μ toutes les valeurs possibles, moindres que n, on trouvera un nombre n^2 de valeurs de y. Or, en général toutes ces quantités sont différentes entre elles. En effet, supposons par ex.

$$f\left(\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i\right) = f\left(\beta + \frac{2m'}{n} + \frac{\mu'}{n}\varpi i\right),$$

on aura en vertu de (32), en désignant par k, k' deux nombres entiers:

$$\beta + \frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i = \pm\left(\beta + \frac{2m'}{n}\omega + \frac{\mu'}{n}\varpi i\right) + 2k\omega + k'\varpi i.$$

Puisque β peut avoir une valeur irrationnelle quelconque, il est clair que cette équation ne peut pas subsister à moins qu'on ne préfère dans le second membre le signe supérieur. Alors il viendra

$$\frac{2m}{n}\omega + \frac{\mu}{n}\varpi i = \frac{2m'}{n}\omega + \frac{\mu'}{n}\varpi i + 2k\omega + k'\varpi i,$$

d'où l'on tire en égalant les parties réelles et les parties imaginaires:

$$m = m' + kn,\ \mu = \mu' + k'n,$$

équations absurdes, en remarquant que les nombres m, m', μ, et μ' sont tous positifs et inférieurs à n. Donc en général l'équation

$$f(n\beta) = \psi(y)$$

a un nombre n^2 de racines différentes entre elles et non pas un plus grand nombre. Or généralement toutes les racines de cette équation sont différentes entre elles. En effet, si deux d'entre elles étaient égales, on aurait à la fois:

$$f(n\beta) = \psi(y) \text{ et } 0 = \psi'(y),$$

et cela est impossible, si l'on remarque que les coefficiens de y dans $\psi(y)$ ne contiennent pas β. Donc généralement l'équation (52) est nécessairement du degré n^2.

C. L'équation

$$56)\qquad F(n\beta) = \frac{P_n}{Q_n},$$

étant traitée absolument de la même manière par rapport à z, que l'équation $f(n\beta)=\frac{P'_n}{Q_n}$ l'a été par rapport à y, donne pour expression générale des valeurs de z:

57) $$z=F\left(\beta+\frac{m}{n}\omega+\frac{2\mu}{n}\varpi i\right),$$

où m et μ sont entiers, positifs et moindres que n. Le nombre des valeurs de z est n^2, et elles sont en général toutes différentes entre elles.

Donc généralement l'équation (56) est du degré n^2.

11.

Nous avons trouvé ci-dessus toutes les racines des équations

$$\varphi(n\beta)=\frac{P_n}{Q_n},\ f(n\beta)=\frac{P'_n}{Q_n},\ F(n\beta)=\frac{P''_n}{Q_n},$$

racines, qui sont exprimées par les formules (48), (51), (54), 57). Toutes ces racines sont différentes entre elles, excepté les cas de valeurs particulières de β; mais pour ces valeurs, les racines différentes sont contenues dans les mêmes formules. — Dans ce dernier cas un certain nombre des valeurs des quantités x, y, z seront égales; mais il est clair que toutes les valeurs égales ou inégales seront néanmoins les racines des équations dont il s'agit. Cela se fait voir en faisant converger β vers une valeur particulière, qui donne pour x, ou y, ou z des valeurs égales.

En faisant dans la formule (48) $\beta=\frac{\alpha}{2n}$, on aura l'équation

58) $\varphi^2\alpha=\frac{P^2_{2n}}{Q^2_{2n}}$, dont les racines sont $x=\pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\frac{\alpha}{2n}+\frac{m}{2n}\omega+\frac{\mu}{2n}\varpi i\right)$;
et où m et μ ont toutes les valeurs entières et positives moindres que $2n$.

En faisant de même dans la formule (50) $\beta=\frac{\alpha}{2n+1}$, on aura $\varphi\alpha=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, dont les racines sont

59) $$x=(-1)^{m+\mu}.\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

m et μ ayant pour valeurs tous les nombres entiers depuis $-n$ jusqu'à $+n$.

Enfin en faisant dans (52), (56) $\beta=\frac{\alpha}{n}$, on aura l'équation

$f\alpha=\frac{P'_n}{Q_n}$ dont les racines sont

60) $$y=f\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2m}{n}\omega+\frac{\mu}{n}\varpi i\right),$$

et l'équation

$Fa = \frac{P'_n}{Q_n}$, dont les racines sont

$$61)\qquad z = F\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{m}{n}\omega + \frac{2\mu}{n}\varpi i\right),$$

où m et μ sont renfermés entre les limites 0 et $n-1$ incl. Si n est impair $= 2n+1$, on peut aussi supposer

$$y = (-1)^m . f\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

$$z = (-1)^\mu . F\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

m et μ ayant toutes les valeurs entières de $-n$ à $+n$.

Dans toutes ces équations la quantité α peut avoir une valeur quelconque.

Comme cas particuliers on doit remarquer les suivants:

1) En faisant dans (58) et (59) $\alpha = 0$, on aura les équations

$$62)\quad \begin{cases} P^2_{2n} = 0, \text{ dont les racines sont } x = \pm\varphi\left(\frac{m}{2n}\omega + \frac{\mu}{2n}\varpi i\right) \\ \qquad \text{(les limites de } m \text{ et } \mu \text{ étant 0 et } 2n-1), \\ P_{2n+1} = 0, \text{ dont les racines sont } x = \varphi\left(\frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right) \\ \qquad \text{(les limites de } m \text{ et } \mu \text{ étant } -n \text{ et } +n). \end{cases}$$

2) En faisant dans (60) $\alpha = \frac{\omega}{2}$ et dans (61) $\alpha = \frac{\varpi}{2}i$, et remarquant que $f\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$, $F\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = 0$, on obtiendra les deux équations:

$$63)\ P'_n = 0, \text{ dont les racines sont } y = f\left(\left(2m+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\omega}{n} + \frac{\mu}{n}\varpi i\right)$$

$$64)\ P''_n = 0, \text{ dont les racines sont } z = F\left(\frac{m}{n}\omega + \left(2\mu+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\varpi i}{n}\right)$$

(les limites de m et μ étant 0 et $n-1$).

3) En faisant dans (58) $\alpha = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i$, et en remarquant, que $\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}$, on aura l'équation

$$Q^2_{2n} = 0,$$

dont les racines seront:

$$x = \pm\varphi\left(\left(m + \tfrac{1}{2}(-1)^{m+\mu}\right)\frac{\omega}{2n} + \left(\mu + \tfrac{1}{2}(-1)^{m+\mu}\right).\frac{\varpi i}{2n}\right).$$

Les valeurs de x doivent être égales par couples, et l'on verra aisément que les valeurs inégales peuvent être représentées par

$$65)\qquad x = \varphi\left(\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\omega}{2n} + \left(\mu+\tfrac{1}{2}\right)\frac{\varpi i}{2n}\right),$$

en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis 0 à $2n-1$. Donc ce sont les racines de l'équation

$$Q_{2n}=0, \text{ par rapport à } x.$$

En faisant de même dans (59) $\alpha=\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i$, on aura l'équation

$$Q_{2n+1}=0,$$

dont les racines seront:

$$66) \begin{cases} x=(-1)^{m+\mu}.\varphi\left((m+\tfrac{1}{2})\frac{\omega}{2n+1}+(\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \\ y=(-1)^{m}\ .f\left((m+\tfrac{1}{2})\frac{\omega}{2n+1}+(\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \\ z=(-1)^{\mu}\ .F\left((m+\tfrac{1}{2})\frac{\omega}{2n+1}+(\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\varpi i}{2n+1}\right), \end{cases}$$

m et μ ayant pour valeurs tous les nombres entiers de $-n$ à $+n$.

Parmi les valeurs de x, y, z, il faut remarquer celle, qui répond à $m=n$, $\mu=n$. Alors on a

$$x=\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)=\tfrac{1}{0},$$

$$y=(-1)^{n}.f\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)=\tfrac{1}{0},$$

$$z=(-1)^{n}.F\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)=\tfrac{1}{0}.$$

Ces valeurs infinies font voir que l'équation $Q_{2n+1}=0$ est d'un degré moindre d'une unité que celui des équations dont elle sort. En écartant ces valeurs, les restantes, au nombre de $(2n+1)^2-1$, seront les racines de l'équation $Q_{2n+1}=0$.

§. IV.

Résolution algébrique des équations

$$\varphi\alpha=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\ f\alpha=\frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\ F\alpha=\frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

12.

Nous avons vu dans le §. précédent, comment on peut exprimer aisément les racines des équations en question au moyen des fonctions φ, f, F. Nous allons maintenant en déduire la résolution de ces mêmes équations, ou la determination des fonctions $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{n}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{n}\right)$, en fonctions de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

Comme on a

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{m\mu}\right) = \varphi\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)\right],$$

on peut supposer que n est un nombre premier. D'abord nous considérerons le cas où $n = 2$, et ensuite celui où n est un nombre impair.

A. *Expressions des fonctions* $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

13.

Les valeurs de $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ peuvent être trouvées très facilement de la manière suivante. En supposant dans les formules (35) $\beta = \frac{\alpha}{2}$, et faisant

$$x = \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ y = f\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ z = F\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

il viendra:

$$f(\alpha) = \frac{y^2 - c^2x^2z^2}{1+e^2c^2x^4},\ F(\alpha) = \frac{z^2+e^2y^2x^2}{1+e^2c^2x^4},$$

ou bien, en substituant les valeurs de y^2 et z^2 en x^2:

$$f(\alpha) = \frac{1-2c^2x^2-c^2e^2x^4}{1+e^2c^2x^4},\ F(\alpha) = \frac{1+2e^2x^2-e^2c^2x^4}{1+e^2c^2x^4}.$$

Ces équations donnent

$$1+f\alpha = \frac{2(1-c^2x^2)}{1+e^2c^2x^4},\ 1-f\alpha = \frac{2c^2x^2(1+e^2x^2)}{1+e^2c^2x^4},$$

$$F\alpha-1 = \frac{2e^2x^2(1-c^2x^2)}{1+e^2c^2x^4},\ F\alpha+1 = \frac{2(1+e^2x^2)}{1+e^2c^2x^4},$$

d'où

$$\frac{F\alpha-1}{1+f\alpha} = e^2.x^2,\ \frac{1-f\alpha}{F\alpha+1} = c^2x^2,$$

et de là, en remarquant que $y^2 = 1 - c^2x^2$, $z^2 = 1 + e^2x^2$,

$$z^2 = \frac{F\alpha+f\alpha}{1+f\alpha},\ y^2 = \frac{F\alpha+f\alpha}{1+F\alpha}.$$

De ces équations on tire, en extrayant la racine carrée, et remplaçant x, y, z par leurs valeurs $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$67)\quad \begin{cases} \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{1-f\alpha}{1+F\alpha}\right)} = \frac{1}{e}\sqrt{\left(\frac{F\alpha-1}{f\alpha+1}\right)}, \\ f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{F\alpha+f\alpha}{1+F\alpha}\right)},\ F\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{F\alpha+f\alpha}{1+f\alpha}\right)}. \end{cases}$$

Telles sont les formes les plus simples qu'on peut donner aux valeurs des fonctions $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. De cette manière on peut exprimer algé-

briquement $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ en $f\alpha$, $F\alpha$. De la même manière $\varphi\left(\frac{\alpha}{4}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{4}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{4}\right)$ s'exprimeront en $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, et ainsi de suite. Donc en général les fonctions $\varphi\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$ peuvent être exprimées au moyen d'extractions de racines carrées, en fonctions des trois quantités $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

Pour appliquer les formules trouvées ci-dessus pour la *bissection* à un exemple, supposons $\alpha = \frac{\omega}{2}$.

Alors on aura $f\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0$, $F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{(e^2+c^2)}}{c}$, donc en substituant:

$$\varphi\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{c}\sqrt{\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{c}\sqrt{(e^2+c^2)}}\right\}} = \frac{1}{e}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{c}\sqrt{(e^2+c^2)}-1\right)},$$

$$f\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\left\{\frac{\frac{1}{c}\sqrt{(e^2+c^2)}}{1+\frac{1}{c}\sqrt{(e^2+c^2)}}\right\}},$$

$$F\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{c}\sqrt{(e^2+c^2)}\right)},$$

ou bien

$$\varphi\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{[c^2+c\sqrt{(e^2+c^2)}]}} = \frac{\sqrt{[c\sqrt{(e^2+c^2)}-c^2]}}{ec},$$

$$f\left(\frac{\omega}{4}\right) = \frac{\sqrt[4]{(e^2+c^2)}}{\sqrt{[c+\sqrt{(e^2+c^2)}]}} = \frac{1}{e}\cdot\sqrt{(e^2+c^2-c\sqrt{(e^2+c^2)})}$$

$$F\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt[4]{\left(1+\frac{e^2}{c^2}\right)} = \sqrt{\left[F\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]}.$$

B. *Expressions des fonctions* $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, *en fonctions algébriques des quantités* $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$.

14.

Pour trouver les valeurs de $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en $\varphi\alpha, f\alpha, F\alpha$, il faut résoudre les équations

$$\varphi\alpha = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\ f\alpha = \frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\ F\alpha = \frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}},$$

qui toutes sont du degré $(2n+1)^2$. Nous allons voir, qu'il est toujours possible, d'effectuer algébriquement cette résolution.

Soient

68) $$\varphi_1\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_m \varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right)$$

et

69) $$\psi\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \theta^\mu \cdot \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),\ \psi_1\beta = \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \theta^\mu \cdot \varphi_1\left(\beta - \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

où θ est une racine imaginaire quelconque de l'équation $\theta^{2n+1} - 1 = 0$. Cela posé, je dis que les deux quantités

$$\psi\beta \cdot \psi_1\beta \text{ et } (\psi\beta)^{2n+1} + (\psi_1\beta)^{2n+1},$$

pourront être exprimées rationnellement en $\varphi(2n+1)\beta$.

D'abord en écrivant $\varphi_1\beta$ comme suit:

$$\varphi_1\beta = \varphi\beta + \sum_1^n{}_m\left[\varphi\left(\beta + \frac{2m\omega}{2n+1}\right) + \varphi\left(\beta - \frac{2m\omega}{2n+1}\right)\right]$$
$$= \varphi\beta + \sum_1^n{}_m \cdot \frac{2\varphi\beta . f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) . F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1 + e^2c^2\varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right) . \varphi^2\beta},$$

on voit que $\varphi_1\beta$ peut s'exprimer rationnellement en $\varphi\beta$. Soit donc $\varphi_1\beta = \chi(\varphi\beta)$, on a de même:

$$\varphi_1\left(\beta \pm \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \chi\left[\varphi\left(\beta \pm \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]$$
$$= \chi\left\{\frac{\varphi\beta . f\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) . F\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) \pm \varphi\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) . f\beta . F\beta}{1 + e^2c^2 . \varphi^2\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) . \varphi^2\beta}\right\},$$

ou bien, en faisant $\varphi\beta = x$:

$$f\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) . F\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = a,\ \varphi\left(\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = b,$$

et en substituant pour $f\beta$ et $F\beta$ leurs valeurs $\sqrt{(1 - c^2x^2)}$ et $\sqrt{(1 + e^2x^2)}$:

$$\varphi_1\left(\beta \pm \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \chi\left(\frac{ax \pm b . \sqrt{[(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)]}}{1 + e^2c^2b^2 . x^2}\right);$$

or, χ désignant une fonction rationnelle, le second membre de cette équation peut se mettre sous la forme

$$R_\mu \pm R'_\mu . \sqrt{((1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2))},$$

où R_μ et R'_μ sont des fonctions rationnelles de x.

Donc on a

$$\varphi_1\left(\beta \pm \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right) = R_\mu \pm R'_\mu . \sqrt{((1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2))}.$$

En substituant dans les expressions de $\psi\beta$ et $\psi_1\beta$, il viendra:

$$70)\ \begin{cases}\psi\beta=\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}\,\theta^{\mu}.R_{\mu}+\sqrt{((1-c^2x^2)(1+e^2x^2))}.\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}\,\theta^{\mu}.R'_{\mu},\\ \psi_1\beta=\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}\,\theta^{\mu}.R_{\mu}-\sqrt{((1-c^2x^2)(1+e^2x^2))}.\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}\,\theta^{\mu}.R'_{\mu}.\end{cases}$$

Maintenant R_{μ} et R'_{μ} étant des fonctions rationnelles de x, les quantités $\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}\,\theta^{\mu}.R_{\mu}$ et $\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}\,\theta^{\mu}.R'_{\mu}$ le sont également. En élevant donc $\psi\beta$ et $\psi_1\beta$ à la $(2n+1)^{\text{ième}}$ puissance, les deux quantités $(\psi\beta)^{2n+1}$ et $(\psi_1\beta)^{2n+1}$ pourront se mettre sous la forme:

$$(\psi\beta)^{2n+1}=t+t'.\sqrt{((1-c^2x^2)(1+e^2x^2))},$$
$$(\psi_1\beta)^{2n+1}=t-t'.\sqrt{((1-c^2x^2)(1+e^2x^2))},$$

t et t' étant des fonctions rationnelles de x. En prenant la somme des valeurs de $(\psi\beta)^{2n+1}$ et $(\psi_1\beta)^{2n+1}$, on aura

$$(\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}=2t.$$

Donc la quantité $(\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}$ peut être exprimée rationnellement en x. Il en est de même du produit $\psi\beta.\psi_1\beta$, comme on voit par les équations (70).

Donc on peut faire

$$71)\qquad \begin{cases}\psi\beta.\psi_1\beta=\lambda(x),\\ (\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}=\lambda_1(x),\end{cases}$$

$\lambda(x)$ et $\lambda_1(x)$ désignant des fonctions rationnelles de x. Maintenant ces fonctions ont la propriété, de ne pas changer de valeur, lorsqu'on met à la place de x une autre racine quelconque de l'equation

$$\varphi(2n+1)\beta=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Considérons d'abord la fonction $\lambda(x)$. En remettant la valeur de $x=\varphi\beta$, on aura

$$\psi\beta.\psi_1\beta=\lambda(\varphi\beta),$$

d'ou l'on tire, en mettant $\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β:

$$\lambda\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right]=\psi\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right).\psi_1\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right).$$

Cela posé, en remarquant que

$$72)\ \sum_{-n}^{+n}{}_{m}\,\psi(m+k)=\sum_{-n}^{+n}{}_{m}\,\psi(m)+\sum_{1}^{k}{}_{m}.(\psi(m+n)-\psi(m-n-1)),$$

on aura, en faisant dans l'expression de $\varphi_1\beta$, $\beta=\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}$:

$$\varphi_1\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\sum_{-n}^{+n}{}_m\,\varphi\left(\beta+\frac{2(k+m)}{2n+1}\,\omega\right)$$

$$=\varphi_1\beta+\sum_{1}^{k}{}_m\left[\varphi\left(\beta+\frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right)-\varphi\left(\beta+\frac{2(m-n-1)\omega}{2n+1}\right)\right],$$

or, $\varphi\left(\beta+\frac{2(m-n-1)}{2n+1}\,\omega\right)=\varphi\left(\beta+\frac{2(m+n)}{2n+1}\,\omega-2\omega\right)=\varphi\left(\beta+\frac{2(m+n)}{2n+1}\,\omega\right)$,
donc

73) $$\varphi_1\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\varphi_1\beta.$$

En mettant dans l'expression de $\psi\beta$, $\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}$ au lieu de β, on trouvera

$$\psi\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\,\theta^\mu\cdot\varphi_1\left(\beta+\frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right),$$

or en vertu de (73) on a

$$\varphi_1\left(\beta+\frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\varphi_1\left(\beta+\frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right),$$

donc

$$\psi\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\,\theta^\mu\cdot\varphi_1\left(\beta+\frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right).$$

En vertu de (72) on à

$$\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\,\theta^\mu\cdot\varphi_1\left(\beta+\frac{2(k'+\mu)\varpi i}{2n+1}\right)$$

$$=\theta^{-k'}\cdot\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\,\theta^\mu\cdot\varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\sum_{1}^{k'}{}_\mu\,\theta^{n+\mu-k'}\cdot\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}\right)$$

$$-\sum_{1}^{k'}{}_\mu\,\theta^{\mu-n-1-k'}\cdot\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu-n-1)\varpi i}{2n+1}\right),$$

donc, en remarquant que $\theta^{n+\mu-k'}=\theta^{\mu-n-1-k'}$ et

$$\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu-n-1)\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}-2\varpi i\right)=\varphi_1\left(\beta+\frac{2(\mu+n)\varpi i}{2n+1}\right),$$

il viendra

74) $$\psi\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\theta^{-k'}\cdot\psi\beta.$$

De la même manière on trouvera aussi

$$\psi_1\left(\beta+\frac{2k'\varpi i}{2n+1}+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\theta^{k'}\cdot\psi_1\beta.$$

Ces deux équations donneront

$$\psi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\cdot\psi_1\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)=\psi\beta\cdot\psi_1\beta,$$

$$\left[\psi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right]^{2n+1}+\left[\psi_1\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right]^{2n+1}=(\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}.$$

En vertu de ces équations on obtiendra, en mettant dans les valeurs de $\lambda(\varphi\beta)$ et $\lambda_1(\varphi\beta)$, $\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β,

$$\lambda(\varphi\beta)=\lambda\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right],$$

$$\lambda_1(\varphi\beta)=\lambda_1\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)\right].$$

Or, $\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)$ exprime une racine quelconque de l'équation

$$\varphi(2n+1)\beta=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Donc comme nous avons dit, les fonctions $\lambda(x)$ et $\lambda_1(x)$ auront les mêmes valeurs, quelle que soit la racine qu'on met à la place de x.

Soient donc x_0, x_1, $x_2 \ldots x_{2\nu}$ ces racines, on aura

$$\lambda(x)=\frac{1}{2\nu+1}\left(\lambda(x_0)+\lambda(x_1)+\ldots+\lambda(x_{2\nu})\right),$$

$$\lambda_1(x)=\frac{1}{2\nu+1}\left(\lambda_1(x_0)+\lambda_1(x_1)+\ldots+\lambda_1(x_{2\nu})\right).$$

Or le second membre de ces équations est une fonction *rationnelle et symétrique* des racines de l'équation $\varphi(2n+1)\beta=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, donc $\lambda(x)$ et $\lambda_1(x)$ pourront s'exprimer rationnellement en $\varphi(2n+1)\beta$. En faisant

$$\lambda(x)=B,\ \lambda_1(x)=2A,$$

les équations (71) donneront

$$(\psi\beta)^{2n+1}.(\psi_1\beta)^{2n+1}=B^{2n+1};\ (\psi\beta)^{2n+1}+(\psi_1\beta)^{2n+1}=2A,$$

d'où l'on tire

$$75)\quad \psi\beta=\sqrt[2n+1]{\left(A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}\right)}=\sum_{\mu}^{+n}{}_{-n}\,\theta^{\mu}\cdot\varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

15.

Ayant trouvé la valeur de $\psi\beta$, on en déduira facilement celle de $\varphi_1\beta$.

En effet, en prenant pour θ successivement toutes les racines imaginaires de l'équation $\theta^{2n+1}-1=0$, et désignant les valeurs correspondantes de A et B par A_1, B_1, A_2, B_2 etc., on obtiendra:

$$\sqrt[2n+1]{\left(A_1+\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})}\right)}=\sum_{\mu}^{+n}{}_{-n}\,\theta_1^{\mu}\cdot\varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

$$\sqrt[2n+1]{\left(A_2+\sqrt{(A_2^2-B_2^{2n+1})}\right)}=\sum_{\mu}^{+n}{}_{-n}\,\theta_2^{\mu}\cdot\varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

. . . .

$$\sqrt[2n+1]{\left(A_{2n}+\sqrt{(A_{2n}^2-B_{2n}^{2n+1})}\right)}=\sum_{\mu}^{+n}{}_{-n}\,\theta_{2n}^{\mu}\cdot\varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

De même on connaît la somme des racines:

$$\sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu \varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}+\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)=\sum_{-n}^{+n}{}_\mu \varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

qui est égale à $(2n+1)\varphi(2n+1)\beta$, comme nous le verrons dans la suite. En ajoutant ces équations membre à membre, après avoir multipié la première par θ_1^{-k}, la seconde par θ_2^{-k}, la troisième par θ_3^{-k}... et la $(2n)^{\text{ième}}$ par θ_{2n}^{-k}, il viendra:

$$\sum_{-n}^{+n}{}_\mu .(1+\theta_1^{\mu-k}+\theta_2^{\mu-k}+\ldots+\theta_{2n}^{\mu-k}).\varphi_1\left(\beta+\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)$$

$$=(2n+1).\varphi(2n+1)\beta+\sum_1^{2n}{}_\mu \theta_\mu^{-k}.\sqrt[2n+1]{(A_\mu+\sqrt{(A_\mu^2-B_\mu^{2n+1})})};$$

or la somme

$$1+\theta_1^{\mu-k}+\theta_1^{\mu-k}+\ldots+\theta_{2n}^{\mu-k}$$

se réduit à zéro pour toutes les valeurs de k, excepté pour $k=\mu$. Dans ce cas elle devient égale à $2n+1$. Donc le premier membre de l'équation précédente devient

$$(2n+1).\varphi_1\left(\beta+\frac{2k\varpi i}{2n+1}\right),$$

donc, en substituant et divisant par $(2n+1)$, on à:

$$76)\qquad \varphi_1\left(\beta+\frac{2k\varpi i}{2n+1}\right)=$$

$$\varphi(2n+1)\beta+\frac{1}{2n+1}.\left(\theta_1^{-k}.\sqrt[2n+1]{(A_1+\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})})}+\theta_2^{-k}\sqrt[2n+1]{(A_2+\sqrt{(A_2^2-B_2^{2n+1})})}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\theta_{2n}^{-k}\sqrt[2n+1]{(A_{2n}+\sqrt{(A_{2n}^2-B_{2n}^{2n+1})})}\right)$$

Pour $k=0$, on a:

$$77)\ \varphi_1\beta=\varphi(2n+1)\beta+\frac{1}{2n+1}\left(\sqrt[2n+1]{(A_1+\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})})}+\sqrt[2n+1]{(A_2+\sqrt{(A_2^2-B_2^{2n+1})})}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\sqrt[2n+1]{(A_{2n}+\sqrt{(A_{2n}^2-B_{2n}^{2n+1})})}\right).$$

16.

Ayant ainsi trouvé la valeur de $\varphi_1\beta$, il s'agit d'en tirer celle de $\varphi\beta$. Or cela peut se faire aisément comme suit:

Soit

$$78)\quad \psi_2\beta=\sum_{-n}^{+n}{}_m \theta^m.\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right);\quad \psi_3\beta=\sum_{-n}^{+n}{}_m \theta^m.\varphi\left(\beta-\frac{2m\omega}{2n+1}\right);$$

on a

$$\varphi\left(\beta\pm\frac{2m\omega}{2n+1}\right)=\frac{\varphi\beta.f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right).F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\pm f\beta.F\beta.\varphi\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2.\varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right).\varphi^2\beta}.$$

De là suit qu'on peut faire

$$\psi_2\beta = r + f\beta.F\beta.s;\ \psi_3\beta = r - f\beta.F\beta.s,$$

où r et s sont des fonctions rationnelles de $\varphi\beta$.

De là on tire

$$79)\qquad \begin{cases} \psi_2\beta.\psi_3\beta = \chi(\varphi\beta), \\ (\psi_2\beta)^{2n+1} + (\psi_3\beta)^{2n+1} = \chi_1(\varphi\beta), \end{cases}$$

$\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$ étant deux fonctions rationnelles de $\varphi\beta$.

Cela posé, je dis que $\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$ pourront s'exprimer rationnellement en $\varphi_1\beta$.

On a vu que

$$80)\qquad \varphi_1\beta = \varphi\beta + \sum_1^n {}_m.\left\{\frac{2\varphi\beta.f\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right).F\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2.\varphi^2\left(\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\varphi^2\beta}\right\}.$$

En faisant $\varphi\beta = x$, on aura une équation en x du degré $(2n+1)$. Une racine de cette équation est $x = \varphi\beta$; or, en mettant $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$ au lieu de β, $\varphi_1\beta$ ne change pas de valeur, donc $x = \varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)$ sera une racine, quel que soit le nombre entier k. Or, en donnant à k toutes les valeurs entières de $-n$ jusqu'á $+n$, $\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right)$ prendra $2n+1$ valeurs différentes, donc ces $2n+1$ quantités seront précisément les $2n+1$ racines de l'équation en x.

Cela posé, en mettant $\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}$ au lieu de β dans l'expression de $\psi_2\beta$, il viendra en vertu de (72):

$$\begin{aligned}\psi_2\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) &= \sum_{-n}^{+n}{}_m \theta^m\varphi\left(\beta + \frac{2(k+m)\omega}{2n+1}\right) \\ &= \theta^{-k}\psi_2\beta + \sum_1^k{}_m \theta^{m+n-k}.\varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right) \\ &\quad - \sum_1^k{}_m \theta^{m-n-1-k}.\varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)\omega}{2n+1}\right),\end{aligned}$$

donc en ayant attention, que $\theta^{m+n-k} = \theta^{m-n-1-k}$ et $\varphi\left(\beta + \frac{2(m-n-1)}{2n+1}\omega\right) = \varphi\left(\beta + \frac{2(m+n)\omega}{2n+1}\right)$, il en résultera

$$81)\qquad \psi_2\left(\beta + \frac{2k\omega}{2n+1}\right) = \theta^{-k}.\psi_2\beta.$$

De même on aura

$$\psi_2\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\theta^{+k}.\psi_2\beta.$$

On voit en vertu de ces relations, que les équations qui donnent les valeurs des fonctions $\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$, conduisent à ces deux égalites:

$$\chi_1\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right]=\chi_1(\varphi\beta),$$

$$\chi\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right]=\chi(\varphi\beta).$$

De là on tire

$$\chi(\varphi\beta)=\frac{1}{2n+1}\cdot\sum_{-n}^{+n}{}_k\cdot\chi\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right],$$

$$\chi_1(\varphi\beta)=\frac{1}{2n+1}\cdot\sum_{-n}^{+n}{}_k\cdot\chi_1\left[\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)\right].$$

Or, ces valeurs de $\chi(\varphi\beta)$ et $\chi_1(\varphi\beta)$ sont des fonctions rationnelles et symétriques de toutes les racines de l'équation (80). Donc elles peuvent être exprimées rationnellement par les coefficiens de la même équation, c'est-à-dire rationnellement en $\varphi_1\beta$.

Soit

$$\chi(\varphi\beta)=D,\ \chi_1(\varphi\beta)=2C,$$

les équations (79) donneront

$$\psi_2\beta=\sqrt[2n+1]{(C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})})},$$

d'où, en remettant la valeur de $\psi_2\beta$:

$$82)\quad \sqrt[2n+1]{(C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})})}=\sum_{-n}^{+n}{}_m\theta^m.\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right).$$

De là on tire, en mettant θ_μ au lieu de θ, et désignant les valeurs correspondantes de C et D par C_μ et D_μ:

$$\theta_\mu^{-k}\sqrt[2n+1]{(C_\mu+\sqrt{(C_\mu^2-D_\mu^{2n+1})})}=\sum_{-n}^{+n}{}_m\theta_\mu{}^{m-k}.\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right).$$

En y joignant l'équation

$$\varphi_1\beta=\sum_{-n}^{+n}{}_m\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right),$$

on en tirera facilement

$$83)\quad (2n+1).\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\varphi_1\beta+\sum_{1}^{2n}{}_\mu\theta_\mu^{-k}.\sqrt[2n+1]{(C_\mu+\sqrt{(C_\mu^2-D_\mu^{2n+1})})}.$$

En supposant $k=0$, il viendra:

$$84)\ \varphi\beta=\frac{1}{2n+1}\left[\varphi_1\beta+\sqrt[2n+1]{(C_1+\sqrt{(C_1^2-D_1^{2n+1})})}+\ldots+\sqrt[2n+1]{(C_{2n}+\sqrt{(C_{2n}^2-D_{2n}^{2n+1})})}\right].$$

Cette équation donne $\varphi\beta$ en fonction algébrique de $\varphi_1\beta$, or précédemment nous avons trouvé $\varphi_1\beta$ en fonction algébrique de $\varphi(2n+1)\beta$. Donc en mettant $\frac{\alpha}{2n+1}$ au lieu de β, on aura $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en fonction algébrique de $\varphi\alpha$.

Par une analyse toute semblable on trouvera $f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en $f\alpha$ et $F\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ en $F\alpha$.

17.

Les valeurs, que nous venons de trouver des quantités $\varphi_1\beta$ et $\varphi\beta$, la première en $\varphi(2n+1)\beta$ et la seconde en $\varphi_1\beta$, contiennent chacune la somme de $2n$ radicaux différentes du $(2n+1)^{\text{ème}}$ degré. Il en résultera pour $\varphi\beta$, $\varphi_1\beta\ldots$ un nombre $(2n+1)^{2n}$ de valeurs, tandisque chacune de ces quantités est la racine d'une équation du $(2n+1)^{\text{ème}}$ degré. Or on peut donner aux expressions de $\varphi\beta$ et $\varphi_1\beta$ une telle forme, que le nombre des valeurs de ces quantités soit précisément égal à $2n+1$.

Pour cela soit

$$\theta = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1},$$

on peut faire

$$\theta_1 = \theta,\ \theta_2 = \theta^2,\ \theta_3 = \theta^3 \ldots \theta_{2n} = \theta^{2n}.$$

Soient de même

$$85)\qquad \begin{cases} \psi^k(\beta) = \sum\limits_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^{k\mu}.\ \varphi_1\left(\beta + \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ \psi^k{}_1(\beta) = \sum\limits_{-n}^{+n}{}_\mu\, \theta^{k\mu}.\ \varphi_1\left(\beta - \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right), \end{cases}$$

on aura en vertu de (74)

$$\psi^k\left(\beta + \frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = \theta^{-k\nu}.\ \psi^k(\beta),$$

$$\psi^k{}_1\left(\beta + \frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = \theta^{+k\nu}.\ \psi^k{}_1(\beta),$$

$$\psi^1\left(\beta + \frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = \theta^{-\nu}.\ \psi^1(\beta),$$

$$\psi^1_1\left(\beta + \frac{2\nu\varpi i}{2n+1}\right) = \theta^{+\nu}.\ \psi^1{}_1(\beta),$$

Soit maintenant

$$86)\qquad \begin{cases} \dfrac{\psi^k(\beta)}{(\psi^1\beta)^k} + \dfrac{\psi^k{}_1(\beta)}{(\psi^1{}_1\beta)^k} = P(\varphi\beta), \\ \dfrac{\psi^k(\beta)}{(\psi^1\beta)^{k-2n-1}} + \dfrac{\psi^k{}_1(\beta)}{\psi^1{}_1(\beta)^{k-2n-1}} = Q(\varphi\beta), \end{cases}$$

$P(\varphi\beta)$ et $Q(\varphi\beta)$ seront des fonctions rationnelles de $\varphi\beta$; or, en mettant $\beta+\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}$ au lieu de β, il est clair en vertu des formules précédentes, que P et Q ne changent pas de valeurs; donc on aura

$$P(\varphi\beta)=\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\sum_{-n}^{+n}{}_m\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\cdot P\left[\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega+2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right];$$

or, le second membre étant une fonction symétrique et rationnelle des racines de l'équation $\varphi(2n+1)\beta=\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$, $P(\varphi\beta)$ pourra s'exprimer rationnellement en $\varphi(2n+1)\beta$. Il en est de même de $Q(\varphi\beta)$. Connaissant ces deux quantités, les équations (86) donneront

$$\frac{\psi^k(\beta)}{(\psi^1\beta)^k}\left[1-\left(\frac{\psi^1\beta}{\psi^1{}_1\beta}\right)^{2n+1}\right]=P(\varphi\beta)-\frac{Q(\varphi\beta)}{(\psi^1{}_1\beta)^{2n+1}},$$

or

$$(\psi^1\beta)^{2n+1}=A_1+\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})},$$
$$(\psi^1{}_1\beta)^{2n+1}=A_1-\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})},$$

donc

$$\frac{\psi^k(\beta)}{(\psi^1\beta)^k}\cdot 2\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})}=Q(\varphi\beta)-\left(A_1-\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})}\right).P(\varphi\beta).$$

Donc on aura

$$\psi^k(\beta)=(\psi^1\beta)^k.(F_k+H_k.\sqrt{(A_1^2-B_1^{2n+1})}),$$

où F_k et H_k sont des fonctions rationnelles de $\varphi(2n+1)\beta$. En remplaçant A_1 et B_1 par A et B et substituant les valeurs de $\psi^k(\beta)$ et $(\psi^1\beta)^k$, il viendra:

$$\sqrt[2n+1]{(A_k+\sqrt{(A_k^2-B_k^{2n+1})})}=(A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})})^{\frac{k}{2n+1}}(F_k+H_k.\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}),$$

donc la valeur de $\varphi_1\beta$ deviendra:

$$87)\quad \varphi_1\beta=\varphi(2n+1)\beta+\frac{1}{2n+1}\cdot\Big((A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})})^{\frac{1}{2n+1}}$$
$$+(F_2+H_2\sqrt{(A^2-B^{2n+1})})(A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})})^{\frac{2}{2n+1}}$$
$$+\ldots(F_{2n}+H_{2n}\sqrt{(A^2-B^{2n+1})})(A+\sqrt{(A^2-B^{2n+1})})^{\frac{2n}{2n+1}}\Big).$$

Par un procédé tout semblable on trouvera

$$88)\quad \varphi\beta=\frac{1}{2n+1}\Big(\varphi_1\beta+(C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})})^{\frac{1}{2n+1}}$$
$$+(K_2+L_2\sqrt{(C^2-D^{2n+1})})(C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})})^{\frac{2}{2n+1}}$$
$$+\ldots(K_{2n}+L_{2n}\sqrt{(C^2-D^{2n+1})})(C+\sqrt{(C^2-D^{2n+1})})^{\frac{2n}{2n+1}}\Big),$$

où K_2, L_2, K_3, $L_3\ldots K_{2n}$, L_{2n} sont des fonctions rationnelles de $\varphi_1\beta$.

Ces expressions de $\varphi_1\beta$ et $\varphi\beta$ n'ont que $2n+1$ valeurs différentes, qu'on obtiendra en attribuant aux radicaux leurs $2n+1$ valeurs. Il suit de notre analyse, qu'on peut prendre $\sqrt{(A^2-B^{2n+1})}$ et $\sqrt{(C^2-D^{2n+1})}$ avec tel signe qu'on voudra.

18.

La valeur, que nous avons trouvée pour $\varphi(\beta)$ ou $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ contient encore, outre la fonction $\varphi\alpha$, les suivantes:

$$e,\ c,\ \theta,$$
$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),\ \varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),\ f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),$$
$$f\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),\ F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right),\ F\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right),$$

pour des valeurs quelconques de m depuis 1 jusqu'a $2n$. Maintenant quelle que soit la valeur de m, on peut toujours exprimer algébriquement $\varphi\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ en $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, et $\varphi\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)$, $f\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)$, $F\left(\frac{m\varpi i}{2n+1}\right)$ en $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. Tout est donc connu dans l'expression de $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$, excepté les deux quantités indépendantes de α, $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. — Ces quantités dépendent seulement de c et e, et elles peuvent être trouvées par la résolution d'une équation du degré $(2n+1)^2-1$, savoir de l'équation $\frac{P_{2n+1}}{x}=0$. — Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment on peut en ramener la résolution à celle d'équations moins élevées

§. V.

C. *Sur l'équation* $P_{2n+1}=0$.

19.

L'expression que nous venons de trouver pour $\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ contiendra, comme nous avons vu, les deux quantités constantes $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$. On trouvera ces quantités en résolvant l'équation

$$P_{2n+1}=0,$$

dont les racines seront représentées par

89) $$x=\varphi\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

où m et μ pourront être tous les nombres entiers depuis $-n$ jusqu'à $+n$. Une de ces racines, qui répond à $m=0$, est égale à zéro. Donc P_{2n+1} est divisible par x. En écartant ce facteur, on aura une équation

90) $\qquad R=0$, du degré $(2n+1)^2-1$.

En faisant $x^2=r$, l'équation $R=0$, en r, sera du degré $\frac{(2n+1)^2-1}{2}$ $=2.n(n+1)$, et les racines de cette équation seront

91) $$r=\varphi^2\left(\frac{m\omega\pm\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

μ et m ayant toutes les valeurs positives, au dessous de n, en faisant abstraction de la racine zéro.

Nous allons voir maintenant, comment on peut ramener la résolution de l'équation $R=0$ à celle de deux équations, l'une du degré n et l'autre du degré $2n+2$.

D'abord, je dis, qu'on peut représenter toutes les valeurs de r par

92) $$\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right) \text{ et } \varphi^2\left(\mu.\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)\ldots,$$

en donnant à μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$, et à m toutes celles depuis 1 jusqu'à n.

En effet $\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ représente d'abord un nombre n de valeurs de r; or les autres peuvent être représentées par $\varphi^2\left(\mu.\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)$. Soit, pour le démontrer, $m\mu=(2n+1)k+m'$, où m' est un nombre entier compris entre les limites $-n$ et $+n$. En substituant, on aura

$$\varphi^2\left(\mu.\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi^2\left(k.\omega+\frac{m'\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$=\varphi^2\left(\frac{m'\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi^2\left(\frac{-m'\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right).$$

$\varphi^2\left(\mu.\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)$ est donc une valeur de r; maintenant à chaque valeur de m, répond une valeur différente de m'. Car si l'on avait

$$m_1\mu=(2n+1)k_1+m',$$

il s'en suivrait

$$(m-m_1)\mu=(2n+1).(k-k_1),$$

ce qui est impossible, en remarquant que $2n+1$ est un nombre premier. Donc $\varphi^2\left(\mu.\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)$ combiné avec $\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)$ représente toutes les valeurs de r.

Cela posè, soit

$$93)\ \left[r-\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\right]\left[r-\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\right]\cdots\left[r-\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)\right]$$
$$=r^n+p_{n-1}.r^{n-1}+p_{n-2}.r^{n-2}+\ldots+p_1.r+p_0.$$

Les quantités $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}$, seront des fonctions rationnelles et symétriques de $\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, $\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\ldots\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)$; or ces fonctions peuvent être trouvées au moyen d'une équation du degré $2n+2$.

Soit p une fonction rationnelle et symétrique quelconque de $\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)$, $\varphi^2\left(\frac{2\omega'}{2n+1}\right)\ldots\varphi^2\left(\frac{n\omega'}{2n+1}\right)$, où ω' désigne la quantité $m\omega+\mu\varpi i$.

Par les formules que nous avons données plus haut pour exprimer $\varphi(n\beta)$ en $\varphi\beta$, il est clair qu'on peut exprimer $\varphi^2\left(m'.\frac{\omega'}{2n+1}\right)$ en fonction rationnelle de $\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)$. Donc on peut faire

$$94)\ \ p=\psi.\left[\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)\right]=\theta\left[\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right),\ \varphi^2\left(\frac{2\omega'}{2n+1}\right),\ldots\varphi^2\left(\frac{n\omega'}{2n+1}\right)\right],$$

θ désignant une fonction symétrique et rationnelle. En mettant $\nu\omega'$ au lieu de ω', il viendra

$$95)\ \ \psi\left[\varphi^2\left(\frac{\nu\omega'}{2n+1}\right)\right]=\theta\left[\varphi^2\left(\frac{\nu\omega'}{2n+1}\right),\ \varphi^2\left(\frac{2\nu\omega'}{2n+1}\right),\ldots\varphi^2\left(\frac{n\nu\omega'}{2n+1}\right)\right],$$

or, en faisant:

$$a.\nu=(2n+1).k'_a+k_a,$$

où k_a est entier et compris entre $-n$ et $+n$, la serie

$$k_1,\ k_2\ \ldots\ldots\ \ k_n$$

aura au signe près les mémes termes que celle-ci:

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots\ldots\ n;$$

donc il est clair, que le second membre de l'équation (95) aura la même valeur que p. Donc:

$$96)\ \ \psi\left[\varphi^2\left(\frac{\nu\omega'}{2n+1}\right)\right]=\psi\left[\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right)\right],$$

équation, qui en faisant $\omega'=\omega$ et $\omega'=m\omega+\varpi i$, donnera ces deux-ci:

$$97)\ \begin{cases}\psi\left[\varphi^2\left(\frac{\nu\omega}{2n+1}\right)\right]=\psi\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\right],\\ \psi\left[\varphi^2\left(\nu.\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)\right]=\psi\left[\varphi^2\left(\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)\right],\end{cases}$$

ou bien, en faisant, pour abréger,

$$98)\ \ \varphi^2\left(\frac{\nu\omega}{2n+1}\right)=r_\nu,\ \varphi^2\left(\nu.\frac{m\omega+\varpi i}{2n+1}\right)=r_{\nu,m},$$

il viendra:

$$99) \qquad \psi . r_\nu = \psi r_1 ; \; \psi r_{\nu,m} = \psi r_{1,m}.$$

Cela posé, soit

$$100) \begin{cases} (p-\psi r_1)(p-\psi r_{1,0})(p-\psi r_{1,1})(p-\psi r_{1,2}) \ldots (p-\psi r_{1,2n}) \\ = q_0 + q_1 . p + q_2 . p^2 + \ldots q_{2n+1} . p^{2n+1} + p^{2n+2}. \end{cases}$$

Je dis, qu'on peut exprimer les coefficiens q_0, q_1 etc. rationnellement en e et c.

D'abord en vertu des formules connues on peut exprimer rationnellement ces coefficiens en $t_1, t_2 \ldots t_{2n}$, si l'on fait, pour abréger,

$$101) \quad t_k = (\psi r_1)^k + (\psi r_{1,0})^k + (\psi r_{1,1})^k + \ldots + (\psi r_{1,2n})^k.$$

Il s'agit donc de trouver les quantités $t_1, t_2, \ldots$, or cela se pourra aisément au moyen des relations (99). En effet, en y faisant successivement $\nu = 1, 2 \ldots n$, après avoir élevé les des deux membres à la $k^{\text{ème}}$ puissance, on en tirera sur le champ:

$$102) \begin{cases} (\psi r_1)^k = \frac{1}{n}((\psi r_1)^k + (\psi r_2)^k + \ldots + (\psi r_n)^k), \\ (\psi r_{1,m})^k = \frac{1}{n}((\psi r_{1,m})^k + (\psi r_{2,m})^k + \ldots + (\psi r_{n,m})^k). \end{cases}$$

Donc en mettant pour m tous les nombres entiers 0, 1, ... $2n$, et ensuite substituant dans l'expression de t_k, il viendra:

$$103) \begin{cases} n . t_k = (\psi r_1)^k + (\psi r_2)^k + \ldots + (\psi r_n)^k \\ \quad + (\psi r_{1,0})^k + (\psi r_{2,0})^k + \ldots + (\psi r_{n,0})^k \\ \quad + (\psi r_{1,1})^k + (\psi r_{2,1})^k + \ldots + (\psi r_{n,1})^k \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + (\psi r_{1,2n})^k + (\psi r_{2,2n})^k + \ldots + (\psi r_{n,2n})^k. \end{cases}$$

Cette valeur de t_k est, comme on voit, une fonction rationnelle et symétrique des $n(2n+2)$ quantités $r_1, r_2, \ldots r_n, r_{1,0}, r_{2,0}, \ldots r_{n,0} \ldots r_{1,2n}, r_{2,2n} \ldots r_{n,2n}$, qui sont les $n(2n+2)$ racines de l'équation $R=0$. Donc comme on sait, t_k pourra s'exprimer rationnellement par les coefficiens de cette équation, et par suite en fonction rationnelle de e et c. Ayant ainsi trouvé les quatités t_k, on en tire les valeurs de $q_0 . q_1, \ldots q_{2n+1}$, qui seront également des fonctions rationnelles de e et e.

20.

Cela posé, en supposant

$$104) \quad 0 = q_0 + q_1 . p + q_2 . p^2 + \ldots + q_{2n+1} . p^{2n+1} + p^{2n+2},$$

on aura une équation du $(2n+2)^{\text{ème}}$ degré, dont les racines seront

$$\psi r_1, \; \psi r_{1,0}, \; \psi r_{1,1}, \; \psi r_{1,2} \ldots \psi r_{1,2n}.$$

La fonction ψr_1, c'est-à-dire, une fonction quelconque rationnelle et symétrique des racines $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ pourra donc être trouvée au moyen d'une équation du degré $2n+2$.

Donc on aura de cette manière les coefficiens $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}$, en résolvant un nombre n d'équations, chacune du $(2n+2)^{\text{ème}}$ degré.

Ayant déterminé $p_0, p_1 \ldots$, on aura, en résolvant l'équation

$$105)\qquad 0 = p_0 + p_1 r + \ldots + p_{n-1} \cdot r^{n-1} + r^n,$$

la valeur des quantités

$$r_1, r_2, \ldots r_n;\; r_{1,0}, r_{2,0}, \ldots r_{n,0};\; r_{1,1}, r_{2,1}, \ldots r_{n,1} \text{ etc. etc.}$$

dont la première est égale à $\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$. Donc la détermination de cette quantité, ou bien la résolution de l'équation $R=0$, qui est du degré $(2n+2).n$, est réduite à celle d'équations du degré $(2n+2)$ et n.

Mais on peut encore simplifier le procédé précédent. En effet, comme nous le verrons, pour avoir les quantités $p_0, p_1 \ldots$, il suffit de connaître l'une quelconque d'entre elles, et alors on peut exprimer les autres rationnellement par celle-là.

Soient généralement p, q deux fonctions rationnelles et symétriques des quantités $r_1, r_2, \ldots r_n$, on peut faire, comme nous l'avons vu,

$$p = \psi r_1;\; q = \theta r_1,$$

ψr_1 et θr_1 désignant deux fonctions rationnelles de r_1, qui ont cette propriété de rester les mêmes, si l'on change r_1 en une autre quelconque des quantités $r_1, r_2, \ldots r_n$.

Supposons maintenant:

$$s_k = (\psi r_1)^k \cdot \theta r_1 + (\psi r_{1,0})^k \cdot \theta r_{1,0} + (\psi r_{1,1})^k \cdot \theta r_{1,1} + \ldots + (\psi r_{1,2n})^k \cdot \theta r_{1,2n},$$

je dis que s_k pourra être exprimé rationnellement en e et c.

En effet, on a

$$(\psi r_1)^k \cdot \theta r_1 = (\psi r_\nu)^k \cdot \theta r_\nu = \frac{1}{n}\left((\psi r_1)^k \cdot \theta r_1 + (\psi r_2)^k \cdot \theta r_2 + \ldots + (\psi r_n)^k \cdot \theta r_n\right),$$

$$(\psi r_{1,m})^k \cdot \theta r_{1,m} = (\psi r_{\nu,m})^k\, \theta r_{\nu,m} = \frac{1}{n}\left((\psi r_{1,m})^k \cdot \theta r_{1,m} + (\psi r_{2,m})^k \cdot \theta r_{2,m} + \ldots + (\psi r_{n,m})^k \cdot \theta r_{n,m}\right).$$

En faisant $m=0, 1, 2, \ldots 2n$, et substituant dans l'expression de s_k, on verra que s_k sera une fonction rationnelle et symétrique des racines $r_0, r_1, \ldots r_{1,0}$ etc., etc. de l'équation $R=0$; donc s_k pourra s'exprimer rationnellement en e et c.

Connaisant s_k, on obtiendra, en faisant $k=0.\ 1, 2, \ldots 2n$, $2n+1$ équations, desquelles on tirera aisément la valeur de θr_1, en fonction rationnelle de

$\psi_1 r$. Donc, une fonction de la forme p étant donnée, on peut exprimer une autre fonction quelconque de la même forme en fonction rationnelle de p. Donc, comme nous l'avons dit, on peut exprimer les coefficiens $p_0, p_1, \dots p_{n-1}$ rationnellement par l'un quelconque d'entre eux. Donc enfin, pour en avoir les valeurs, il suffit de résoudre une seule équation du degré $2n+2$, et par conséquent, pour avoir les racines de l'équation $R=0$, il suffit de résoudre une équation du degré $2n+2$, et $2n+2$ équations du degré n.

21.

Maintenant, parmi les équations, dont dépend la détermination des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)$, $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)$, celles du degré n peuvent être résolues algébriquement. Le procédé par lequel nous allons effectuer cette résolution est entièrement semblable à celui, qui est dû à *M. Gauss* pour la résolution de l'équation

$$\theta^{2n+1}-1=0.$$

Soit proposée l'équation

$$106)\quad 0=p_0+p_1.r+p_2.r^2+\dots+p_{n-1}.r^{n-1}+r^n,$$

dont les racines sont:

$$\varphi^2\left(\frac{\omega'}{2n+1}\right), \varphi^2\left(\frac{2\omega'}{2n+1}\right), \dots \varphi^2\left(\frac{n\omega'}{2n+1}\right),$$

où ω' a une des valeurs ω, $m\omega+\varpi i$. Désignons par α une des racines primitives du nombre $2n+1$, c'est-à-dire, un nombre entier tel, que $\mu=2n+1$ est le nombre le plus petit qui rende $\alpha^{\mu-1}-1$ divisible par $2n+1$, je dis, que les racines de l'équation (106) peuvent aussi être représentées par

$$107)\quad \varphi^2(\varepsilon), \varphi^2(\alpha\varepsilon), \varphi^2(\alpha^2\varepsilon), \varphi^2(\alpha^3\varepsilon)\dots\varphi^2(\alpha^{n-1}.\varepsilon),$$

où $\varepsilon=\frac{\omega'}{2n+1}$.

Soit

$$\alpha^m=(2n+1)k_m\pm a_m,$$

où k est entier et a_m entier, positif et moindre que $n+1$, je dis, que les termes de la série

$$1, a_1, a_2, \dots a_{n-1}$$

seront tous différents entre eux.

En effet, si l'on a

$$a_m=a_\mu,$$

il en résulte,

$$\text{ou } \alpha^m - \alpha^\mu = (2n+1)(k_m - k_\mu),$$
$$\text{ou } \alpha^m + \alpha^\mu = (2n+1)(k_m + k_\mu).$$

Il faut donc que l'une des quatités $\alpha^m - \alpha^\mu$, $\alpha^m + \alpha^\mu$ soit divisible par $2n+1$; or soit posé $m > \mu$, ce qui est permis, il faut que $\alpha^{m-\mu} - 1$ ou $\alpha^{m-\mu} + 1$ soit divisible par $2n+1$; or cela est imposible, car $m - \mu$ est moindre que n.

Donc les quantités 1, a_1, $a_2 \ldots a_{n-1}$ sont différentes entre elles, et par conséquent elles coincident, mais dans un ordre différent, avec les nombres $1, 2, 3, 4 \ldots n$.

Donc, en remarquant que

$$\varphi^2[((2n+1)k_m \pm a_m)\varepsilon] = \varphi^2(a_m\varepsilon),$$

on voit que les quantités (107) sont les mêmes que celles-ci:

$$\varphi^2(\varepsilon), \varphi^2(2\varepsilon) \ldots \varphi^2(n\varepsilon),$$

c'est-à-dire les racines de l'équation (106) c. q. f. d.

Il y a encore à remarquer, qu'ayant

$$\alpha^n = (2n+1)k_n - 1.$$

on aura

$$\alpha^{n+m} = (2n+1)k_n\alpha^m - \alpha^m,$$

donc

$$a_{n+m} = -a_m$$

et

$$\varphi^2(\alpha^{n+m}\varepsilon) = \varphi^2(\alpha^m\varepsilon).$$

Cela posé, soit θ une racine imaginaire quelconque de l'équation

$$\theta^n - 1 = 0$$

et

$$108) \quad \psi(\varepsilon) = \varphi^2(\varepsilon) + \varphi^2(\alpha\varepsilon)\theta + \varphi^2(\alpha^2\varepsilon)\theta^2 + \ldots + \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)\theta^{n-1}.$$

En vertu de ce que nous avons vu précédemment, le second membre de cette équation peut être transformé en une fonction *rationnelle* de $\varphi^2(\varepsilon)$. Faisons

$$109) \quad \psi(\varepsilon) = \chi(\varphi^2(\varepsilon)).$$

En mettant dans la première expression de $\psi(\varepsilon)$, $\alpha^m\varepsilon$ au lieu de ε, il viendra:

$$\psi(\alpha^m\varepsilon) = \varphi^2(\alpha^m\varepsilon) + \varphi^2(\alpha^{m+1}\varepsilon).\theta + \varphi^2(\alpha^{m+2}\varepsilon).\theta^2 + \ldots$$
$$\ldots + \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).\theta^{n-m-1} + \varphi^2(\alpha^n\varepsilon).\theta^{n-m} + \ldots + \varphi^2(\alpha^{n+m-1}\varepsilon)\theta^{n-1},$$

mais nous avons vu que $\varphi^2(\alpha^{n+m}\varepsilon) = \varphi^2(\alpha^m\varepsilon)$; donc:

$$\psi(\alpha^m\varepsilon) = \theta^{n-m}.\varphi^2(\varepsilon) + \theta^{n-m+1}.\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \theta^{n-m+2}.\varphi^2(\alpha^2\varepsilon) + \ldots$$
$$\ldots + \theta^{n-1}.\varphi^2(\alpha^{m-1}\varepsilon) + \varphi^2(\alpha^m\varepsilon) + \theta.\varphi^2(\alpha^{m+1}\varepsilon) + \ldots + \theta^{n-m-1}.\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).$$

En multipliant par θ^m, le second membre deviendra égal a $\psi(\varepsilon)$, donc:

$$110)\qquad \psi(\alpha^m\varepsilon) = \theta^{-m}.\psi(\varepsilon),$$

ou bien:

$$\psi(\varepsilon) = \theta^m.\chi(\varphi^2(\alpha^m\varepsilon)),$$

d'où, en élevant les deux membres à la $n^{\text{ème}}$ puissance, on tire en vertu de la relation $\theta^{mn} = 1$:

$$111)\qquad (\psi(\varepsilon))^n = [\chi(\varphi^2(\alpha^m\varepsilon))]^n.$$

Cette formule donne, en faisant successivement $m = 0, 1, 2, 3 \ldots n-1$, n équations, qui, ajoutées membres à membres donneront la suivante:

$$112)\quad n(\psi(\varepsilon))^n = [\chi(\varphi^2(\varepsilon))]^n + [\chi(\varphi^2(\alpha\varepsilon))]^n + [\chi(\varphi^2(\alpha^2\varepsilon))]^n + \ldots + [\chi(\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon))]^n;$$

or, le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des quatités $\varphi^2(\varepsilon)$, $\varphi^2(\alpha\varepsilon) \ldots \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)$, c'est-à-dire des racines de l'équation (**106**); donc $(\psi\varepsilon)^n$ peut être exprimé en fonction rationnelle de $p_0, p_1 \ldots p_{n-1}$, par conséquent en fonction rationnelle de l'une quelconque de ces quantités. Soit v la valeur de $(\psi(\varepsilon))^n$, on aura

$$113)\quad \sqrt[n]{v} = \varphi^2(\varepsilon) + \theta.\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \theta^2.\varphi^2(\alpha^2\varepsilon) + \ldots + \theta^{n-1}.\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).$$

Cela posé, soit $\theta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Les racines imaginaires de l'équation $\theta^n - 1$ peuvent être représentées par

$$\theta^1,\ \theta^2 \ldots \theta^{n-1}.$$

Donc en faisant successivement θ égal à chacune de ces racines et désignant les valeurs correspondantes de v par v_1, $v_2 \ldots v_{n-1}$, il viendra

$$\sqrt[n]{v_1} = \varphi^2(\varepsilon) + \theta.\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \ldots + \theta^{n-1}.\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon),$$

$$\sqrt[n]{v_2} = \varphi^2(\varepsilon) + \theta^2.\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \ldots + \theta^{2n-2}.\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sqrt[n]{v_{n-1}} = \varphi^2(\varepsilon) + \theta^{n-1}.\varphi^2(\alpha\varepsilon) + \ldots + \theta^{(n-1)^2}.\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).$$

En combinant ces équations avec la suivante:

$$-p_{n-1} = \varphi^2(\varepsilon) + \varphi^2(\alpha\varepsilon) + \ldots + \varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon),$$

on en tire aisément:

$$114)\quad \varphi^2(\alpha^m\varepsilon) = +\frac{1}{n}(-p_{n-1} + \theta^{-m}.\sqrt[n]{v_1} + \theta^{-2m}.\sqrt[n]{v_2} + \theta^{-3m}.\sqrt[n]{v_3} + \ldots$$
$$\ldots + \theta^{-(n-1)m}\sqrt[n]{v_{n-1}}),$$

et pour $m = 0$:

$$115)\quad \varphi^2(\varepsilon) = \frac{1}{n}(-p_{n-1} + \sqrt[n]{v_1} + \sqrt[n]{v_2} + \ldots + \sqrt[n]{v_{n-1}}).$$

22.

Toutes les racines de l'équation (106) sont contenues dans la formule (115), mais puisque leur nombre n'est que n, il reste encore à donner à $\varphi^2(\varepsilon)$ une forme qui ne contienne pas des racines étrangères à la question. Or cela se fait aisément, comme suit.

Soit
$$s_k = \frac{\sqrt[n]{v_k}}{(\sqrt[n]{v_1})^k}.$$

En posant ici $\alpha^m\varepsilon$ au lieu de ε, $\sqrt[n]{v_k}$ se changera en $\theta^{-km}.\sqrt[n]{v_k}$, et v_1 en $\theta^{-m}.v_1$, donc s_k se changera en
$$\frac{\theta^{-km}.\sqrt[n]{v_k}}{(\theta^{-m}\sqrt[n]{v_1})^k} = \frac{\sqrt[n]{v_k}}{(\sqrt[n]{v_1})^k}.$$

La fonction s_k, comme on voit, ne change pas de valeur, en mettant $\alpha^m\varepsilon$ au lieu de ε. Or s_k est une fonction rationnelle de $\varphi^2(\varepsilon)$. Donc, en désignant s_k par $\lambda(\varphi^2(\varepsilon))$, on aura
$$s_k = \lambda(\varphi^2(\alpha^m\varepsilon)),$$
quel que soit le nombre entier m. De là on tirera de la même manière, et comme nous avons trouvé $(\psi\varepsilon)^n$, la valeur de s_k, en fonction rationnelle de l'une des quatités $p_0, p_1, \dots p_{n-1}$. Connaisant s_k, on a
$$\sqrt[n]{v_k} = s_k.(\sqrt[n]{v_1})^k.$$
Donc en mettant v au lieu de v_1, l'expression de $\varphi^2(\alpha^m\varepsilon)$ deviendra:

$$116)\quad \varphi^2(\alpha^m\varepsilon) = \frac{1}{n}\left(-p_{n-1} + \theta^{-m}.v^{\frac{1}{n}} + s_2\theta^{-2m}.v^{\frac{2}{n}} + \dots + s_{n-1}\theta^{-(n-1)m}.v^{\frac{n-1}{n}}\right),$$

pour $m=0$:

$$117)\quad \varphi^2(\varepsilon) = \frac{1}{n}\left(-p_{n-1} + v^{\frac{1}{n}} + s_2.v^{\frac{2}{n}} + s_3.v^{\frac{3}{n}} + \dots + s_{n-1}.v^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

Cette valeur n'a que n valeurs différentes, qui répondent aux n valeurs de $v^{\frac{1}{n}}$. Donc en dernier lieu la résolution de l'équation $P_{2n+1}=0$ est réduite à celle d'une seule équation du degré $2n+2$; mais cette équation ne paraît pas *en général* être résoluble algébriquement. Néanmoins on peut la résoudre complètement dans plusieurs cas particuliers, p. ex., lorsque $e=c$, $e=c\sqrt{3}$, $e=c(2\pm\sqrt{3})$ etc. Dans le cours de ce mémoire je m'occuperai de ces cas, dont le premier surtout est remarquable, tant par la simplicité de la solution, que par sa belle application dans la géométrie.

En effet entre autres je suis parvenu à ce théorème:

"On peut diviser la circonférence entière de la lemniscate *par la règle et "le compas seuls*, en m parties égales, si m est de la forme 2^n ou 2^n+1, "le dernier nombre étant en même temps premier; ou bien si m est un "produit de plusieurs nombres de ces deux formes."

Ce théorème est, comme on voit, précisément le même que celui de *M. Gauss*, relativement au cercle.

§. VI.

Expressions diverses des fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$.

23.

En faisant usage des formules connues, qui donnent les valeurs des coefficiens d'une équation algébrique en fonction des racines, on peut tirer plusieurs expressions des fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$ des formules du paragraphe précédent.

Je vais considérer les plus remarquables.

Pour abréger les formules, je me servirai des notations suivantes. Je désignerai:

1) Par $\overset{k'}{\underset{k}{\Sigma}}{}_m\psi(m)$ la somme, et par $\overset{k'}{\underset{k}{\Pi}}{}_m\psi(m)$ le produit de toutes les quantités de la forme $\psi(m)$, qu'on obtiendra, en donnant à m toutes les valeurs entiéres, depuis k jusqu'à k', les limites k et k' y comprises.

2) Par $\overset{k'}{\underset{k}{\Sigma}}{}_m\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Sigma}}{}_\mu\psi(m,\mu)$ la somme, et par $\overset{k'}{\underset{k}{\Pi}}{}_m\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Pi}}{}_\mu\psi(m,\mu)$ le produit de toutes les quantités de la forme $\psi(m,\mu)$, qu'on obtiendra, en donnant à m toutes les valeurs entières de k à k', et à μ les valeurs entières de ν à ν' en y comprenant toujours les limites.

D'aprés cela il est clair, qu'on aura:

$$119)\qquad \overset{k'}{\underset{k}{\Sigma}}{}_m\psi(m)=\psi(k)+\psi(k+1)+\dots\psi(k'),$$

$$120)\qquad \overset{k'}{\underset{k}{\Pi}}{}_m\psi(m)=\psi(k)\;.\;\psi(k+1)\dots\psi(k'),$$

$$121)\qquad \overset{k'}{\underset{k}{\Sigma}}{}_m\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Sigma}}{}_\mu\psi(m,\mu)=\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Sigma}}{}_\mu\psi(k,\mu)+\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Sigma}}{}_\mu\psi(k+1,\mu)+\dots+\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Sigma}}{}_\mu\psi(k',\mu),$$

$$122)\qquad \overset{k'}{\underset{k}{\Pi}}{}_m\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Pi}}{}_\mu\psi(m,\mu)=\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Pi}}{}_\mu\psi(k,\mu)\;.\;\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Pi}}{}_\mu\psi(k+1,\mu)\;\dots\dots\;\overset{\nu'}{\underset{\nu}{\Pi}}{}_\mu\psi(k',\mu).$$

Cela posé, considérons les équations

$$123)\qquad \begin{cases} \varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \\ f(2n+1)\beta = \frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \\ F(2n+1)\beta = \frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}}. \end{cases}$$

Nous avons vu que P_{2n+1} est une fonction rationnelle de x du degré $(2n+1)^2$ et de la forme $x.\psi(x^2)$. De même P'_{2n+1} et P''_{2n+1} sont des fonctions de cette même forme, la première de y et la seconde de z. Enfin Q_{2n+1} est une fonction qui, exprimée indistinctement en x, y ou z, sera du degré $(2n+1)^2-1$, et contiendra seulement des puissances paires. Donc on aura

$$\begin{aligned} P_{2n+1} &= A\,.\,x^{(2n+1)^2} + \ldots + B\,.\,x, \\ P'_{2n+1} &= A'\,.\,y^{(2n+1)^2} + \ldots + B'.y, \\ P''_{2n+1} &= A''\,.\,z^{(2n+1)^2} + \ldots + B''.z, \\ Q_{2n+1} &= C\,.\,x^{(2n+1)^2-1} + \ldots + D, \\ Q_{2n+1} &= C'\,.\,y^{(2n+1)^2-1} + \ldots + D', \\ Q_{2n+1} &= C''\,.\,z^{(2n+1)^2-1} + \ldots + D''. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans (123), il viendra

$$\begin{aligned} (A\,.\,x^{(2n+1)^2} + \ldots + B\,.\,x) &= \varphi(2n+1)\beta.(C\,.\,x^{(2n+1)^2-1} + \ldots + D), \\ (A'\,.\,y^{(2n+1)^2} + \ldots + B'\,.\,y) &= f(2n+1)\beta.(C'\,.\,y^{(2n+1)^2-1} + \ldots + D'), \\ (A''\,.\,z^{(2n+1)^2} + \ldots + B''\,.\,z) &= F(2n+1)\beta.(C''\,.\,z^{(2n+1)^2-1} + \ldots + D''). \end{aligned}$$

Dans la première de ces équations A est le coefficient du premier terme, $-\varphi(2n+1)\beta.C$ celui du second et $-\varphi(2n+1)\beta.D$ le dernier terme. Donc $\frac{C}{A}\varphi(2n+1)\beta$ est égal à la somme et $\pm\frac{D}{A}\varphi(2n+1)\beta$ égal au produit des racines de l'équation dont il s'agit, équation qui est la même que celle-ci:

$$124)\qquad \varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Donc en remarquant que A, C et D (et en général tous les coefficiens) sont indépendans de β, on voit que $\varphi(2n+1)\beta$ est (d'un coefficient constant près) égal à la somme et au produit de toutes les racines de l'équation (124).

De la même manière on voit que $f(2n+1)\beta$ et $F(2n+1)\beta$ sont respectivement égaux au produit ou à la somme des racines des équations

$$f(2n+1)\beta = \frac{P'_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\quad F(2n+1)\beta = \frac{P''_{2n+1}}{Q_{2n+1}},$$

en ayant attention de multiplier le résultat par un coefficient constant, choisi convenablement.

Maintenant les racines des équations (123) d'après le No. 11. sont respectivement:

$$x = (-1)^{m+\mu}.\varphi\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$
$$y = (-1)^{m}.f\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$
$$z = (-1)^{\mu}.F\left(\beta + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right),$$

où les limites de m et μ sont $-n$ et $+n$.

Donc en vertu de ce qu'on vient de voir, et en faisant usage des notations adoptées, on aura les formules suivantes:

$$125)\quad \begin{cases} \varphi(2n+1)\beta = A.\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{m}\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}(-1)^{m+\mu}.\varphi\left(\beta + \frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ f(2n+1)\beta = A'.\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{m}\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}(-1)^{m}.f\left(\beta + \frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ F(2n+1)\beta = A''.\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{m}\sum\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.F\left(\beta + \frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right); \\ \varphi(2n+1)\beta = B.\prod\limits_{-n}^{+n}{}_{m}\prod\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}.\varphi\left(\beta + \frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ f(2n+1)\beta = B'.\prod\limits_{-n}^{+n}{}_{m}\prod\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}.f\left(\beta + \frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right), \\ F(2n+1)\beta = B''.\prod\limits_{-n}^{+n}{}_{m}\prod\limits_{-n}^{+n}{}_{\mu}.F\left(\beta + \frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right). \end{cases}$$

Pour déterminer les quantités constantes A, A', A'', B, B', B'', il faudra donner à β une valeur particulière. Ainsi en faisant dans les trois premières formules $\beta = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i$, après avoir divisé les deux membres par $\varphi\beta$, il viendra, en remarquant que $\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{1}{0}$:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\varphi(2n+1)\beta}{\varphi\beta} \\ A' &= \frac{f(2n+1)\beta}{f\beta} \\ A'' &= \frac{F(2n+1)\beta}{F\beta} \end{aligned}\right\} \text{ pour } \beta = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i$$

Soit $\beta = \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i + \alpha$, on a:

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{\varphi\left((2n+1)\alpha + n\omega + n\varpi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)}{\varphi\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)} \\
&= \frac{\varphi\left((2n+1)\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)}{\varphi\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)} = \frac{\varphi\alpha}{\varphi(2n+1)\alpha}, \\
A' &= \frac{f\left((2n+1)\alpha + n\omega + n\varpi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)}{f\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)} \\
&= (-1)^n . \frac{f\left((2n+1)\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)}{f\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)} = (-1)^n . \frac{f\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)}{f\left((2n+1)\alpha + \frac{\omega}{2}\right)}, \\
A'' &= \frac{F\left((2n+1)\alpha + n\omega + n\varpi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)}{F\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)} \\
&= (-1)^n . \frac{F\left((2n+1)\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)}{F\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2} i\right)} = (-1)^n . \frac{F\left(\alpha + \frac{\varpi}{2} i\right)}{F\left((2n+1)\alpha + \frac{\varpi}{2} i\right)}.
\end{aligned}\right\} \text{pour } \alpha = 0.$$

Ces expressions de A, A', A'' deviendront de la forme $\frac{0}{0}$, en faisant $\alpha = 0$, donc on trouvera d'après les règles connues:

$$A = \frac{1}{2n+1}, \quad A' = A'' = \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

D'après cela les trois premières formules deviendront:

$$126) \quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(2n+1)\beta &= \frac{1}{2n+1} . \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^{m+\mu} . \varphi\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
f(2n+1)\beta &= \frac{(-1)^n}{2n+1} . \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^m . f\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right), \\
F(2n+1)\beta &= \frac{(-1)^n}{2n+1} . \sum_{-n}^{+n}{}_m \sum_{-n}^{+n}{}_\mu (-1)^\mu . F\left(\beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right).
\end{aligned}\right.$$

Pour avoir la valeur des constantes B, B', B'', je remarque, qu'on aura:

$$127)\quad \prod_{-n}^{+n}{}_m \prod_{-n}^{+n}{}_\mu \psi(m,\mu) = \psi(0,0).\prod_1^n{}_m \psi(m,0)\psi(-m,0).\prod_1^n{}_\mu \psi(0,\mu)\psi(0,-\mu)$$

$$\times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \psi(m,\mu).\psi(-m,-\mu).\prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \psi(m,-\mu).\psi(-m,\mu).$$

En appliquant cette transformation aux formules (125), divisant la première par $\varphi\beta$, la seconde par $f\beta$ et la troisième par $F\beta$, faisant ensuite dans la première $\beta=0$, dans la seconde $\beta=\frac{\omega}{2}$ et dans la troisième $\beta=\frac{\varpi}{2}i$, et remarquant que $\frac{\varphi(2n+1)\beta}{\varphi\beta}=2n+1$, pour $\beta=0$, que $\frac{f(2n+1)\beta}{f\beta}=(-1)^n(2n+1)$, pour $\beta=\frac{\omega}{2}$, et que $\frac{F(2n+1)\beta}{F\beta}=(-1)^n(2n+1)$, pour $\beta=\frac{\varpi}{2}i$, on trouvera:

$$128)\quad \left\{\begin{aligned}
(2n+1) &= B.\prod_1^n{}_m \varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right).\prod_1^n{}_\mu \varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\\
&\quad\times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right).\ \varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right),\\
(2n+1)(-1)^n &= B'.\prod_1^n{}_m f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right).\prod_1^n{}_\mu f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\\
&\quad\times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right).\ f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right),\\
(2n+1)(-1)^n &= B''.\prod_1^n{}_m F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right).\prod_1^n{}_\mu F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\\
&\quad\times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right).\ F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right).
\end{aligned}\right.$$

En tirant de ces équations les valeurs de B, B', B'', et les substituant ensuite dans les formules transformées, il viendra:

129) $$\begin{cases} \varphi(2n+1)\beta = \\ (2n+1)\varphi\beta \cdot \prod_{1}^{n}{}_{m} \dfrac{\varphi\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right)\cdot\varphi\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)} \cdot \prod_{1}^{n}{}_{\mu} \dfrac{\varphi\left(\beta+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot\varphi\left(\beta-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \\ \times \prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu} \dfrac{\varphi\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot\varphi\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \cdot \dfrac{\varphi\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot\varphi\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}, \\ f(2n+1)\beta = \\ (2n+1)(-1)^n f\beta \cdot \prod_{1}^{n}{}_{m} \dfrac{f\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right)\cdot f\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega}{2n+1}\right)} \cdot \prod_{1}^{n}{}_{\mu} \dfrac{f\left(\beta+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot f\left(\beta-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \\ \times \prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu} \dfrac{f\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot f\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \cdot \dfrac{f\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot f\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}, \\ F(2n+1)\beta = \\ (2n+1)(-1)^n F\beta \cdot \prod_{1}^{n}{}_{m} \dfrac{F\left(\beta+\frac{m\omega}{2n+1}\right)\cdot F\left(\beta-\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega}{2n+1}\right)} \cdot \prod_{1}^{n}{}_{\mu} \dfrac{F\left(\beta+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot F\left(\beta-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \\ \times \prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{n}{}_{\mu} \dfrac{F\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot F\left(\beta-\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \cdot \dfrac{F\left(\beta+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\cdot F\left(\beta-\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}. \end{cases}$$

On peut donner à ces formules des formes plus simples, en faisant usage des formules suivantes:

$$\frac{\varphi(\beta+\alpha)\cdot\varphi(\beta-\alpha)}{\varphi^2\alpha} = -\frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}}$$

$$\frac{f(\beta+\alpha)\cdot f(\beta-\alpha)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)} = -\frac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i\right)}},$$

$$\frac{F(\beta+\alpha)\cdot F(\beta-\alpha)}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)} = -\frac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}},$$

qu'on vérifiera aisément au moyen des formules (13), (16), (18).

En vertu de ces formules il est clair qu'on peut mettre les équations (129) sous la forme:

$$
(130)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi(2n+1)\beta = \\
&(2n+1)\varphi\beta \cdot \prod_{1}^{n}{}_{m} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega}{2n+1}\right)}} \cdot \prod_{1}^{n}{}_{\mu} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \\
&\times \prod_{1}^{n}{}_{m} \prod_{1}^{n}{}_{\mu} \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \cdot \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}, \\
&f(2n+1)\beta = \\
&(2n+1)(-1)^n f\beta \cdot \prod_{1}^{n}{}_{m} \frac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\dfrac{m\omega}{2n+1}+\dfrac{\omega}{2}\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega}{2n+1}\right)}} \cdot \prod_{1}^{n}{}_{\mu} \frac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \\
&\times \prod_{1}^{n}{}_{m} \prod_{1}^{n}{}_{\mu} \frac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \cdot \frac{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}, \\
&F(2n+1)\beta = \\
&(2n+1)(-1)^n F\beta \cdot \prod_{1}^{n}{}_{m} \frac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega}{2n+1}\right)}} \cdot \prod_{1}^{n}{}_{\mu} \frac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \\
&\times \prod_{1}^{n}{}_{m} \prod_{1}^{n}{}_{\mu} \frac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \cdot \frac{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules donnent, comme on voit, les valeurs de $\varphi(2n+1)\beta$, $f(2n+1)\beta$ et $F(2n+1)\beta$, exprimées respectivement en fonctions rationnelles de $\varphi\beta$, $f\beta$ et $F\beta$ sous la forme de produits.

Nous donnerons encore les valeurs de $f(2n+1)\beta$, $F(2n+1)\beta$ sous une autre forme, qui sera utile dans la suite.

On a $f^2\beta = 1 - c^2\varphi^2\beta$, donc

$$1 - \frac{f^2\beta}{f^2\alpha} = \frac{c^2(\varphi^2\beta - \varphi^2\alpha)}{f^2\alpha} = \frac{c^2}{f^2\alpha}\,\varphi^2\beta - \frac{c^2\varphi^2\alpha}{f^2\alpha}$$

et

$$1 - \frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)} = \frac{c^2\left[\varphi^2\beta - \varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)\right]}{f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)},$$

or en vertu de (16) on a:

$$f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = \frac{e^2+c^2}{e^2}\cdot\frac{1}{f^2\alpha};$$

donc

$$\frac{1 - \dfrac{f^2\beta}{f^2\alpha}}{1 - \dfrac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}} = \frac{1}{f^4\alpha}\cdot\frac{e^2+c^2}{e^2}\cdot\frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}\cdot\frac{1 - \dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1 - \dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}}.$$

On trouvera de même:

$$\frac{1 - \dfrac{F^2\beta}{F^2\alpha}}{1 - \dfrac{F^2\beta}{F^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}} = \frac{1}{F^4\alpha}\cdot\frac{e^2+c^2}{c^2}\cdot\frac{\varphi^2\alpha}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\cdot\frac{1 - \dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1 - \dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}}.$$

En vertu de ces formules, et en faisant $\beta = 0$, pour déterminer le facteur constant, il est clair qu'on peut écrire les expression de $f(2n+1)\beta$, $F(2n+1)\beta$, comme suit:

$$
130) \left\{
\begin{aligned}
f(2n+1)\beta &= f\beta . \prod_1^n{}_m \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega}{2n+1}\right)}} . \prod_1^n{}_\mu \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \\
&\times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} . \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}, \\
F(2n+1)\beta &= F\beta . \prod_1^n{}_m \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega}{2n+1}\right)}} . \prod_1^n{}_\mu \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} \\
&\times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}} . \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}+\dfrac{\varpi}{2}i+\dfrac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ce paragraphe nous n'avons considéré les fonctions $\varphi(n\beta)$, $f(n\beta)$, $F(n\beta)$, que dans le cas des valeurs impaires de n. On pourrait trouver des expressions analogues de ces fonctions pour des valeurs paires de n; mais comme il n'y a dans cela aucune difficulté, et que d'ailleurs les formules auxquelles nous sommes parvenu, sont celles qui nous seront les plus utiles dans la suite, je ne m'en occuperai pas.

§. VII.

Développement des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ en séries et en produits infinis.

24.

En faisant dans les formules du paragraphe précédent $\beta = \dfrac{\alpha}{2n+1}$, on obtiendra des expressions des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, qui, à cause du nombre indéterminé n, peuvent être variées d'une infinité de manières.

Parmi toutes les formules qu'on obtiendra ainsi, celles qui résultent de la supposition de n infini, sont les plus remarquables. Alors les fonctions φ, f, F disparaitront des valeurs de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, et on obtiendra pour ces fonctions des expressions algébriques, mais composées d'une infinité de termes. Pour avoir ces expressions, il faut faire dans les formules (126), 130) $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et ensuite chercher la limite du second membre de ces équations pour des valeurs toujours croissantes de n. Pour abréger, soit v une quantité dont la limite est zéro pour des valeurs toujours croissantes de n. Cela posé, considérons successivement les trois formules (126).

En faisant dans la première des formules (126) $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et remarquant que

$$131)\quad \sum_{-n}^{+n}{}_m\sum_{-n}^{+n}{}_\mu\,\theta(m,\mu) = \theta(0,0) + \sum_1^n{}_m\big(\theta(m,0)+\theta(-m,0)\big) + \sum_1^n{}_\mu\big(\theta(0,\mu)+\theta(0,-\mu)\big)$$
$$+\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu\big(\theta(m,\mu)+\theta(-m,-\mu)+\theta(m,-\mu)+\theta(-m,\mu)\big),$$

il est clair qu'on peut mettre la formule dont il s'agit, sous la forme:

$$132)\quad \varphi\alpha = \frac{1}{2n+1}\cdot\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right) + \frac{1}{2n+1}\sum_1^n{}_m(-1)^m\left[\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-m\omega}{2n+1}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2n+1}\sum_1^n{}_\mu(-1)^\mu\left[\varphi\left(\frac{\alpha+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right] - \frac{i}{ec}\cdot\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}\cdot\psi(n-m,n-\mu)$$
$$+\frac{i}{ec}\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}\cdot\psi_1(n-m,n-\mu),$$

où l'on a fait pour abréger,

$$133)\quad \begin{cases} \psi(m,\mu) = \dfrac{1}{2n+1}\cdot\left\{\dfrac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha+(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i}{2n+1}\right)} + \dfrac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha-(m+\frac12)\omega-(\mu+\frac12)\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}, \\[2ex] \psi_1(m,\mu) = \dfrac{1}{2n+1}\cdot\left\{\dfrac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha+(m+\frac12)\omega-(\mu+\frac12)\varpi i}{2n+1}\right)} + \dfrac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha-(m+\frac12)\omega+(\mu+\frac12)\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}. \end{cases}$$

Maintenant, en remarquant que

$$\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-m\omega}{2n+1}\right) = \frac{2\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right).f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right).F\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2.\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right).\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)} = \frac{A_m}{2n+1}$$

$$\varphi\left(\frac{\alpha+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \frac{2\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right).f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right).F\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2.\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right).\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)} = \frac{B_\mu}{2n+1},$$

où A_m et B_μ sont des quantités finies, la partie de l'équation (132) jusqu'au membre qui a le signe —, prendra la forme:

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\varphi\frac{\alpha}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\sum_1^n{}_m(-1)^m(A_m+B_\mu);$$

or la limite de cette quantité est évidemment zéro; donc, en prenant la limite de la formule (132), on aura:

$$\varphi\alpha=-\frac{i}{e\varpi}\lim.\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi(n-m,n-\mu)$$
$$+\frac{i}{e\varpi}\lim.\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi_1(n-m,n-\mu),$$

ou bien:

134) $$\varphi\alpha=-\frac{i}{e\varpi}\lim.\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi(m,\mu)$$
$$+\frac{i}{e\varpi}\lim.\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi_1(m,\mu).$$

Il suffit de connaître l'une de ces limites, car on aura l'autre en changeant seulement le signe de i.

Cherchons la limite de

$$\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi(m,\mu).$$

Pour cela, il faut essayer de mettre la quantité précédente sous la forme

$$P+v,$$

où P est indépendant de n, et v une quantité qui a zéro pour limite; car alors la quantité P sera précisément la limite dont il s'agit.

25.

Considérons d'abord l'expression:

$$\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu.\psi(m,\mu).$$

Soit

135) $$\theta(m,\mu)=\frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2},$$

et faisons

136) $$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{2\alpha}{(2n+1)^2}.R_\mu,$$

on aura

137) $$\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu.\psi(m,\mu)-\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu.\theta(m,\mu)=2\alpha.\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^\mu.\frac{R_\mu}{(2n+1)^2}.$$

Cela posé, je dis que le second membre de cette équation est une quantité de la forme $\frac{v}{2n+1}$.

D'après (12), (13) on aura

$$\frac{1}{\varphi(\beta+\varepsilon)}+\frac{1}{\varphi(\beta-\varepsilon)}=\frac{\varphi(\beta+\varepsilon)+\varphi(\beta-\varepsilon)}{\varphi(\beta+\varepsilon).\varphi(\beta-\varepsilon)}=\frac{2\varphi\beta.f\varepsilon.F\varepsilon}{\varphi^2\beta-\varphi^2\varepsilon},$$

donc en faisant $\beta=\frac{\alpha}{2n+1}$ et $\varepsilon=\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}=\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ et $f\varepsilon.F\varepsilon=\theta\varepsilon$, on a:

$$\psi(m,\mu)=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right).\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}.$$

Maintenant on a:

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=\frac{\alpha}{2n+1}+\frac{A\alpha^3}{(2n+1)^3},$$

donc $$\psi(m,\mu)=\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}\cdot\left(\frac{2A\alpha^3}{(2n+1)^4}+\frac{2\alpha}{(2n+1)^2}\right),$$

et par conséquent:

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{2\alpha}{(2n+1)^2}\left\{\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}-\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)^2}\right\}$$

$$+\frac{2A\alpha^3}{(2n+1)^4}\cdot\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}.$$

Donc la valeur de R_μ deviendra

138) $$R_\mu=\frac{\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)}\cdot\left(1+\frac{A\alpha^2}{(2n+1)^2}\right)-\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)^2};$$

Cela posé, il y a deux cas à considérer, savoir si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a zéro pour limite ou non.

a) Si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a zéro pour limite, on aura:

$$\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)=\frac{\varepsilon^2_\mu}{(2n+1)^2}+\frac{B_\mu.\varepsilon^4_\mu}{(2n+1)^4},$$

$$\theta\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)=\sqrt{\left[1-c^2\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)\right]}\cdot\sqrt{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}\right)\right]}=1+\frac{C_\mu.\varepsilon^2_\mu}{(2n+1)^2},$$

$$\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}+\frac{D.\alpha^4}{(2n+1)^4},$$

où B_μ, C_μ, D ont des limites finies; donc en substituant:

$$139)\quad R_\mu = A\alpha^2 . \frac{\frac{1}{\varepsilon^2_\mu} + \frac{C_\mu}{(2n+1)^2}}{\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2_\mu} - 1 + \frac{D\alpha^4}{(2n+1)^2 . \varepsilon^2_\mu} - B_\mu \frac{\varepsilon^2_\mu}{(2n+1)^2}}$$
$$+ \frac{C_\mu . \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2_\mu} - \frac{D\alpha^4}{\varepsilon^4_\mu} - C_\mu + B_\mu}{\left(1-\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2_\mu}\right)^2 - \left(1-\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2_\mu}\right)\left(\frac{D\alpha^4}{(2n+1)^2 . \varepsilon^2_\mu} - B_\mu . \frac{\varepsilon^2_\mu}{(2n+1)^2}\right)},$$

or soit que ε_μ soit fini ou infini, il est clair que cette quantité convergera toujours vers une quantité finie pour des valeurs toujours croissantes de n. Donc on aura

$$140)\qquad R_\mu = r_\mu + v_\mu,$$

où r_μ est une quantité finie indépendante de n.

b) Si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a pour limite une quantité finie, il est clair, qu'en nommant cette limite δ_μ, on aura:

$$141)\qquad R_\mu = -\frac{\theta(\delta_\mu)}{\varphi^2(\delta_\mu)} + \frac{1}{\delta^2_\mu} + v^1_\mu$$

Cela posé, considérons l'expression $\sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu . \frac{R_\mu}{(2n+1)^2}$. On a

$$142)\quad \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu . \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{1}{(2n+1)^2} . [R_0 - R_1 + R_2 - R_3 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{\nu-1} . R_{\nu-1} + (-1)^\nu (R_\nu - R_{\nu+1} + R_{\nu+2} - R_{\nu+3} \ldots + (-1)^{n-\nu-1} . R_{n-1})].$$

Supposons d'abord que $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ ait pour limite une quantité finie, quelle que soit la valeur de μ. Alors en remarquant que

$$\delta_{\mu+1} = \delta_\mu,$$

on aura
$$R_\mu - R_{\mu+1} = v^1_\mu - v^1_{\mu+1},$$
donc

$$\sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^\mu . \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{1}{(2n+1)^2} (v^1_0 - v^1_1 + v^1_2 - v^1_3 + \ldots + v^1_{k-2} - v^1_{k-1}) + \frac{B}{(2n+1)^2},$$

où $k = n$ ou $n - 1$, selon que n est pair ou impair. La quantité B a toujours pour limite une quantité finie, savoir $B = 0$, si n est pair, et $B = R_{n-1}$, si n est impair.

Maintenant on sait, qu'une somme telle que

$$v^1_0 - v^1_1 + v^1_2 - \ldots + v^1_{k-2} - v^1_{k-1},$$

peut être mise sous la forme $k . v$, v ayant zéro pour limite. Donc en substituant:

$$\sum_0^{n-1}(-1)^\mu \cdot \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{k.v+B}{(2n+1)^2};$$

or, k étant égal à n ou à $n-1$, et B fini, la limite de $\frac{k.v+B}{2n+1}$ sera zéro, donc:

$$143) \qquad \sum_0^{n-1}(-1)^\mu \cdot \frac{R_\mu}{(2n+1)^2} = \frac{v}{2n+1}.$$

Supposons maintenant que $\frac{m}{2n+1}$ a zéro pour limite. Alors $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a également zéro pour limite, à moins qu'en même temps $\frac{\mu}{2n+1}$ n'ait pour limite une quantité finie. Soit dans ce cas ν le nombre entier immédiatement inferieur à $\sqrt{n}$, et considérons la somme

$$R_0 - R_1 + R_2 - R_3 + \ldots + (-1)^{\nu-1} R_{\nu-1}.$$

En supposant que μ est un des nombres 0, 1, ... ν, il est clair, que $\frac{\varepsilon_\mu}{(2n+1)} = \frac{(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}$ a zéro pour limite; donc, selon ce qu'on a vu, R_μ sera une quantité finie, et par conséquent

$$R_0 - R_1 + R_2 - \ldots + (-1)^{\nu-1} R_{\nu-1} = \nu . R,$$

où R est également une quantité finie.

Considérons maintenant la somme

$$(-1)^\nu (R_\nu - R_{\nu+1} + R_{\nu+2} - \ldots + (-1)^{n-\nu-1} . R_{n-1}).$$

Si $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a pour limite une quantité différente de zéro, on a, comme on a vu:

$$R_\mu - R_{\mu+1} = v_\mu^1 - v_{\mu+1}^1;$$

si au contraire $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ a pour limite zéro, on a:

$$R_\mu = r_\mu + v_\mu^1,$$

or, si en même tems $\mu > \sqrt{n}$, il est clair qu'en vertu de la valeur de R_μ,

$$r_\mu = B_\mu - C_\mu;$$

or il est clair que B_μ et C_μ, tous deux, ont pour limites des quantités indépendantes de μ, donc en nommant ces limites B et C, on aura:

$$R_\mu = B - C + v_\mu,$$

et par suite, aussi dans ce cas,

$$R_\mu - R_{\mu+1} = v_\mu - v_{\mu+1}.$$

Donc comme dans le cas où $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1}$ aurait une limite différente de zéro pour toutes les valeurs de μ, on démontrera que

$$\frac{(-1)^\nu}{(2n+1)^2}(R_\nu - R_{\nu+1} + \ldots + (-1)^{n-\nu-1} R_{n-1}) = \frac{v}{(2n+1)}.$$

Maintenant en combinant les équations ci-dessus, on en tirera

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\frac{R_{\mu}}{(2n+1)^2}=\frac{1}{(2n+1)^2}.(\nu R)+\frac{v}{2n+1};$$

or $\frac{\nu}{2n+1}$ a zéro pour limite, donc

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\frac{R_{\mu}}{(2n+1)^2}=\frac{v}{2n+1}.$$

Donc cette formule a toujours lieu, et par conséquent la formule (137) deviendra:

$$144)\quad \sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\psi(m,\mu)-\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\theta(m,\mu)=\frac{v}{2n+1}.$$

Cela posé, il s'agit de mettre $\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\theta(m,\mu)$ sous la forme $P+\frac{v}{2n+1}$.

Or c'est ce qu'on peut faire comme il suit. On a:

$$145)\begin{cases}\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\theta(m,\mu)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\theta(m,\mu)-\sum_{n}^{\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\theta(m,\mu)\ \text{et}\\ \sum_{n}^{\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\theta(m,\mu)=(-1)^{n}(\theta(m,n)-\theta(m,n+1)+\theta(m,n+2)-\dots\text{etc.}).\end{cases}$$

Or d'après une formule connue on a:

$$\theta(m,n)-\theta(m,n+1)+\theta(m,n+2)-\dots$$
$$=\tfrac{1}{2}\,\theta(m,n)+A\frac{d\theta(m,n)}{dn}+B.\frac{d^2\theta(m,n)}{dn^2}+\dots,$$

où A, B... sont des nombres; or

$$\theta(m,n)=\frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(n+\frac{1}{2})\varpi i]^2},$$

donc en substituant

$$\theta(m,n)-\theta(m,n+1)+\dots=\frac{\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(n+\frac{1}{2})\varpi i]^2}+\frac{4A\alpha\varpi i.[(m+\frac{1}{2})\omega+(n+\frac{1}{2})\varpi i]}{(\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(n+\frac{1}{2})\varpi i]^2)^2}+\dots$$

De là il suit, que

$$\theta(m,n)-\theta(m,n+1)+\dots=\frac{\alpha}{\varpi^2.n^2}+\frac{v}{n^2}=\frac{v}{2n+1}.$$

Donc en vertu des équations (145).

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\theta(m,\mu)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\theta(m,\mu)+\frac{v}{2n+1},$$

et par conséquent

$$146)\quad \sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}\psi(m,\mu)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\theta(m,\mu)+\frac{v}{2n+1}.$$

26.

Ayant transformé de cette sorte la quantité $\sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}(-1)^{\mu}.\psi(m,\mu)$, on tire de l'équation (146):

$$147)\quad \sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}\psi(m,\mu)=\sum_0^{n-1}(-1)^m.\rho_m+\sum_0^{n-1}.\frac{v_m}{2n+1},$$

en faisant

$$148)\quad \rho_m=\sum_0^{\infty}{}_\mu(-1)^\mu.\theta(m,\mu);$$

or

$$\sum_0^{n-1}.\frac{v_m}{2n+1}=\frac{v_0+v_1+v_2\ldots v_{n-1}}{2n+1}=\frac{nv}{2n+1}=\frac{v}{2},$$

v ayant zéro pour limite. Donc l'équation (147) donnera, en faisant n infini:

$$149)\quad \lim.\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi(m,\mu)=\sum_0^{\infty}(-1)^m.\rho_m.$$

De même, si l'on fait, pour abréger:

$$150)\quad \begin{cases}\theta_1(m,\mu)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2},\\[2ex] \rho'_m=\displaystyle\sum_0^{\infty}{}_\mu(-1)^\mu.\theta_1(m,\mu),\end{cases}$$

on aura

$$151)\quad \lim.\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi_1(m,\mu)=\sum_0^{\infty}(-1)^m.\rho'_m$$

Ayant trouvé ces deux quantités dont l'expression de $\varphi\alpha$ est composée, on aura en substituant:

$$\varphi\alpha=-.\frac{i}{ec}\sum_0^{\infty}(-1)^m.\rho_m+\frac{i}{ec}.\sum_0^{\infty}(-1)^m.\rho'_m=\frac{i}{ec}.\sum_0^{\infty}(-1)^m(\rho'_m-\rho_m),$$

ou bien, en remettant les valeurs de ρ'_m et ρ_m,

152) $\varphi\alpha=$

$$\frac{i}{ec}.\sum_0^{\infty}{}_m(-1)^m\sum_0^{\infty}{}_\mu(-1)^\mu.\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}-\frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}\right)$$

Maintenant

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega\pm(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}=\frac{1}{\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega\mp(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}+\frac{1}{\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega\pm(\mu+\frac{1}{2})\varpi i},$$

donc

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}-\frac{2\alpha}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}$$
$$=+\frac{(2\mu+1)\varpi i}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\frac{(2\mu+1)\varpi i}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2},$$

donc l'expression de $\varphi\alpha$ deviendra sous une forme réelle:

153) $\varphi\alpha=$

$$\frac{1}{ec}.\sum_0^{\infty}{}_m(-1)^m.\sum_0^{\infty}{}_\mu(-1)^\mu.\left(\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}-\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right),$$

c'est-à-dire, on aura:

$$154)\quad \varphi\alpha = \frac{\varpi}{ec}(\delta_0 - \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 + \ldots + (-1)^m\delta_m - \ldots)$$
$$- \frac{\varpi}{ec}(\delta'_0 - \delta'_1 + \delta'_2 - \delta'_3 + \ldots + (-1)^m\delta'_m - \ldots)$$

où

$$155)\ \begin{cases} \delta_m = \dfrac{1}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2 + \frac{\varpi^2}{4}} - \dfrac{3}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2 + \frac{9\varpi^2}{4}} + \dfrac{5}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2 + \frac{25\varpi^2}{4}} - \ldots \\ \delta'_m = \dfrac{1}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2 + \frac{\varpi^2}{4}} - \dfrac{3}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2 + \frac{9\varpi^2}{4}} + \dfrac{5}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2 + \frac{25\omega^2}{4}} - \ldots \end{cases}$$

Si l'on commence la recherche de la limite de la fonction $\sum_0^{n-1}{}_m\sum_0^{n-1}{}_\mu(-1)^{m+\mu}.\psi(m,\mu)$ par celle de $\sum_0^{n-1}(-1)^m\psi(m,\mu)$ au lieu de celle de $\sum_0^{n-1}(-1)^\mu\psi(m,\mu)$, comme nous l'avons fait, on trouvera au lieu de la formule (153) la suivante

$$156)\quad \varphi\alpha =$$
$$\frac{1}{ec}.\sum_0^\infty{}_\mu(-1)^\mu.\sum_0^\infty{}_m(-1)^m.\left(\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$157)\quad \varphi\alpha = \frac{\varpi}{ec}(\varepsilon_0 - 3\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 - 7\varepsilon_3 + \ldots + (-1)^\mu.(2\mu+1)\varepsilon_\mu - \ldots)$$
$$- \frac{\varpi}{ec}(\varepsilon'_0 - 3\varepsilon'_1 + 5\varepsilon'_2 - 7\varepsilon'_3 + \ldots + (-1)^\mu.(2\mu+1)\varepsilon'_\mu - \ldots),$$

où

$$158)\ \begin{cases} \varepsilon_\mu = \dfrac{1}{\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \dfrac{1}{\left(\alpha-\frac{3\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} + \dfrac{1}{\left(\alpha-\frac{5\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \ldots \\ \varepsilon'_\mu = \dfrac{1}{\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \dfrac{1}{\left(\alpha+\frac{3\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} + \dfrac{1}{\left(\alpha+\frac{5\omega}{2}\right)^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \ldots \end{cases}$$

27.

Cherchons maintenant l'expression de $f\alpha$, au moyen de la deuxième des formules (126). En y faisant $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$ et ayant égard à la formule (131), on aura:

$$f(\alpha) = \frac{(-1)^n}{2n+1}\left\{\begin{aligned} & f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right) + \sum_1^n{}_m(-1)^m.\left[f\left(\frac{\alpha+m\omega}{2n+1}\right) + f\left(\frac{\alpha-m\omega}{2n+1}\right)\right] + \sum_1^n{}_\mu\left[f\left(\frac{\alpha+\mu\varpi i}{2n+1}\right) + f\left(\frac{\alpha-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right] \\ & + \sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^m\left[f\left(\frac{\alpha+m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right) + f\left(\frac{\alpha-m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right) + f\left(\frac{\alpha+m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right) + f\left(\frac{\alpha-m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right] \end{aligned}\right\}$$

En suppposant maintenant n infini, et remarquant qu'alors la limite de la quantité

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\left\{f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)+\sum_1^n{}_m(-1)^m.\left[f\left(\frac{\alpha+m\omega}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-m\omega}{2n+1}\right)\right]+\sum_1^n{}_\mu\left[f\left(\frac{\alpha+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]\right\}$$

devient égale à zéro, on aura:

$$159)\qquad f\alpha=\lim.(-1)^n\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^m.\psi(n-m,n-\mu)$$
$$+\lim.(-1)^n\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^m.\psi_1(n-m,n-\mu),$$

où l'on a fait pour abréger:

$$\psi(n-m,\ n-\mu)=\frac{1}{2n+1}\left[f\left(\frac{\alpha+m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right],$$
$$\psi_1(n-m,\ n-\mu)=\frac{1}{2n+1}\left[f\left(\frac{\alpha+m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right].$$

Maintenant on a:

$$f(\beta+\varepsilon)+f(\beta-\varepsilon)=\frac{2f\beta.f\varepsilon}{1+e^2c^2\varphi^2\varepsilon.\varphi^2\beta}=\frac{f\varepsilon}{e^2c^2\varphi^2\varepsilon}\cdot\frac{2f\beta}{\varphi^2\beta+\dfrac{1}{e^2c^2\varphi^2\varepsilon}}.$$

Soit

$$\varepsilon=\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1},$$

on aura:

$$\frac{1}{\varphi\varepsilon}=-iec.\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}i-\varepsilon\right)=-iec.\varphi\left(\frac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right),$$

$$\frac{f\varepsilon}{\varphi\varepsilon}=-\frac{i\sqrt{(e^2+c^2)}}{F\left(\varepsilon-\frac{\varpi}{2}i\right)}=-i\sqrt{(e^2+c^2)}.\frac{c}{\sqrt{(e^2+c^2)}}.F\left(\varepsilon-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)$$
$$=-ci.F.\left(\frac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right).$$

Donc on aura, en substituant et mettant m et μ respectivement au lieu de $n-m$ et $n-\mu$:

$$\psi(m,\mu)=-\frac{1}{e}\cdot\frac{2\varphi\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right).F\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right).f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{(2n+1)\left[\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)\right]}.$$

On aura la valeur de $\psi_1(m,\mu)$, en changeant seulement le signe de i. En faisant maintenant

$$\theta(m,\mu)=-\frac{(2m+1)\omega+(2\mu+1)\varpi i}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2}$$

et

$$\theta_1(m,\mu)=-\frac{(2m+1)\omega-(2\mu+1)\varpi i}{\alpha^2-[(m+\frac{1}{2})\omega-(\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2},$$

et cherchant ensuite la limite de la fonction

$$\sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}'_\mu (-1)^m . \psi(m, \mu),$$

de la même manière que précédemment, on trouvera:

$$\lim. \sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^m . \psi(m, \mu) = \frac{1}{e} . \sum_0^{\infty}{}_\mu \Big(\sum_0^{\infty}{}_m (-1)^m . \theta(m, \mu) \Big)$$

et

$$\lim. \sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^m . \psi_1(m, \mu) = \frac{1}{e} . \sum_0^{\infty}{}_\mu \Big(\sum_0^{\infty}{}_m (-1)^m . \theta_1(m, \mu) \Big);$$

donc en substituant dans (159), et remettant les valeurs de $\theta(m, \mu)$ et $\theta_1(m, \mu)$, on a:

160) $f\alpha =$

$$\frac{1}{e} . \sum_0^{\infty}{}_\mu \sum_0^{\infty}{}_m (-1)^m \left(\frac{(2m+1)\omega + (2\mu+1)\varpi i}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega + (\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2} + \frac{(2m+1)\omega - (2\mu+1)\varpi i}{\alpha^2 - [(m+\frac{1}{2})\omega - (\mu+\frac{1}{2})\varpi i]^2} \right).$$

La quantité renfermée entre les crochets peut aussi se mettre sous la forme:

$$\frac{2[\alpha - (m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha - (m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \frac{2[\alpha + (m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha + (m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2},$$

donc aussi:

161) $f\alpha =$

$$\frac{1}{e} . \sum_0^{\infty}{}_\mu \left(\sum_0^{\infty}{}_m (-1)^m . \frac{2[\alpha - (m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha - (m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \sum_0^{\infty}{}_m (-1)^m \frac{2[\alpha + (m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha + (m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} \right).$$

On aura de la même maniere:

162) $F(\alpha) =$

$$\frac{1}{c} . \sum_0^{\infty}{}_m \left(\sum_0^{\infty}{}_\mu (-1)^\mu . \frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha - (m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} + \sum_0^{\infty}{}_\mu (-1)^\mu . \frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha + (m+\frac{1}{2})\omega]^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} \right).$$

28.

Venons maintenant aux formules (130). Pour trouver la valeur du second membre, après avoir fait $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et supposé n infini, nous allons d'abord chercher la limite de l'expression suivante:

$$163) \quad t = \prod_1^{n}{}_m \prod_1^{n}{}_\mu \left\{ \frac{1 - \dfrac{\varphi^2\left(\dfrac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\dfrac{m\omega + \mu\varpi i + k}{2n+1}\right)}}{1 - \dfrac{\varphi^2\left(\dfrac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\dfrac{m\omega + \mu\varpi i + l}{2n+1}\right)}} \right\},$$

où k et l sont deux quantités indépendantes de n, m, μ.

En prenant le logarithme, et faisant pour abréger:

$$164)\quad \psi(m,\mu) = \log\left\{\frac{1-\dfrac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right)}}\right\},$$

on aura:

$$165)\qquad \log t = \sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu \cdot \psi(m,\mu).$$

Considérons d'abord l'expression $\sum_1^n{}_\mu \psi(m,\mu)$. Soit

$$166)\qquad \theta(m,\mu) = \log\left\{\frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}}\right\},$$

on aura:

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu) = \log\left\{\frac{1-\dfrac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}\cdot\frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}}{1-\dfrac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right)}}\right\}.$$

Cela posé, je dis que le second membre de cette équation est pour toute valeur de m et μ de la forme

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu) = \frac{v}{(2n+1)^2}.$$

Pour démontrer cela, il faut distinguer deux cas, si la limite de $\frac{\omega+\mu\varpi i}{2n+1}$ est une quantité différente de zéro, et si elle est égale à zéro.

a) Dans le premier cas on aura, en nommant a la limite dont il s'agit:

$$\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right) = \varphi^2 a + v,$$

$$\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right) = \varphi^2 a + v',$$

$$\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right) = \frac{\alpha^2}{(2n+1)^2} + \frac{v''}{(2n+1)^2},$$

donc:

$$1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}=1-\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2\varphi^2 a}+\frac{v}{(2n+1)^2},$$

$$1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right)}=1-\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2.\varphi^2 a}+\frac{v'}{(2n+1)^2}.$$

On a de même

$$1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}=1-\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)^2}=1-\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2 a^2}+\frac{v}{(2n+1)^2},$$

$$1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}=1-\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2 a^2}+\frac{v'}{(2n+1)^2}.$$

En substituant ces valeurs, l'expression de $\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)$ prendra la forme:

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\log\left\{\frac{1-\frac{v_1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{v'}{(2n+1)^2}}\cdot\frac{1-\frac{v_1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{v'_1}{(2n+1)^2}}\right\},$$

les quantités v, v', v_1, v'_1 ayant toutes zéro pour limite.

On a donc:

$$\log\left(1-\frac{v}{(2n+1)^2}\right)=\frac{v}{(2n+1)^2}\text{ etc.}$$

et par conséquent:

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{v}{(2n+1)^2}.$$

b) Si la limite de la quantité $\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}$ est égale à zéro, on aura:

$$\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)=\frac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}{(2n+1)^2}+A.\frac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^4}{(2n+1)^4}+\ldots,$$

$$\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}+A'.\frac{\alpha^4}{(2n+1)^4}+\ldots,$$

donc:

$$1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}=1-\frac{\alpha^2+A'.\frac{\alpha^4}{(2n+1)^2}+\ldots}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2+A.\frac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^4}{(2n+1)^2}}.$$

Si maintenant $m\omega+\mu\varpi i$ ne va pas indéfiniment en augmentant avec n, on aura:

$$1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+m\varpi i+k}{2n+1}\right)}=1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}+\frac{B}{(2n+1)^2},$$

de même:

$$1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right)}=1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}+\frac{C}{(2n+1)^2},$$

donc dans ce cas:

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\log\left\{\frac{1-\frac{B'}{(2n+1)^2}}{1-\frac{C'}{(2n+1)^2}}\right\},$$

B' et C' ayant des limites finies, ou bien:

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\frac{D}{(2n+1)^2},$$

la limite de D étant également une quantité finie.

Si au contraire la quantité $m\omega+\mu\varpi i$ augmente indéfiniment avec n, on a:

$$\frac{1-\frac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}}{1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}=1+\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}\cdot\left\{\frac{A-A'\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}{1+A\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)^2}\right\}$$

$$\times\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}};$$

or les quantités $\frac{1}{m\omega+\mu\varpi i+k}$, $\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}$ ont zéro pour limite; donc la quantité précédente sera de la forme:

$$1+\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}\cdot A'',$$

A'' ayant une quantité finie pour limite. En changeant k en l, et désignant la valeur correspondante de A'' par A''_1, la valeur de $\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)$ deviendra:

$$\psi(m,\mu)-\theta(m,\mu)=\log\left\{\frac{1+\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}A''}{1+\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}A''_1}\right\}=\frac{\alpha^2(A''-A''_1)}{(2n+1)^2}+\frac{v}{(2n+1)^2}.$$

Maintenant la limite de A'' est la même que celle de A; or il est clair que cette dernière limite est indépendante de k, m, μ (elle est en effet égale au coefficient de α^4 dans le développement de $\varphi^2\alpha$). Donc on aura:

$$A''=M+v,$$

et en changeant k en l

$$A''_1=M+v',$$

d'où $A'' - A''_1 = v - v' = v$. Donc $A'' - A''_1$ a zéro pour limite, et par conséquent on a:

$$\psi(m,\mu) - \theta(m,\mu) = \frac{v}{(2n+1)^2}.$$

Donc nous avons démontré, qu'en faisant

$$167) \qquad \psi(m,\mu) - \theta(m,\mu) = \frac{A_{m,\mu}}{(2n+1)^2},$$

la limite de $A_{m,\mu}$ sera égale à zéro toutes les fois que $m\omega + \mu\varpi i$ augmente indéfiniment avec n, et qu'elle sera égale à une quantité finie dans le cas contraire.

29.

Cela posé, considérons la quantité

$$\sum_1^n{}_\mu \psi(m,\mu).$$

En substituant la valeur de $\psi(m,\mu)$, il viendra:

$$168) \qquad \sum_1^n{}_\mu \psi(m,\mu) = \sum_1^n{}_\mu \theta(m,\mu) + \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sum_1^n{}_\mu (A_{m,\mu}).$$

Soit ν le plus grand nombre entier, contenu dans $\sqrt{n}$, on peut faire:

$$\sum_1^n{}_\mu A_{m,\mu} = A_{m,1} + A_{m,2} + \dots + A_{m,\nu}$$
$$+ A_{m,\nu+1} + A_{m,\nu+2} + \dots + A_{m,n}.$$

Or, d'après la nature des quantités $A_{m,\mu}$, la somme contenue dans la première ligne sera égale à $\nu . A_m$, et la seconde égale à $A'_m(n-\nu)$, où A_m est une quantité finie et A'_m une quantité, qui a zéro pour limite, donc:

$$\sum_1^n{}_\mu A_{m,\mu} = \nu . A_m + (n-\nu) A'_m = (2n+1) . B_m,$$

où

$$B_m = \frac{\nu}{2n+1} A_m + \frac{n-\nu}{2n+1} A'_m.$$

Donc la quantité B_m a zéro pour limite, en remarquant que ν ne surpasse pas $\sqrt{n}$.

Par là l'expression de $\sum_1^n{}_\mu \psi(m,\mu)$ se change en:

$$169) \qquad \sum_1^n{}_\mu \psi(m,\mu) = \sum_1^n{}_\mu \theta(m,\mu) + \frac{B_m}{2n+1}.$$

Pour avoir la limite de $\sum_1^n{}_\mu \theta(m,\mu)$, j'écris

$$\sum_1^n{}_\mu \theta(m\mu) = \sum_1^\infty{}_\mu \theta(m,\mu) - \sum_{n+1}^\infty{}_\mu \theta(m,\mu) = \sum_1^\infty{}_\mu \theta(m,\mu) - \sum_1^\infty{}_\mu \theta(m,\mu+n).$$

Or on peut trouver la valeur de $\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\theta(m,\mu+n)$ comme suit.

On a:

$$\theta(m,\mu+n)=\log\left\{\frac{1-\frac{\alpha^2}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+k]^2}}{1-\frac{\alpha^2}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+l]^2}}\right\}$$

$$=\alpha^2\left\{\frac{1}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+l]^2}-\frac{1}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+k]^2}\right\}$$

$$-\tfrac{1}{2}\alpha^4\left\{\frac{1}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+l]^4}-\frac{1}{[m\omega+(\mu+n)\varpi i+k]^4}\right\}$$

$$+\text{ etc.}$$

De là on tire:

$$\sum_{1}^{\mu}{}_{\mu}\theta(m,\mu+n)=\frac{\alpha^2}{n}\cdot\Sigma\frac{1}{n}\cdot\theta\left(\frac{\mu}{n}\right)-\frac{\alpha^4}{2n^3}\cdot\Sigma\frac{1}{n}\cdot\theta_1\left(\frac{\mu}{n}\right)+\dots,$$

où

$$\theta\left(\frac{\mu}{n}\right)=\frac{1}{\left(\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i+\frac{\mu}{n}\varpi i\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i+\frac{\mu}{n}\varpi i\right)^2},$$

$$\theta_1\left(\frac{\mu}{n}\right)=\frac{1}{\left(\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i+\frac{\mu}{n}\varpi i\right)^4}-\frac{1}{\left(\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i+\frac{\mu}{n}\varpi i\right)^4},$$

etc.

Or on sait que la limite de

$$\sum_{1}^{\mu}{}_{\mu}\frac{1}{n}\theta\left(\frac{\mu}{n}\right)\text{ est égale à }\int_0^x\theta(x)dx,$$

donc

$$\sum_{1}^{\mu}{}_{\mu}\frac{1}{n}\theta\left(\frac{\mu}{n}\right)=\int_0^x\theta(x)dx+v,$$

$$\sum_{1}^{\mu}{}_{\mu}\frac{1}{n}\theta_1\left(\frac{\mu}{n}\right)=\int_0^x\theta_1(x)dx+v_1,$$

etc.,

et par conséquent, en substituant:

$$\sum_{1}^{\mu}{}_{\mu}\theta(m,\mu+n)=\frac{\alpha^2}{n}\cdot\int_0^x\theta(x)dx-\frac{\alpha^4}{2n^3}\cdot\int_0^x\theta_1(x)dx+\dots+\frac{v\alpha^2}{n}-\frac{v_1\alpha^4}{2n^3}+\dots$$

or

$$\theta(x)=\frac{1}{\left(\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i+x\varpi i\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i+x\varpi i\right)^2}$$

etc.

donc on aura:

$$\int_0^x \theta(x)dx = \frac{1}{\varpi i}\cdot\left\{\frac{1}{\left(\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i+x\varpi i\right)} - \frac{1}{\left(\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i+x\varpi i\right)}\right\}$$

$$-\frac{1}{\varpi i}\cdot\left\{\frac{1}{\left(\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i\right)} - \frac{1}{\left(\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{\varpi i}\cdot\frac{k-l}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i+x\varpi i\right)\left(\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i+x\varpi i\right)}$$

$$-\frac{1}{\varpi i}\cdot\frac{k-l}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{m\omega+l}{n}+\varpi i\right)\left(\frac{m\omega+k}{n}+\varpi i\right)}.$$

La limite de cette expression de $\int_0^x \theta(x)dx$ est zéro pour une valeur quelconque de x. De même on trouvera que la limite de $\int_0^x \theta_1(x)dx$ est zéro, donc:

$$\Sigma_1^\mu{}_\mu \theta(m,\mu+n) = \frac{\alpha^2}{n}\cdot v - \frac{\alpha^4}{2n^3}\cdot v' + \frac{\alpha^6}{3n^5}\cdot v'' - \dots$$

$$= \frac{\alpha^2}{2n+1}\cdot\left(v - \frac{\alpha^2}{2n^2}v' + \frac{\alpha^4}{3n^4}v'' - \dots\right)\frac{2n+1}{n} = \frac{v}{2n+1},$$

donc aussi, en faisant $\mu = \infty$:

$$\Sigma_1^\infty{}_\mu \theta(m,\mu+n) = \frac{v}{2n+1},$$

d'où:

$$\Sigma_1^n{}_\mu \theta(m,\mu) = \Sigma_1^\infty{}_\mu \theta(m,\mu) - \frac{v}{2n+1}, \text{ et}$$

170) $$\Sigma_1^n{}_\mu \psi(m,\mu) = \Sigma_1^\infty{}_\mu \theta(m,\mu) + \frac{v_m}{2n+1},$$

v_m ayant zéro pour limite. De là on tire

$$\Sigma_1^n{}_m \Sigma_1^n{}_\mu \psi(m,\mu) = \Sigma_1^n{}_m\left(\Sigma_1^\infty{}_\mu \theta(m,\mu)\right) + \Sigma_1^n \frac{v_m}{2n+1}.$$

En prenant la limite des deux membres et remarquant que

$$\Sigma_1^n \frac{v_m}{2n+1} = \frac{v_1+v_2+\dots v_n}{2n+1} = v,$$

on aura:

171) $$\lim.\ \Sigma_1^n{}_m \Sigma_1^n{}_\mu \psi(m,\mu) = \Sigma_1^\infty{}_m\left(\Sigma_1^\infty{}_\mu \theta(m,\mu)\right).$$

En remettant les valeurs de $\psi(m,\mu)$ et $\theta(m,\mu)$, et passant des logarithmes aux nombres, on en tire:

$$172)\quad \lim. \prod_1^n {}_m \prod_1^n {}_\mu \left\{ \frac{1-\dfrac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}} \right\} = \prod_1^\infty {}_m \left\{ \prod_1^\infty {}_\mu \left\{ \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+l)^2}} \right\} \right\}.$$

Par une analyse toute semblable à la précédente, mais plus simple, on trouvera de même:

$$173)\quad \lim. \prod_1^n {}_m \left\{ \frac{1-\dfrac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+k}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+l}{2n+1}\right)}} \right\} = \prod_1^\infty {}_m \left\{ \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+k)^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+l)^2}} \right\},$$

$$174)\quad \lim. \prod_1^n {}_\mu \left\{ \frac{1-\dfrac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i+l}{2n+1}\right)}} \right\} = \prod_1^\infty {}_\mu \left\{ \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(\mu\varpi i+k)^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{(\mu\varpi i+l)^2}} \right\}.$$

30.

Maintenant rien n'est plus facile que de trouver les valeurs de $\varphi\alpha, f\alpha, F\alpha$. Considérons d'abord la première formule (130). On a:

$$e^2c^2\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right) = -\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i\right)}$$

$$= -\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)},$$

donc:

$$\overset{n}{\underset{1}{\Pi}}_m \overset{n}{\underset{1}{\Pi}}_\mu \left\{ \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\varphi^2\beta} \right\} = \frac{\overset{n}{\underset{1}{\Pi}}_m \overset{n}{\underset{1}{\Pi}}_\mu \left\{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}}{\overset{n}{\underset{1}{\Pi}}_m \overset{n}{\underset{1}{\Pi}}_\mu \left\{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}}$$

$$= \overset{n}{\underset{1}{\Pi}}_m \overset{n}{\underset{1}{\Pi}}_\mu \left\{ \frac{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\dfrac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1-\dfrac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left\{\dfrac{m\omega+\mu\varpi i-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi}{2}i}{2n+1}\right\}}} \right\}.$$

Cela posé, si l'on fait $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$ et qu'on suppose n infini, il viendra, en faisant usage des formules (172), (173), (174), et remarquant que la limite de $(2n+1)\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)$ est égale à α:

$$175)\qquad \varphi\alpha = \alpha \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_m \left(1-\frac{\alpha^2}{(m\omega)^2}\right) . \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_\mu \left(1+\frac{\alpha^2}{(\mu\varpi)^2}\right)$$

$$\times \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_m \left\{ \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_\mu \left\{ \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i)^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right\} . \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_\mu \left\{ \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega-\mu\varpi i)^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega-(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right\} \right\}.$$

Les deux formules (130′) donneront de la même manière, en faisant $\beta = \frac{\alpha}{2n+1}$, et remarquant, que $f(0) = 1$, $F(0) = 1$:

$$176)\qquad f\alpha = \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_m \left\{ \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_\mu \left\{ \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+\mu\varpi i]^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right\} \left\{ \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega-\mu\varpi i]^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega-(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right\} \right\}.$$

$$\times \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_m \left(1-\frac{\alpha^2}{(m+\frac{1}{2})^2\omega^2}\right),$$

$$177)\qquad F\alpha =$$

$$\overset{\infty}{\underset{0}{\Pi}}_\mu \left(1+\frac{\alpha^2}{(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right) . \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_m \left\{ \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_\mu \left\{ \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{[m\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right\} \left\{ \frac{1-\dfrac{\alpha^2}{[m\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}}{1-\dfrac{\alpha^2}{[(m-\frac{1}{2})\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i]^2}} \right\} \right\}.$$

On peut aussi donner une forme réelle aux expressions précédentes comme suit:

178) $$\varphi\alpha = \alpha\cdot\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_\mu\left(1+\frac{\alpha^2}{\mu^2\varpi^2}\right)\cdot\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left(1-\frac{\alpha^2}{m^2\omega^2}\right)$$
$$\times\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_\mu\frac{1+\frac{(\alpha+m\omega)^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\frac{[\alpha+[m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\cdot\frac{1+\frac{(\alpha-m\omega)^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\frac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\cdot\left\{\frac{1+\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\frac{m^2\omega^2}{\mu^2\varpi^2}}\right\}^2,$$

179) $$f\alpha = \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left(1-\frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right)$$
$$\times\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_\mu\frac{1+\frac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\frac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\cdot\frac{1+\frac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{\mu^2\varpi^2}}{1+\frac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\cdot\left\{\frac{1+\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\mu^2\varpi^2}}\right\}^2,$$

180) $$F\alpha = \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_\mu\left(1+\frac{\alpha^2}{(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right)$$
$$\times\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_\mu\frac{1+\frac{(\alpha+m\omega)^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\frac{[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\cdot\frac{1+\frac{(\alpha-m\omega)^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\frac{[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\cdot\left\{\frac{1+\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}{1+\frac{m^2\omega^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\varpi^2}}\right\}^2.$$

Ces transformations s'opèrent aisément au moyen de la formule:

$$\left(1-\frac{\alpha^2}{(a+bi)^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{(a-bi)^2}\right)=\left(1+\frac{\alpha}{a+bi}\right)\left(1+\frac{\alpha}{a-bi}\right)\left(1-\frac{\alpha}{a+bi}\right)\left(1-\frac{\alpha}{a-bi}\right)$$
$$=\frac{(\alpha+a)^2+b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{(\alpha-a)^2+b^2}{a^2+b^2}=\left(1+\frac{(\alpha+a)^2}{b^2}\right)\left(1+\frac{(\alpha-a)^2}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}.$$

31.

Dans ce qui précède nous sommes parvenus à deux espèces d'expressions des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$: les unes donnent ces fonctions décomposées en fractions partielles, dont la totalité forme des séries infinies doubles, les autres donnent ces mêmes fonctions décomposées en un nombre infini de facteurs, dont chacun est à son tour composé d'une infinité de facteurs.

Or on peut beaucoup simplifier les formules précédentes au moyen des fonctions exponentielles et circulaires. C'est ce que nous allons voir par ce qui suit.

Considérons d'abord les équations (178), (179), (180). En vertu des formules connues, on a:

$$\frac{\sin y}{y}=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_{\mu}\left(1-\frac{y^2}{\mu^2\pi^2}\right);\ \cos y=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_{\mu}\left(1-\frac{y^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\pi^2}\right);$$

donc

$$\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_{\mu}\frac{\left(1-\frac{z^2}{\mu^2\pi^2}\right)}{\left(1-\frac{y^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\mu^2}\right)}=\frac{\sin z}{z\cos y};\ \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_{\mu}\left\{\frac{1-\frac{z^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\pi^2}}{1-\frac{y^2}{(\mu-\frac{1}{2})^2\pi^2}}\right\}=\frac{\cos z}{\cos y}.$$

En vertu de cette formule il est clair que les expressions de $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$ peuvent être mises sous la forme:

$$\varphi\alpha=\frac{\varpi}{\pi}\cdot\frac{\sin\left(\alpha\frac{\pi}{\varpi}i\right)}{i}\cdot\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_{m}\left(1-\frac{\alpha^2}{m^2\omega^2}\right)$$

$$\times\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_{m}\left\{\frac{\sin(\alpha+m\omega)\frac{\pi}{\varpi}i.\sin(\alpha-m\omega)\frac{\pi}{\varpi}i.\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i.\cos[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i.\sin^2 m\omega\frac{\pi}{\varpi}i}\cdot\frac{\left(m\omega\frac{\pi}{\varpi}i\right)^2}{(\alpha+m\omega)(\alpha-m\omega).\frac{\pi^2}{\varpi^2}i^2}\right\},$$

$$f\alpha=\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_{m}\left(1-\frac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right)$$

$$\times\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_{m}\left(\operatorname{tang}[\alpha+(m-\tfrac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i.\operatorname{tang}[\alpha-(m-\tfrac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i.\cot^2(m-\tfrac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i.\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\alpha^2-(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}\right).$$

$$F\alpha=\cos\left(\alpha\frac{\pi}{\varpi}i\right).\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_{m}\left\{\frac{\cos(\alpha+m\omega)\frac{\pi}{\varpi}i.\cos(\alpha-m\omega)\frac{\pi}{\varpi}i.\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i.\cos[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i.\cos^2 m\omega.\frac{\pi}{\varpi}i}\right\}.$$

On trouvera des expressions réelles, en substituant au lieu des fonctions circulaires leurs expressions en fonctions exponentielles.

On a:

$$\sin(a-b).\sin(a+b)=\sin^2 a-\sin^2 b.$$
$$\cos(a+b).\cos(a-b)=\cos^2 a-\sin^2 b,$$

donc:

$$\frac{\sin(\alpha+m\omega)\frac{\pi}{\varpi}i.\sin(\alpha-m\omega)\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2 m\omega\frac{\pi}{\varpi}i}=-\left\{1-\frac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2 m\omega\frac{\pi}{\varpi}i}\right\},$$

$$\frac{\cos[\alpha+(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i.\cos[\alpha-(m-\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\omega}i}=1-\frac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i},$$

$$\operatorname{tang}\left(\alpha+(m-\tfrac{1}{2})\omega\right)\frac{\pi}{\varpi}i.\operatorname{tang}\left(\alpha-(m-\tfrac{1}{2})\omega\right)\frac{\pi}{\varpi}i.\cot^2(m-\tfrac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i$$

$$=-\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}}.$$

D'après cela et en remarquant que

$$\frac{m^2\omega^2}{\alpha^2-m^2\omega^2}=-\frac{1}{1-\dfrac{\alpha^2}{m^2\omega^2}} \text{ et}$$

$$\frac{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}{\alpha^2-(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}=-\frac{1}{1-\dfrac{\alpha^2}{(m-\frac{1}{2})^2\omega^2}},$$

il est clair qu'on aura:

$$181)\qquad \varphi\alpha=\frac{\pi}{\varpi}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{\varpi}\pi i\right)}{i}\cdot\Pi_m{}_1^\infty\cdot\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2 m\omega\frac{\pi}{\varpi}i}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}},$$

$$182)\qquad f\alpha=\Pi_m{}_0^\infty\cdot\frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\sin^2(m+\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha\frac{\pi}{\varpi}i}{\cos^2(m+\frac{1}{2})\omega\frac{\pi}{\varpi}i}},$$

$$183)\qquad F\alpha=\cos\left(\frac{\alpha}{\varpi}\pi i\right)\cdot\Pi_m{}_1^\infty\cdot\frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{\varpi}\pi i}{\cos^2 m\frac{\omega}{\varpi}\pi i}}{1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{\varpi}\pi i}{\cos^2(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi i}}.$$

En substituant au lieu des cosinus et sinus d'arcs imaginaires leurs valeurs en quantités exponentielles, ces formules deviendront:

$$184)\quad \varphi\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varpi}{\pi}\left(h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi} - h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}\right)\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_m\cdot\frac{1-\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{m\frac{\omega}{\varpi}\pi}-h^{-m\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2}{1+\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}-h^{-(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2},$$

$$185)\quad f\alpha = \prod_{0}^{\infty}{}_m\cdot\frac{1-\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}-h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2}{1+\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}-h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2}$$

$$186)\quad F\alpha = \frac{1}{2}\left(h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi} + h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}\right)\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_m\,\frac{1+\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{m\frac{\omega}{\varpi}\pi}+h^{-m\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2}{1+\left\{\dfrac{h^{\frac{\alpha}{\varpi}\pi}-h^{-\frac{\alpha}{\varpi}\pi}}{h^{(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}-h^{-(m-\frac{1}{2})\frac{\omega}{\varpi}\pi}}\right\}^2},$$

où h est le nombre 2,718281 ...

On peut encore transformer ces formules de la manière suivante:

Si l'on remplace α par αi, on aura les valeurs de $\varphi(\alpha i)$, $f(\alpha i)$, $F(\alpha i)$. En changeant maintenant c en $\dot{e}$ et $\dot{e}$ en c, les quantités:

$$\omega,\ \varpi,\ \varphi(\alpha i),\ f(\alpha i),\ F(\alpha i)$$

se changeront respectivement en:

$$\varpi,\ \omega,\ i\varphi\alpha,\ F\alpha,\ f\alpha,$$

donc les formules précédentes donneront:

$$187)\quad \varphi\alpha = \frac{\omega}{\pi}\cdot\sin\frac{\alpha\pi}{\omega}\cdot\prod_{1}^{\infty}{}_m\cdot\frac{1+\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(h^{\frac{m\varpi\pi}{\omega}}-h^{-\frac{m\varpi\pi}{\omega}}\right)^2}}{1-\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(h^{\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}+h^{-\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}\right)^2}},$$

$$188)\quad F\alpha = \overset{\infty}{\underset{0}{\Pi}}_m \frac{1 + \dfrac{4\sin\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(h^{\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}} - h^{-\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}\right)^2}}{1 - \dfrac{4\sin\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(h^{\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}} - h^{-\frac{(2m+1)\varpi\pi}{2\omega}}\right)^2}},$$

$$189)\quad f\alpha = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right).\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_m.\frac{1 - \dfrac{4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(h^{\frac{m\varpi\pi}{\omega}} + h^{-\frac{m\varpi\pi}{\omega}}\right)^2}}{1 - \dfrac{4\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{\omega}\right)}{\left(h^{\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}} + h^{-\frac{(2m-1)\varpi\pi}{2\omega}}\right)^2}}.$$

32.

Considérons maintenant les formules (160), (161), (162).

On a:

$$\overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu(-1)^\mu.\frac{(2\mu+1)\pi}{y^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\pi^2} = \frac{2}{h^y+h^{-y}},$$

donc, en faisant

$$y = (\alpha \pm (m+\tfrac{1}{2})\omega)\frac{\pi}{\varpi}:$$

$$\overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_\mu(-1)^\mu.\frac{(2\mu+1)\varpi}{[\alpha\pm(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} = \frac{2\pi}{\varpi}.\frac{1}{h^{[\alpha\pm(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}} + h^{-[\alpha\pm(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}}.$$

En vertu de cette formule il est aisé de voir que les expressions (153), (162) de $\varphi\alpha$ et $F\alpha$ deviendront:

$$190)\quad \varphi\alpha = \frac{2}{ec}.\frac{\pi}{\varpi}.\overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_m(-1)^m.\left\{\frac{1}{h^{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}} - \frac{1}{h^{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}}\right\},$$

$$191)\quad F\alpha = \frac{2}{c}.\frac{\pi}{\varpi}.\overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}_m\left\{\frac{1}{h^{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}} + \frac{1}{h^{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}+h^{-[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]\frac{\pi}{\varpi}}}\right\}.$$

Les expressions précédentes de $\varphi\alpha$, $F\alpha$, peuvent être mises encore sous beaucoup d'autres formes; je vais rappeller les plus remarquables. D'abord en réunissant les termes du second membre, on trouvera:

192) $$\varphi\alpha = \frac{2}{ec}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}{}_m(-1)^m\cdot\left\{\frac{\left(h^{\frac{\alpha\pi}{\varpi}} - h^{-\frac{\alpha\pi}{\varpi}}\right)\left(h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}} + h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}\right)}{h^{\frac{2\alpha\pi}{\varpi}} + h^{-\frac{2\alpha\pi}{\varpi}} + h^{(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}} + h^{-(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}}\right\},$$

183) $$F\alpha = \frac{2}{c}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}{}_m\cdot\left\{\frac{\left(h^{\frac{\alpha\pi}{\varpi}} + h^{-\frac{\alpha\pi}{\varpi}}\right)\left(h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}} + h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\omega\pi}{\varpi}}\right)}{h^{\frac{2\alpha\pi}{\varpi}} + h^{-\frac{2\alpha\pi}{\varpi}} + h^{(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}} + h^{-(2m+1)\frac{\omega\pi}{\varpi}}}\right\}.$$

Si, pour abréger, on suppose:

194) $$h^{\frac{\alpha\pi}{\varpi}} = \varepsilon \text{ et } h^{\frac{\omega\pi}{\varpi}} = r^2,$$

ces formules, en développant le second membre, deviendront:

195) $$\varphi\alpha = \frac{2}{ec}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot\left\{\frac{r - \frac{1}{r}}{r^2+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^2}} - \frac{r^3 - \frac{1}{r^3}}{r^6+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^6}} + \frac{r^5 - \frac{1}{r^5}}{r^{10}+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^{10}}} - \ldots\right\},$$

196) $$F\alpha = \frac{2}{c}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\cdot\left\{\frac{r + \frac{1}{r}}{r^2+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^2}} + \frac{r^3 + \frac{1}{r^3}}{r^6+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^6}} + \frac{r^5 + \frac{1}{r^5}}{r^{10}+\varepsilon^2+\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{1}{r^{10}}} - \ldots\right\}.$$

En mettant αi au lieu de α dans les formules (192), (193), changeant ensuite c en e et e en c, et remarquant que les quantités

$$\omega,\ \varpi,\ \varphi(\alpha i),\ F(\alpha i),\ h^{\alpha i\frac{\pi}{\varpi}} - h^{-\alpha i\frac{\pi}{\varpi}},\ h^{\alpha i\frac{\pi}{\varpi}} + h^{-\alpha i\frac{\pi}{\varpi}},$$

se changeront respectivement en:

$$\varpi,\ \omega,\ i\varphi(\alpha),\ f\alpha,\ 2i.\sin\alpha\frac{\pi}{\omega},\ \ 2\cos\alpha\frac{\pi}{\omega},$$

il viendra:

197) $$\varphi\alpha = \frac{4}{ec}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}{}_m(-1)^m\cdot\left\{\frac{\sin\frac{\alpha\pi}{\omega}\cdot\left(h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}} - h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}\right)}{h^{(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}} + 2\cos 2\alpha\frac{\pi}{\omega} + h^{-(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}}\right\},$$

198) $$f\alpha = \frac{4}{e}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\overset{\infty}{\underset{0}{\Sigma}}{}_m\cdot\left\{\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{\omega}\cdot\left(h^{(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}} + h^{-(m+\frac{1}{2})\frac{\varpi\pi}{\omega}}\right)}{h^{(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}} + 2\cos 2\alpha\frac{\pi}{\omega} + h^{-(2m+1)\frac{\varpi\pi}{\omega}}}\right\}.$$

En faisant pour abréger

199) $$h^{\frac{\varpi\pi}{2\omega}} = \varrho,$$

et développant, on obtiendra:

$$200)\quad \varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=$$

$$\frac{4}{ec}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right).\left\{\frac{\rho-\frac{1}{\rho}}{\rho^2+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\rho^2}}-\frac{\rho^3-\frac{1}{\rho^3}}{\rho^6+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\rho^6}}+\frac{\rho^5-\frac{1}{\rho^5}}{\rho^{10}+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\rho^{10}}}-\ldots\right\},$$

$$201)\quad f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=$$

$$\frac{4}{e}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right).\left\{\frac{\rho+\frac{1}{\rho}}{\rho^2+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\rho^2}}+\frac{\rho^3+\frac{1}{\rho^3}}{\rho^6+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\rho^6}}+\frac{\rho^5+\frac{1}{\rho^5}}{\rho^{10}+2\cos(\alpha\pi)+\frac{1}{\rho^{10}}}+\ldots\right\}.$$

En substituant dans les formules (190), (191) au lieu de $h^{\alpha\frac{\pi}{\varpi}}$ et $h^{\frac{\omega\pi}{2\varpi}}$ leurs valeurs ε et r, il viendra:

$$202)\ \varphi\alpha=\frac{2}{ec}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\sum_0^\infty{}_m(-1)^m\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon.r^{-(2m+1)}+\varepsilon^{-1}.r^{2m+1}}-\frac{1}{\varepsilon.r^{2m+1}+\varepsilon^{-1}.r^{-(2m+1)}}\right),$$

$$203)\ F\alpha=\frac{2}{c}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\sum_0^\infty{}_m\left(\frac{1}{\varepsilon.r^{-2m-1}+\varepsilon^{-1}.r^{2m+1}}+\frac{1}{\varepsilon.r^{2m+1}+\varepsilon^{-1}.r^{-2m-1}}\right).$$

En supposant maintenant $\alpha<\frac{\omega}{2}$, on aura:

$$\frac{1}{\varepsilon.r^{-2m-1}+\varepsilon^{-1}.r^{2m+1}}=\frac{\varepsilon.r^{-2m-1}}{1+\varepsilon^2.r^{-4m-2}}=\varepsilon.r^{-2m-1}-\varepsilon^3.r^{-6m-3}+\varepsilon^5.r^{-10m-5}-\ldots,$$

$$\frac{1}{\varepsilon.r^{2m+1}+\varepsilon^{-1}.r^{-2m-1}}=\frac{\varepsilon^{-1}.r^{-2m-1}}{1+\varepsilon^{-2}.r^{-4m-2}}=\varepsilon^{-1}.r^{-2m-1}-\varepsilon^{-3}.r^{-6m-3}+\varepsilon^{-5}.r^{-10m-5}-\ldots,$$

donc

$$\varphi\alpha=\frac{2}{ec}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\left(\sum_0^\infty{}_m(-1)^m((\varepsilon-\varepsilon^{-1}).r^{-2m-1}-(\varepsilon^3-\varepsilon^{-3}).r^{-6m-3}+(\varepsilon^5-\varepsilon^{-5})r^{-10m-5}-\ldots)\right)$$

$$=\frac{2}{ec}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\left((\varepsilon-\varepsilon^{-1}).\sum_0^\infty{}_m(-1)^m.r^{-2m-1}-(\varepsilon^3-\varepsilon^{-3}).\sum_0^\infty{}_m(-1)^m.r^{-6m-3}+\ldots\right).$$

Or

$$\sum_0^\infty{}_m(-1)^m.r^{-2m-1}=r^{-1}-r^{-3}+r^{-5}-\ldots=\frac{r^{-1}}{1+r^{-2}}=\frac{r}{r^2+1},$$

$$\sum_0^\infty{}_m(-1)^m.r^{-6m-3}=r^{-3}-r^{-9}+r^{-15}-\ldots=\frac{r^{-3}}{1+r^{-6}}=\frac{r^3}{r^6+1},$$

etc., donc:

$$204)\quad \varphi\alpha=\frac{2}{ec}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon^{-1}}{r+r^{-1}}-\frac{\varepsilon^3-\varepsilon^{-3}}{r^3+r^{-3}}+\frac{\varepsilon^5-\varepsilon^{-5}}{r^5+r^{-5}}-\ldots\right).$$

De la même manière on trouvera:

$$205)\quad F\alpha=\frac{2}{c}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\left(\frac{\varepsilon+\varepsilon^{-1}}{r-r^{-1}}-\frac{\varepsilon^3+\varepsilon^{-3}}{r^3-r^{-3}}+\frac{\varepsilon^5+\varepsilon^{-5}}{r^5-r^{-5}}-\ldots\right).$$

En mettant $\alpha\frac{\varpi}{2}i$ au lieu de α, et changeant ensuite e en c et c en e,

$$\omega,\ \varpi,\ \varphi\left(\alpha\frac{\varpi}{2}i\right), F\left(\alpha\frac{\varpi}{2}i\right),\ r,\ \varepsilon^{m}+\varepsilon^{-m},\ \varepsilon^{m}-\varepsilon^{-m}$$

se changent en:

$$\varpi,\ \omega,\ i\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right), f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right), \rho,\ 2\cos\left(m\alpha\frac{\pi}{2}\right),\ 2i\sin\left(m\alpha\frac{\pi}{2}\right);$$

donc

$$206)\quad \varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4}{ec}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\left\{\frac{\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\rho+\frac{1}{\rho}}-\frac{\sin\left(3\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\rho^3+\frac{1}{\rho^3}}+\frac{\sin\left(5\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\rho^5+\frac{1}{\rho^5}}-\dots\right\},$$

$$207)\quad f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4}{e}\cdot\frac{\pi}{\omega}\cdot\left\{\frac{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\rho-\frac{1}{\rho}}-\frac{\cos\left(3\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\rho^3-\frac{1}{\rho^3}}+\frac{\cos\left(5\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\rho^5-\frac{1}{\rho^5}}-\dots\right\}.$$

Ces quatre dernières formules offrent d'expressions très simples des fonctions $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$. Par les différentiations et intégrations on peut en déduire une foule d'autres plus ou moins remarquables.

33.

Dans le cas, $e=c$, les formules précédentes prennent une forme plus simple, à cause de la relation $\omega=\varpi$, qui a lieu dans ce cas. Soit pour plus de simplicité $e=c=1$. On a:

$$r=h^{\frac{\omega\pi}{2\varpi}}=h^{\frac{\pi}{2}},\quad \rho=h^{\frac{\varpi\pi}{2\omega}}=h^{\frac{\pi}{2}},$$

donc en substituant, et faisant dans (204), (205) $\alpha=\alpha\frac{\varpi}{2}$, il vient:

$$\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=2\,\frac{\pi}{\omega}\left\{\frac{h^{\frac{\alpha\pi}{2}}-h^{-\frac{\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{\pi}{2}}+h^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{h^{\frac{3\alpha\pi}{2}}-h^{-\frac{3\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{3\pi}{2}}+h^{-\frac{3\pi}{2}}}+\frac{h^{\frac{5\alpha\pi}{2}}-h^{-\frac{5\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{5\pi}{2}}+h^{-\frac{5\pi}{2}}}-\dots\right\},$$

$$F\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=2\,\frac{\pi}{\omega}\left\{\frac{h^{\frac{\alpha\pi}{2}}+h^{-\frac{\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{\pi}{2}}-h^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{h^{\frac{3\alpha\pi}{2}}+h^{-\frac{3\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{3\pi}{2}}-h^{-\frac{3\pi}{2}}}+\frac{h^{\frac{5\alpha\pi}{2}}+h^{-\frac{5\alpha\pi}{2}}}{h^{\frac{5\pi}{2}}-h^{-\frac{5\pi}{2}}}-\dots\right\},$$

$$\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4\pi}{\omega}\left\{\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{1+h^{\pi}}-\sin\left(3\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{h^{3\frac{\pi}{2}}}{1+h^{3\pi}}+\sin\left(5\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{h^{5\frac{\pi}{2}}}{1+h^{5\pi}}-\dots\right\},$$

$$f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)=\frac{4\pi}{\omega}\left\{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{h^{\pi}-1}-\cos\left(3\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{h^{3\frac{\pi}{2}}}{h^{3\pi}-1}+\cos\left(5\alpha\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{h^{5\frac{\pi}{2}}}{h^{5\pi}-1}-\dots\right\}.$$

Les fonctions φ, f, F sont déterminées par les équations

$$\alpha.\frac{\omega}{2}=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}};\ \frac{\omega}{2}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}};$$

$$x=\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right);\ \sqrt{(1-x^2)}=f\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right);\ \sqrt{(1+x^2)}=F\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right).$$

Si dans les deux dernières formules on fait $\alpha=0$, et qu'on remarque, qu'alors la valeur de $\frac{\varphi\left(\alpha\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}$ est $=\frac{\omega}{\pi}$, et celle de $\frac{\sin\left(m\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}=m$, on trouvera:

$$\frac{\omega}{2}=2\pi.\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{h^{\pi}-1}-\frac{h^{\frac{3\pi}{2}}}{h^{3\pi}-1}+\frac{h^{\frac{5\pi}{2}}}{h^{5\pi}-1}-\dots\right\}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

$$\frac{\omega^2}{4}=\pi^2.\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}}}{h^{\pi}+1}-3.\frac{h^{\frac{3\pi}{2}}}{h^{3\pi}+1}+5.\frac{h^{\frac{5\pi}{2}}}{h^{5\pi}+1}-\dots\right\}=\left(\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\right)^2.$$

§. VIII.

Expression algébrique de la fonction $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ dans le le cas où $e=c=1$. Application à la lemniscate.

34.

Dans le cinquième paragraphe nous avons traité l'équation $P_n=0$, d'où dépend la détermination des fonctions $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$. Cette èquation, prise dans toute sa généralité, ne parait guère résoluble algébriquement pour des valeurs quelconques de e et c; mais néanmoins il y a des cas particuliers, où on peut la résoudre complètement, et par suite obtenir des expressions algébriques des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ en fonctions de e et c. C'est ce qui arrive toujours, si $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ peut être exprimé rationnellement par $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et des quantités connues, ce qui a lieu pour une infinité de valeurs de $\frac{c}{e}$. Dans tous ces cas l'équation $P_n=0$ peut être résolue par une seule et même méthode uniforme, qui est applicable à une infinité d'autres équations de tous les degrés. J'éxposerai cette méthode dans un mémoire séparé, et je me contenterai pour le moment à considérer le cas le plus simple, et qui résulte de la supposition $e=c=1$ et $n=4\nu+1$. Dans ce cas on aura

$$208)\quad \begin{cases} \alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \text{ où } x = \varphi\alpha, \\ f\alpha = \sqrt{(1-\varphi^2\alpha)},\ F\alpha = \sqrt{(1+\varphi^2\alpha)}. \end{cases}$$

De même

$$209)\qquad \varphi(\alpha i) = i.\varphi\alpha,$$

ce qui se fait voir, en mettant xi au lieu de x. Cette formule donne ensuite:

$$210)\qquad f(\alpha i) = F\alpha;\ F(\alpha i) = f\alpha.$$

Les deux quantités e et c étant égales entre elles, il est clair qu'il en sera de même des deux quantités que nous avons désignées par ω et ϖ. En effet on aura

$$211)\qquad \frac{\omega}{2} = \frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

35.

En posant dans les formules (10) βi au lieu de β, on en tirera, en ayant égard aux équations (209) et (210):

$$212)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha+\beta i) = \frac{\varphi\alpha.f\beta.F\beta + i.\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{1-\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}, \\ f(\alpha+\beta i) = \frac{f\alpha.F\beta - i.\varphi\alpha.\varphi\beta.F\alpha.f\beta}{1-\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}, \\ F(\alpha+\beta i) = \frac{F\alpha.f\beta + i.\varphi\alpha.\varphi\beta.f\alpha.F\beta}{1-\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}. \end{cases}$$

Donc, pour trouver les fonctions φ, f, F pour une valeur quelconque imaginaire de la variable, il suffira d'en connaître les valeurs pour des valeurs réelles.

En supposant $\alpha = m\delta$, $\beta = \mu\delta$, on voit que $\varphi(m+\mu i)\delta$, $f(m+\mu i)\delta$, $F(m+\mu i)\delta$ pourront être exprimés rationnellement par les six fonctions suivantes:

$$\varphi(m\delta),\ \varphi(\mu\delta),\ f(m\delta),$$
$$f(\mu\delta),\ F(m\delta),\ F(\mu\delta),$$

et par suite aussi par des fonctions rationnelles des trois fonctions $\varphi\delta$, $f\delta$, $F\delta$, si m et μ sont des nombres entiers.

En suivant ce développement, on voit également et sans peine que dans le cas, où $m+\mu$ est un nombre impair, on aura:

$$\varphi(m+\mu i)\delta = \varphi(\delta).T,$$

où T est une fonction rationnelle de $(\varphi\delta)^2$, $(f\delta)^2$, $(F\delta)^2$, c'est-à-dire de $(\varphi\delta)^2$.

Donc en faisant $\varphi\delta = x$, on aura

$$\varphi(m+\mu i)\delta = x.\psi(x^2).$$

En changeant δ en δi, $\varphi\delta$ se changera en $\varphi(\delta i) = i\varphi(\delta) = ix$, et la fonction $\varphi(m+\mu i)\delta$ en $i\varphi(m+\mu i)\delta$; donc:

$$\varphi(m+\mu i)\delta = x\,.\,\psi(-x^2);$$

par conséquent on doit avoir $\psi(-x^2) = \psi(x^2)$; ce qui fait voir que la fonction $\psi(x^2)$ ne contient que des puissances de la forme x^{4n}. Donc on aura

$$213)\qquad \varphi(m+\mu i)\delta = x\,.\,T,$$

où T est une fonction rationnelle de x^4.

Cherchons p. ex. l'expression de $\varphi(2+i)\delta$ en x.

On a d'après les formules (212), en faisant $\alpha = 2\delta$ et $\beta = \delta$:

$$\varphi(2+i)\delta = \frac{\varphi 2\delta\,.\,f\delta\,.\,F\delta + i\varphi\delta\,.\,f2\delta\,.\,F2\delta}{1-[\varphi(2\delta)]^2\,.\,\varphi^2\delta}.$$

Or (10) donne:

$$\varphi(2\delta) = \frac{2\varphi\delta\,.\,f\delta\,.\,F\delta}{1+(\varphi\delta)^4};\ f(2\delta) = \frac{(f\delta)^2-(\varphi\delta)^2\,.\,(F\delta)^2}{1+(\varphi\delta)^4};$$

$$F(2\delta) = \frac{(F\delta)^2+(\varphi\delta)^2\,.\,(f\delta)^2}{1+(\varphi\delta)^4};$$

c'est-à-dire, en remarquant que $\varphi\delta = x$, $f\delta = \sqrt{(1-x^2)}$ et $F\delta = \sqrt{(1+x^2)}$,

$$\varphi(2\delta) = \frac{2x\,.\,\sqrt{(1-x^4)}}{1+x^4};\ f(2\delta) = \frac{1-2x^2-x^4}{1+x^4};\ F(2\delta) = \frac{1+2x^2-x^4}{1+x^4}.$$

Substituant ces valeurs et réduisant, il viendra:

$$215)\qquad \varphi(2+i)\delta = x\,.\,\frac{2-2x^8+i(1-6x^4+x^8)}{1-2x^4+5x^8} = xi\,.\,\frac{1-2i-x^4}{1-(1-2i)x^4}.$$

Expression algébrique de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$.

36.

On peut, comme on sait, décomposer le nombre $4\nu+1$ en deux carrés. Donc on peut supposer

$$\alpha^2+\beta^2 = 4\nu+1 = (\alpha+\beta i)\,(\alpha-\beta i).$$

Nous chercherons d'abord la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$; car celle-ci étant trouvée, on en tirera facilement la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$.

La somme des deux carrés α^2 et β^2 étant impaire, l'un des nombres α et β sera pair et l'autre impair. Donc la somme $\alpha+\beta$ est impaire. Donc en vertu de (213), on aura

$$216)\qquad \varphi(\alpha+\beta i)\delta = x\,.\,\frac{T}{S},$$

où T et S sont des fonctions entières de $x^4 = (\varphi\delta)^4$.

En supposant $\delta = \frac{\omega}{\alpha+\beta i}$, le premier membre de (216) se réduit à zéro,

et par conséquent $x = \varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ sera une racine de l'équation

217) $$T = 0.$$

Donc on aura la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ au moyen de la résolution de cette équation.

D'abord on peut trouver toutes les racines de l'équation $T = 0$ à l'aide de la fonction φ de la manière suivante.

Si $T = 0$, on doit avoir

$$\varphi(\alpha + \beta i)\delta = 0,$$

d'où l'on tire, en vertu de (27):

$$(\alpha + \beta i)\delta = m\omega + \mu\varpi i = (m + \mu i)\omega,$$

et de là

$$\delta = \frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega$$

et

218) $$x = \varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega\right).$$

Dans cette expression sont conséquemment contenues toutes les racines de l'équation $T = 0$. On les trouvera en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Or je dis que les valeurs de x qui sont différentes entre elles, peuvent être représentées par la formule

218') $$x = \varphi\left(\frac{\rho\omega}{\alpha+\beta i}\right),$$

où ϱ a toutes les valeurs entières depuis $-\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ jusqu'à $+\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$.

Pour démontrer cela, soient λ et λ' deux nombres entiers qui satisfont à l'équation indéterminée:

219) $$\beta.\lambda - \alpha.\lambda' = -1;$$

soit de plus t un nombre entier indéterminé, et faisons

220) $$k = \mu\lambda + t\alpha, \quad k' = -\mu\lambda' - t\beta;$$

on en déduira sans peine

$$\mu + \beta k + \alpha k' = 0,$$

et si l'on fait

$$\varrho = m + \alpha k - \beta k',$$

on vérifiera aisément l'équation

$$\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i} = \frac{\rho}{\alpha+\beta i} - k - k'i.$$

De là on tire

$$\varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega\right)=\varphi\left(\frac{\rho\omega}{\alpha+\beta i}-k\omega-k'\omega i\right)$$

or suivant (22) le second membre se réduit à

$$(-1)^{-k-k'}.\varphi\left(\frac{\rho\omega}{\alpha+\beta i}\right);$$

donc

$$\varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega\right)=(-1)^{-k-k'}.\varphi\left(\frac{\rho\omega}{\alpha+\beta i}\right)=\varphi\left(\frac{\pm\rho\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

Maintenant l'expression de ϱ deviendra, en y substituant les valeurs de k et k':

$$\varrho=m+\mu(\lambda\alpha+\lambda'\beta)+t.(\alpha^2+\beta^2),$$

d'où l'on voit qu'on peut prendre t tel que la valeur de ϱ, positive ou négative, soit inférieure à $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$. Donc etc.

Toutes les racines de l'équation $T=0$ seront représentées par la formule (218'); or toutes ces racines sont différentes entre elles. En effet si l'on avait p. ex.

$$\varphi\left(\frac{\rho\omega}{\alpha+\beta i}\right)=\varphi\left(\frac{\rho'\omega}{\alpha+\beta i}\right),$$

on aurait selon (31), (en remarquant que $\varpi=\omega$)

$$\frac{\rho\omega}{\alpha+\beta i}=(-1)^{m+n}.\frac{\rho'\omega}{\alpha+\beta i}+(m+ni)\omega,$$

d'où l'on tire:

$$\alpha n+\beta m=0;\ \varrho=(-1)^{m+n}.\varrho'+\alpha m-\beta n.$$

La première de ces équations donne $n=-\beta t$; $m=\alpha t$, où t est un entier indéterminé. En vertu de ces relations, l'expression de ϱ deviendrait:

$$\varrho=(-1)^{m+n}.\varrho'+(\alpha^2+\beta^2).t,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\rho\pm\rho'}{\alpha^2+\beta^2}=t,$$

ce qui est impossible, en remarquant que ϱ, ϱ' sont tous deux inférieurs à $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$.

Donc les racines différentes entre elles de l'équation $T=0$ sont au nombre de $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$. Il faut voir encore, si l'équation en question a des racines égales. En différentiant (216) on en tirera, en remarquant que $d\varphi\alpha=d\alpha.f\alpha.F\alpha$:

$$(\alpha+\beta i).f(\alpha+\beta i)\delta.F(\alpha+\beta i)\delta.S+\left(\frac{dS}{d\delta}\right).\varphi(\alpha+\beta i)\delta$$
$$=x.\frac{dT}{dx}.f\delta.F\delta+T.f\delta.F\delta.$$

Si maintenant T, a des facteurs égaux, il faut que T et $\frac{dT}{dx}$ soient égaux à zéro en même temps; donc l'équation précédente donnera

$$S.f(\alpha+\beta i)\delta.F(\alpha+\beta i)\delta=0;$$

or on a $\varphi(\alpha+\beta i)\delta=0$, donc $f(\alpha+\beta i)\delta=\pm 1=F(\alpha+\beta i)\delta$, et par conséquent

$$S=0,$$

ce qui est impossible, car nous supposons, ce qui est permis, que T et S n'aient point de facteurs communs. Par là on voit que l'équation

$$T=0$$

est du degré $\alpha^2+\beta^2-1$ par rapport à x, et aura pour racines les quantités:

$$\pm\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right), \pm\varphi\left(\frac{2\omega}{\alpha+\beta i}\right)\dots\pm\varphi\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}\cdot\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

En faisant $x^2=r$, on aura une équation

219) $$R=0$$

du degré $\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}=2\nu$, et dont les racines seront

220) $$\varphi^2(\delta),\ \varphi^2(2\delta),\ \varphi^2(3\delta)\dots\varphi^2(2\nu\delta),$$

où pour abréger on a supposé $\delta=\frac{\omega}{\alpha+\beta i}$.

Celà posé, on peut aisément résoudre l'équation $R=0$, à l'aide de la méthode de *M. Gauss*.

Soit ε une racine primitive de $\alpha^2+\beta^2$, je dis qu'on peut exprimer les racines comme il suit:

221) $$\varphi^2(\delta),\ \varphi^2(\varepsilon\delta)\ \varphi^2(\varepsilon^2\delta),\ \varphi^2(\varepsilon^3\delta)\dots\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}.\delta).$$

En effet, en faisant

222) $$\varepsilon^m=\pm a_m+t(\alpha^2+\beta^2),$$

où a_m est moindre que $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$, on aura:

$$\varphi(\varepsilon^m\delta)=\varphi\left(\pm a_m\delta+\frac{t(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha+\beta i}\omega\right)=\varphi(\pm a_m\delta+t(\alpha-\beta i)\omega),$$

c'est-à-dire, en vertu de (22):

$$\varphi(\varepsilon^m\delta)=\pm\varphi(a_m\delta),$$

et par suite:

$$\varphi^2(\varepsilon^m\delta)=\varphi^2(a_m\delta).$$

Je dis maintenant que tous les nombres

$$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\dots a_{2\nu-1}$$

sont inégaux entre eux. En effet soit p. ex. $a_m=a_n$, on aura

223) $$\varepsilon^n = \pm a_m + t'(\alpha^2 + \beta^2).$$

Des deux équations (222) et (223) on tire, en éliminant a_m,

$$\frac{\varepsilon^m \pm \varepsilon^n}{\alpha^2 + \beta^2} = \text{à un nombre entier.}$$

Donc en multipliant par $\varepsilon^m \mp \varepsilon^n$; on trouve que $\frac{\varepsilon^{2m} - \varepsilon^{2n}}{\alpha^2+\beta^2}$ est entier, et par suite $\frac{\varepsilon^{2m-2n}-1}{\alpha^2+\beta^2}$, ce qui est impossible, car ε est la racine primitive de $\alpha^2 + \beta^2$ et $2m - 2n$ est moindre que $\alpha^2 + \beta^2 - 1$.

Dons les 2ν nombres 1, a, etc. sont différents entre eux et par conséquent, pris dans un ordre différent, ils sont les mêmes que les suivants:

$$1, 2, 3, 4 \ldots 2\nu - 1.$$

On voit par la formule $\varphi^2(\varepsilon^m\delta) = \varphi^2(a_m\delta)$, que les quantités (220) et (221) coïncident, mais dans un ordre différent.

Maintenant on pourra réso udre l'équation $R = 0$ parfaitement de la même manière que l'équation (106).

On trouvera (116)

224) $$\varphi^2(\varepsilon^m\delta) = \frac{1}{2\nu}\cdot\left(+A + \theta^{-m}.v^{\frac{1}{2\nu}} + s_2\theta^{-2m}.v^{\frac{2}{2\nu}} + \ldots + s_{2\nu-1}\theta^{-(2\nu-1)m}.v^{\frac{2\nu-1}{2\nu}}\right),$$

où θ est une racine imaginaire de l'équation $\theta^{2\nu} - 1 = 0$, et $v, s_2, s_3 \ldots s_{2\nu-1}$ seront déterminés par les expressions:

$$v = (\varphi^2(\delta) + \theta.\varphi^2(\varepsilon\delta) + \theta^2.\varphi^2(\varepsilon^2\delta) + \ldots + \theta^{2\nu-1}.\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta))^{2\nu},$$

$$s_k = \frac{\varphi^2(\delta) + \theta^k.\varphi^2(\varepsilon\delta) + \theta^{2k}.\varphi^2(\varepsilon^2\delta) + \ldots + \theta^{(2\nu-1)k}.\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}.\delta)}{[\varphi^2(\delta) + \theta.\varphi^2(\varepsilon\delta) + \theta^2\varphi^2(\varepsilon^2\delta) + \ldots + \theta^{2\nu-1}.\varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta)]^k}.$$

$$A = \varphi^2(\delta) + \varphi^2(\varepsilon\delta) + \varphi^2(\varepsilon^2\delta) + \ldots + \varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta),$$

qui par le procédé pag. 183, 184, 185 peuvent être exprimées *rationnellement* par les coefficiens de l'équation $R = 0$, qui seront de la forme $A + Bi$, où A et B sont des nombres rationnels. Donc la formule (224) donne l'expression algébrique de toutes les racines de l'équation $R = 0$, et par conséquent les valeurs des fonctions

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right), \varphi\left(\frac{2\omega}{\alpha+\beta i}\right), \ldots \varphi\left(\frac{(2\nu-1)\omega}{\alpha+\beta i}\right), \varphi\left(\frac{2\nu\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

37.

Ayant trouvé par ce qui précède la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$, on en tirera celle de la fonction

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha^2+\beta^2}\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right),$$

comme il suit.

La valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$ donnera celle de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ en changeant seulement i en $-i$. De là on tire la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ par la formule (10), savoir

$$226)\quad \varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)=\frac{\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)\sqrt{\left[1-\varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)\right]}+\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)\cdot\sqrt{\left[1-\varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)\right]}}{1+\varphi^2\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)\cdot\varphi^2\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)},$$

$$\text{or }\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}=\frac{2m\alpha\omega}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1};$$

donc on aura la valeur de la fonction

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1}\right).$$

Maintenant pour avoir la valeur de $\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right)$ où n a une valeur déterminée quelconque, il suffit de déterminer m et t de la manière que

$$n=2m\alpha-(4\nu+1)t,$$

ce qui est toujours possible, en remarquant que les deux nombres 2α et $4\nu+1$ sont premiers entre eux; car alors on obtiendra

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1}\right)=\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}+t\omega\right)=(-1)^t\cdot\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right).$$

En posant p. ex. $n=1$, on aura la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$.

38.

Le cas, où $4\nu+1$ a la forme $1+2^n$, est le plus remarquable; car alors l'expression de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$ ne contient que des racines carrées. En effet on a dans ce cas $2\nu=2^{n-1}$, et par suite la formule (224) fait voir qu'on peut déduire $\varphi(\varepsilon^m\delta)$ de θ et v en extrayant seulement des racines carrées. Or v est une fonction rationnelle de θ et de $\sqrt{(-1)}$, et θ est déterminée par l'équation $\theta^{2^{n-1}}=1$, d'où l'on tire θ par des racines carrées; donc on trouve aussi v et la fonction

$$\varphi(\varepsilon^m\delta)=\varphi\left(\frac{a_m\cdot\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

Connaissant de cette manière $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$, on aura de même $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ et de

là, par la formule (226) la valeur de $\varphi\left(\frac{n\omega}{\alpha^2+\beta^2}\right)=\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right)$, en extrayant des racines carrées.

39.

Un autre cas, où la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ peut être determinée par des racines carrées est celui où n est une puissance de 2, comme nous l'avons vu No. 13. Donc on connait les fonctions:

$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right), \varphi\left(\frac{m\omega}{1+2^n}\right),$$

où dans la dernière $1+2^n$ est un nombre premier.

Soient maintenant $1+2^n$, $1+2^{n_1}$, $1+2^{n_2}, \ldots 1+2^{n_\mu}$ plusieurs nombres premiers, on connait les fonctions:

$$\varphi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right), \varphi\left(\frac{m_1\omega}{1+2^{n_1}}\right), \varphi\left(\frac{m_2\omega}{1+2^{n_2}}\right), \ldots \varphi\left(\frac{m_\mu\omega}{1+2^{n_\mu}}\right),$$

et de là la fonction:

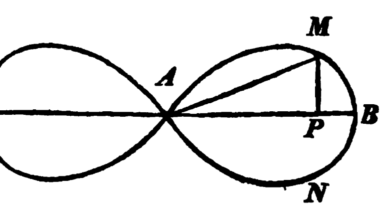
$$\varphi\left(\frac{m}{2^n}+\frac{m_1}{1+2^{n_1}}+\frac{m_2}{1+2^{n_2}}+\ldots+\frac{m_\mu}{1+2^{n_\mu}}\right)\omega$$
$$=\varphi\left(\frac{m'.\omega}{2^n(1+2^{n_1})(1+2^{n_2})\ldots(1+2^{n_\mu})}\right),$$

où m' est un nombre entier, qui, à cause des indéterminés $m, m_1, m_2, \ldots m_\mu$ peut avoir une valeur quelconque. On peut donc établir le théorème suivant: "La valeur de la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ peut être exprimée par *des racines carrées* "toutes les fois que n est un nombre de la forme 2^n ou $1+2^n$, le dernier "nombre étant premier, ou même un produit de plusieurs nombres de ces deux formes."

40.

En appliquant ce qui précède à la lemniscate, on parviendra au théorème énoncé No. 22.

Soit l'arc $AM=\alpha$, la corde $AM=x$ et l'angle $MAP=\theta$, on aura



$$d\alpha=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

En effet, l'équation polaire de la lemniscate est

$$x=\sqrt{(\cos 2\theta)},$$

d'où

$$d\theta = -\frac{dx.\sqrt{(\cos 2\theta)}}{\sin 2\theta}$$

et
$$d\alpha^2 = dx^2 + x^2.d\theta^2,$$

donc

$$d\alpha^2 = dx^2.\left(1 + \frac{x^2.\cos 2\theta}{(\sin 2\theta)^2}\right),$$

mais de $x = \sqrt{(\cos 2\theta)}$ on tire $\cos 2\theta = x^2$, $\cos^2 2\theta = x^4$, $1 - \cos^2 2\theta = 1 - x^4 = (\sin 2\theta)^2$, donc

$$d\alpha^2 = dx^2\left(1 + \frac{x^4}{1-x^4}\right) = \frac{dx^2}{1-x^4},$$

et par suite

$$d\alpha = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

et
$$x = \varphi(\alpha).$$

Si l'on suppose $x = 1$, on aura $\alpha = AMB = \frac{\omega}{2}$. Donc la circonférence $AMBN = \omega$. Supposons maintenant qu'il s'agit de diviser cette circonférence en n parties égales, et soit l'arc $AM = \frac{m}{n}\cdot AMBN = \frac{m}{n}\omega$, on aura

$$AM = \varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right).$$

Donc on aura la corde, et par suite le m^{me} point de division, si l'on connaît la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$; or c'est ce qui a toujours lieu lorsque n est décomposable en nombres premiers de la forme 2 et $1 + 2^n$, comme nous l'avons vu dans le no. précédent. Donc dans ce cas on peut construire les points de division à l'aide de la règle et du compas seulement, ou ce qui revient au même, par l'intersection de lignes droites et de cercles.

§. IX.

Usage des fonctions φ, f, F dans la transformation des fonctions elliptiques.

41.

M. Legendre a fait voir dans ses exercices de calc. int., comment l'intégrale $\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$, qui, en faisant $\sin\varphi = x$, se change en $\int\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$, peut être transformée en d'autres intégrales de la même forme, avec un module différent. Je suis parvenu à généraliser cette théorie par le théorème suivant:

Si l'on désigne par α la quantité $\frac{(m+\mu)\omega+(m-\mu)\varpi i}{2n+1}$, où au moins l'un des deux nombres entiers m et μ est premier avec $2n+1$, on aura:

$$227)\quad \begin{cases} \int \frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}, \\ \text{où} \\ y = f.x.\frac{(\varphi^2\alpha-x^2)(\varphi^2 2\alpha-x^2)\dots(\varphi^2 n\alpha-x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\dots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}, \\ \frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\dots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^2, \\ \frac{1}{e_1} = \frac{f}{e}\left[\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}+2\alpha\right)\dots\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}+n\alpha\right)\right]^2, \\ a = f(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha.\varphi 3\alpha\dots\varphi n\alpha)^2, \end{cases}$$

f étant une indéterminée, de sorte qu'il n'existe qu'une seule relation entre les quantités c_1, e_1, c, e.

Les quantités e^2 et c^2 pourront être positives ou négatives.

Par ce théorème on peut trouver une infinité de transformations différentes entre elles et de celles de *M. Legendre*.

42.

Soient m et μ deux nombres entiers, et faisons pour abréger:

$$228)\quad \alpha = \frac{(m+\mu)\,\omega+(m-\mu)\varpi i}{2n+1},$$

oú l'on suppose que l'un des deux nombres m, μ soit premier avec $2n+1$.

En désignant par θ une quantité quelconque, il viendra, en vertu de (22)

$$229)\quad \varphi[\theta+(2n+1)\alpha]=\varphi\theta.$$

En mettant $\theta-n\alpha$ au lieu de θ, on obtiendra:

$$230)\quad \varphi(\theta+(n+1)\alpha)=\varphi(\theta-n\alpha).$$

Celà posé, considérons l'expression suivante

$$231)\quad \varphi_1(\theta)=\varphi(\theta)+\varphi(\theta+\alpha)+\varphi(\theta+2\alpha)+\dots+\varphi(\theta+n\alpha)+\dots+\varphi(\theta+2n\alpha).$$

En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra à cause de l'équation (229):

$$232)\quad \varphi_1(\theta+\alpha)=\varphi_1(\theta),$$

donc si m désigne un nombre entier quelconque:

$$233)\quad \varphi_1(\theta+m\alpha)=\varphi_1(\theta).$$

En vertu de l'équation (230) on peut écrire l'expression de $\varphi_1(\theta)$, comme il suit:

234) $\varphi_1(\theta) = \varphi(\theta) + \varphi(\theta + \alpha) + \varphi(\theta - \alpha) + \varphi(\theta + 2\alpha) + \varphi(\theta - 2\alpha) + \dots$
$\dots + \varphi(\theta + n\alpha) + \varphi(\theta - n\alpha)$,

c'est-à-dire, en vertu de la formule

$$\varphi(\theta + \nu\alpha) + \varphi(\theta - \nu\alpha) = \frac{2.\varphi\theta.f(\nu\alpha).F(\nu\alpha)}{1 + e^2c^2(\varphi\theta)^2[\varphi(\nu\alpha)]^2},$$

235) $\varphi_1(\theta)$

$$= \varphi\theta + \frac{2\varphi\theta.f\alpha.F\alpha}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\theta} + \frac{2\varphi\theta.f2\alpha.F2\alpha}{1 + e^2c^2\varphi^2 2\alpha.\varphi^2\theta} + \dots + \frac{2\varphi\theta.fn\alpha.Fn\alpha}{1 + e^2c^2\varphi^2 n\alpha.\varphi^2\theta}.$$

En faisant $\varphi\theta = x$, $\varphi_1(\theta)$ devient une fonction rationnelle de x. En la désignant par $\psi(x)$, on aura:

236) $$\psi(x) = x.\left(1 + \frac{2f\alpha.F\alpha}{1 + e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2} + \dots + \frac{2fn\alpha.Fn\alpha}{1 + e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2}\right).$$

43.

Maintenant soit ε une quantité quelconque, je dis qu'on aura

237) $$1 - \frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon} = \frac{\left(1 - \frac{x}{\varphi\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + \alpha)}\right)\left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + 2\alpha)}\right)\dots\left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + 2n\alpha)}\right)}{(1 + e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1 + e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\dots(1 + e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}.$$

En effet il est clair que la fonction

238) $$R = \left(1 - \frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}\right)(1 + e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)\dots(1 + e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)$$

sera entière et du degré $2n + 1$; mais en faisant $x = \varphi\varepsilon$, ψx deviendra $= \varphi_1\varepsilon$, et par suite R se réduira à zéro pour cette valeur de x. De même en faisant $x = \varphi(\varepsilon + m\alpha)$, où m est entier, on aura $\psi x = \varphi_1(\varepsilon + m\alpha)$; c'est à dire, en vertu de (233), $\psi x = \varphi_1\varepsilon$. Donc $1 - \frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon} = 0$, et par conséquent $x = \varphi(\varepsilon + m\alpha)$ sera une racine de l'équation $R = 0$, quel que soit le nombre entier m. Or généralement toutes les quantités

239) $$\varphi\varepsilon,\ \varphi(\varepsilon + \alpha),\ \varphi(\varepsilon + 2\alpha), \dots \varphi(\varepsilon + 2n\alpha)$$

sont différentes entre elles. En effet si l'on avait

$$\varphi(\varepsilon + m'\alpha) = \varphi(\varepsilon + \mu'\alpha),$$

il en suivrait en vertu de (31)

$$\varepsilon + m'\alpha = (-1)^{k+k'}.(\varepsilon + \mu'\alpha) + k\omega + k'\varpi i,$$

d'où

$$k + k' = 2k'',$$
$$k = k'' + l,\ k' = k'' - l,$$
$$(m' - \mu')\alpha = (k'' + l)\omega + (k'' - l)\varpi i.$$

De là, en substituant la valeur de $\alpha = \frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\varpi i}{2n+1}$, on tire

$$(m' - \mu')(m + \mu) = (2n + 1)(k'' + l),$$
$$(m' - \mu')(m - \mu) = (2n + 1)(k'' - l)$$

et

$$m' - \mu' = (2n+1) \cdot \frac{k''}{m} = (2n+1)\frac{l}{\mu},$$

équation contradictoire, parceque nous avons supposé que l'un des deux nombres m et μ soit premier avec $2n + 1$, et $m' - \mu'$ est toujours moindre que $2n + 1$. Maintenant les $2n + 1$ quantités (239) étant différentes entre elles, elles sont précisément les $2n + 1$ racines de l'équation $R = 0$. Donc on a

$$240) \quad R = A\left(1 - \frac{x}{\varphi\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + \alpha)}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + 2n\alpha)}\right),$$

où A est un coefficient constant, qu'on trouvera en attribuant à x une valeur particulière; p. ex. en faisant $x = 0$, on a $R = A$; or l'équation (238) donne pour $x = 0$: $R = 1$, donc $A = 1$, et par conséquent l'équation (237) a lieu.

En multipliant cette équation par $\varphi\varepsilon$ et faisant ensuite $\varepsilon = 0$, il viendra:

$$241) \quad \psi(x) = gx \frac{\left(1 - \frac{x}{\varphi\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{\varphi 2\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi 2n\alpha}\right)}{(1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . x^2) \dots (1 + e^2c^2\varphi^2 n\alpha . x^2)},$$

où g est la valeur de $\frac{\varphi_1\varepsilon}{\varphi\varepsilon}$ pour $\varepsilon = 0$. En faisant $\theta = 0$, après avoir divisé par $\varphi\theta$, on trouve l'expression suivante de cette constante:

$$242) \quad g = 1 + 2f\alpha . F\alpha + 2f2\alpha . F2\alpha + \dots + 2fn\alpha . Fn\alpha.$$

En faisant dans (230) $\theta = n\alpha - (m' + 1)\alpha$, on trouve

$$\varphi(2n\alpha - m'\alpha) = \varphi(-(m' + 1)\alpha) = -\varphi(m' + 1)\alpha.$$

Donc on peut écrire l'expression de ψx comme il suit:

$$243) \quad \psi x = g . x . \frac{\left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2\alpha}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2 2\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2 n\alpha}\right)}{(1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . x^2)(1 + e^2c^2\varphi^2 2\alpha . x^2) \dots (1 + e^2c^2\varphi^2 n\alpha . x^2)}.$$

44

Maintenant faisons dans l'expression de $1 - \frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}$, $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$. En supposant pour abréger

$$244) \quad \rho = (1 + e^2c^2\varphi^2\alpha . x^2)(1 + e^2c^2\varphi^2 2\alpha . x^2) \dots (1 + e^2c^2\varphi^2 n\alpha . x^2),$$

on aura

$$1 - \frac{\psi x}{\varphi_1\frac{\omega}{2}} = \left\{1 - \frac{x}{\varphi\frac{\omega}{2}}\right\}\left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right\}\left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right)}\right\} \dots \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2n\alpha\right)}\right\} \cdot \frac{1}{\rho};$$

or, en faisant dans (230.)

$$\theta = \frac{\omega}{2} + (n - m' - 1)\alpha,$$

on a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + (2n - m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} - (m'+1)\alpha\right),$$

donc en vertu de la formule (voy. 17.):

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} - \alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right),$$

il viendra:

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + (2n - m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} + (m'+1)\alpha\right).$$

Cette équation fait voir qu'on peut écrire l'expression de $1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}}$ comme il suit:

$$245)\quad 1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}}$$
$$= (1 - cx)\left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right\}^2 \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)}\right\}^2 \cdots \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}\right\}^2 \cdot \frac{1}{\rho}.$$

En mettant $-x$ au lieu de $+x$, on aura semblablement

$$246)\quad 1 + \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}}$$
$$= (1 + cx)\cdot\left\{1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right\}^2 \left\{1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)}\right\}^2 \cdots \left\{1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}\right\}^2 \cdot \frac{1}{\rho}.$$

Donc si l'on fait

$$247)\qquad y = k.\psi x,\quad c_1 = \frac{1}{k.\varphi_1 \frac{\omega}{2}},$$

où k est indéterminé, et

$$248)\quad \begin{cases} t = \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right\} \cdots \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}\right\}, \\ t_1 = \left\{1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}\right\} \cdots \left\{1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}\right\}, \end{cases}$$

on aura:

$$249)\quad 1 - c_1 y = (1 - cx).\frac{t^2}{\rho};\quad 1 + c_1 y = (1 + cx)\frac{t_1^2}{\rho}.$$

De la même manière, en faisant

$$250)\quad \begin{cases} s=\left\{1-\dfrac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}\right\}\cdots\left\{1-\dfrac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)}\right\}, \\ s_1=\left\{1+\dfrac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}\right\}\cdots\left\{1+\dfrac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)}\right\}, \end{cases}$$

et

$$251)\quad e_1=\pm\frac{i}{k.\varphi_1\left(\frac{\varpi}{2}i\right)},$$

on trouvera ces deux équations:

$$252)\quad 1\mp e_1 iy=(1-eix).\frac{s_1^2}{\rho};\quad 1\pm e_1 iy=(1+eix).\frac{s^2}{\rho}.$$

Les équations (249) et (252) donneront:

$$(1-c_1^2y^2)=(1-c^2x^2).\frac{t^2t_1^2}{\rho^2};\quad (1+e_1^2y^2)=(1+e^2x^2).\frac{s^2s_1^2}{\rho^2}$$

et par conséquent:

$$253)\quad \sqrt{((1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2))}=\pm\frac{tt_1ss_1}{\rho^2}\sqrt{((1-c^2x^2)(1+e^2x^2))}.$$

Maintenant l'expression de y donne $dy=\frac{P}{\rho^2}.dx$, où P sera une fonction entière de x du degré $4n$, donc:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)]}}=\pm\frac{P}{tt_1ss_1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

Or je dis que la fonction $\frac{P}{tt_1ss_1}$ se réduira à une quantité constante. En effet on a

$$1-c_1y=(1-cx).\frac{t^2}{\rho};$$

en différentiant, et mettant pour dy sa valeur $\frac{Pdx}{\rho^2}$, on aura

$$P=\frac{t}{c_1}\left[ct\rho-(1-cx)\left(2\rho\frac{dt}{dx}-t\frac{d\rho}{dx}\right)\right].$$

On voit de là que P est divisible par t. De la même manière on prouvera que P est divisible par les trois fonctions t_1, s, s_1. Donc si deux quelconques des quatre fonctions t, t_1, s, s_1 n'ont point de facteur commun, P sera divisible par leur produit. Or c'est ce qu'on peut voir aisément à l'aide des expressions de ces fonctions. Donc $\frac{P}{tt_1ss_1}$ est une fonction entière de x. Or P est du degré $4n$; et chacune des fonctions t, t_1, s, s_1 est du degré n. Donc il est prouvé, que $\frac{P}{tt_1ss_1}$ est une quantité constante. En la désignant par a,

il viendra

254) $$\frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)]}}=\pm a.\frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

Pour déterminer a il suffit d'attribuer à x une valeur particulière. En faisant p. ex. $x=o$, on aura

$$t=t_1=s=s_1=1;\ P=\varrho^2.\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy}{dx}=k.\psi' x.$$

Or en différentiant l'expression de ψx, et faisant ensuite $x=o$, il viendra $\psi' x=g$, donc

255) $$a=k.g.$$

On peut donner d'autres formes plus simples aux expressions de c_1, e_1, g, a, et qui mettront en évidence plusieurs propriétés remarquables de ces quantités.

Par la formule (240) on voit que le coefficient de x^{2n+1} dans la fonction R est $-\frac{A}{\varphi\varepsilon.\varphi(\varepsilon+\alpha)\ldots\varphi(\varepsilon+2n\alpha)}$; or d'aprés (238.) et (243.) le même coefficient sera

$$-\frac{(-1)^n}{\varphi_1\varepsilon}.\frac{g}{(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^2},$$

donc en remarquant que $A=1$:

$$\varphi_1(\varepsilon)=\frac{(-1)^n.g}{(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^2}.\ \varphi\varepsilon.\varphi(\varepsilon+\alpha).\varphi(\varepsilon+2\alpha)\ldots\varphi(\varepsilon+2n\alpha).$$

En faisant dans (236.), (243.) $x=\frac{1}{0}$, après avoir divisé par x, on obtiendra deux valeurs de $\frac{\psi x}{x}$, savoir

$$1 \text{ et } \frac{g(-1)^n}{(ec)^{2n}(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^4},$$

donc, en les égalant:

256) $$g=(-1)^n.(ec)^{2n}(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^4,$$

et par conséquent:

257) $$\varphi_1(\varepsilon)=(ec)^{2n}(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^2\varphi\varepsilon.\varphi(\varepsilon+\alpha).\varphi(\varepsilon+2\alpha)\ldots\varphi(\varepsilon+2n\alpha)$$
$$=\varphi(\varepsilon)+\varphi(\varepsilon+\alpha)+\varphi(\varepsilon+2\alpha)+\ldots+\varphi(\varepsilon+2n\alpha).$$

Cette équation exprime une propriété remarquable de la fonction φ. En y posant $\varepsilon=\frac{\omega}{2}$ et $\varepsilon=\frac{\varpi}{2}i$, on obtiendra

258) $$\begin{cases}\varphi_1\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{kc_1}=(ec)^{2n}.\delta^2\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right).\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2n\alpha\right),\\ \varphi_1\left(\frac{\varpi}{2}i\right)=\frac{\pm i}{ke_1}=(ec)^{2n}.\delta^2\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right).\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)\ldots\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+2n\alpha\right),\end{cases}$$

où l'on a fait pour abréger

259) $$\delta=\varphi\alpha.\varphi 2\alpha.\varphi 3\alpha\ldots\varphi n\alpha.$$

En remarquant que

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + (2n - m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} + (m'+1)\alpha\right)$$

et

$$\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i + (2n - m')\alpha\right) = \varphi\left(\frac{\varpi}{2}i + (m'+1)\alpha\right),$$

en faisant

260) $$k(e^2c^2)^n.\delta^2 = f,$$

on tire de ces équations

261) $$\begin{cases} \dfrac{1}{c_1} = \dfrac{f}{c}\left[\varphi\left(\dfrac{\omega}{2}+\alpha\right).\varphi\left(\dfrac{\omega}{2}+2\alpha\right)\dots\varphi\left(\dfrac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^2, \\ \dfrac{1}{e_1} = \pm\dfrac{f}{e}\left[\varphi\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\alpha\right).\varphi\left(\dfrac{\varpi}{2}i+2\alpha\right)\dots\varphi\left(\dfrac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)\right]^2. \end{cases}$$

Multipliant et remarquant qu'on a (18)

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right) = \frac{i}{ec};$$

on obtiendra
$$\mp\frac{1}{c_1e_1} = \frac{(-1)^n.f^2}{(ec)^{2n+1}},$$
d'où

262) $$c_1e_1 = \mp\frac{(ec)^{2n+1}.(-1)^n}{f^2}.$$

De même en divisant on obtiendra:

263) $$\begin{cases} \mp\dfrac{e_1}{c_1} = (-1)^n.\dfrac{e}{c}(ec)^{2n}.\left[\varphi\left(\dfrac{\omega}{2}+\alpha\right).\varphi\left(\dfrac{\omega}{2}+2\alpha\right)\dots\varphi\left(\dfrac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^4, \\ \mp\dfrac{c_1}{e_1} = (-1)^n.\dfrac{c}{e}(ec)^{2n}.\left[\varphi\left(\dfrac{\varpi}{2}i+\alpha\right).\varphi\left(\dfrac{\varpi}{2}i+2\alpha\right)\dots\varphi\left(\dfrac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)\right]^4, \end{cases}$$

Précédemment nous avons trouvé $a = k.g$, et $g = (-1)^n.(ec)^{2n}\delta^4$, donc

264) $$a = f.\delta^2.(-1)^n.$$

Egalement nous avons $y = k.\psi(x)$, donc en vertu de (243)

265) $$y = (-1)^n f.x\frac{(\varphi^2\alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2)(\varphi^2 3\alpha - x^2)\dots(\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1+e^2c^2\varphi^2\alpha.x^2)(1+e^2c^2\varphi^2 2\alpha.x^2)\dots(1+e^2c^2\varphi^2 n\alpha.x^2)}.$$

Donc les valeurs précédentes de c_1, e_1, a et y donneront:

266) $$\frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = \pm\frac{adx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}},$$

et de là

267) $$\int\frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = \pm a\int\frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

45.

Les formules (261) donnent les valeurs des quantités c_1 et e_1, exprimées en c et e à l'aide de la fonction φ. Or on peut aussi les déterminer à l'aide d'une équation algébrique. En effet on a

$$\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\right]^2=\frac{1}{c^2}\left(\frac{f\alpha}{F\alpha}\right)^2=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1-c^2\varphi^2\alpha}{1+e^2\varphi^2\alpha}$$

et

$$\left[\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)\right]^2=-\frac{1}{e^2}\left(\frac{F\alpha}{f\alpha}\right)^2=-\frac{1}{e^2}\cdot\frac{1+e^2\varphi^2\alpha}{1-c^2\varphi^2\alpha};$$

donc il est clair que les valeurs de c_1 et e_1 pourront être exprimées en fonctions rationnelles et symétriques des quantités $\varphi\alpha, \varphi 2\alpha, \dots \varphi n\alpha$. Donc si $2n+1$ est un nombre premier, on peut, en vertu de ce qu'on a vu §. V., déterminer c_1 et e_1 à l'aide d'une équation algébrique du $(2n+2)^{\text{me}}$ degré. On peut encore démontrer que la même chose aura lieu dans le cas où $2n+1$ est un nombre composé. Alors on peut même déterminer c_1 et e_1 l'aide d'une équation d'un degré moindre que $2n+2$.

Donc on aura un certain nombre de transformations correspondantes pour chaque valeur de $2n+1$.

46.

On a supposé dans ce qui précède que e et c soient des quantités reelles et positives; mais ayant exprimé c_1 et e_1 en e et c par des équations algébriques, il est clair que la formule (266) aura lieu également en donnant à e et c des valeurs réelles et imaginaires quelconques. Dans le cas où e^2, c^2 sont réelles, on peut même se servir des expressions (261), (265). Mais alors ω et ϖ ne seront pas toujours des quantités réelles. Au reste l'une des quantités c_1 et e_1, à cause de l'indéterminée f, peut être prise à volonté; seulement il faut excepter les valeurs zéro et l'infini.

47.

Si l'on suppose c et e réels et $2n+1$ premier, les valeurs de c_1 et e_1 seront imaginaires, excepté deux d'entre elles, dont l'une répond à

$$\alpha=\frac{2m.\omega}{2n+1}$$

et l'autre à

$$\alpha=\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}.$$

A. Supposons d'abord

$$\alpha=+\frac{2m.\omega}{2n+1}.$$

Dans ce cas on aura (261):

$$\frac{1}{c_1}=\frac{f}{c}\cdot\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\cdot\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2.\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\dots\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n.\frac{2m\omega}{2n+1}\right)\right]^2.$$

Soit $\mu . 2m = (2n+1)t \pm a_m$, où t est entier et a_m entier positif, et moindre que $\frac{2n+1}{2}$, on aura

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \mu \cdot \frac{2m\omega}{2n+1}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{a_m\omega}{2n+1} + t\omega\right) = (-1)^t \cdot \varphi\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{a_m \omega}{2n+1}\right)$$
$$= \pm \varphi\left(\frac{2n+1-2a_m}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right).$$

Or les nombres $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ seront les mêmes que les suivants $1, 2, 3, \ldots n$; mais dans un ordre différent; donc l'expression de $\frac{1}{c_1}$ pourra être mise sous la forme.

268) $$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)\right]^2.$$

De même l'équation (263) donnera

269) $$\frac{e_1}{c_1} = \mp (-1)^n \cdot \frac{e}{c} \cdot (ec)^{2n}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)\right]^4,$$

Soit maintenant $c = 1$, $c_1 = 1$, on aura, en posant $\pm(-1)^n = 1$:

269') $$e_1 = e^{2n+1} \cdot \left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)\right]^4,$$

270) $$\int \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}} + \text{Const.}$$

271) $$y = (-1)^n f . x . \frac{\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) - x^2\right]\left[\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) - x^2\right] \cdots \left[\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) - x^2\right]}{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)x^2\right]\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)x^2\right] \cdots \left[1+e^2 . \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)x^2\right]},$$

$$f = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}},$$

272) $$a = f\left[\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) \cdots \varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)\right]^2 (-1)^n,$$

ou bien

273) $$a = \left\{\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) \cdots \varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)}\right\}^2 \cdot (-1)^n.$$

Si l'on suppose e moindre que l'unité ou égale à l'unité, e_1 sera toujours moindre que e, et lorsque $2n+1$ est un très grand nombre, e_1 sera extrêmement petit

48.

Le signe du second membre de l'équation (270) dépend de la grandeur de x.

Il pourra être jugé aisément comme il suit. On a par ce qui précède

$$\sqrt{((1-y^2)(1+e_1^2y^2))}=\pm\frac{tt_1ss_1}{\rho^2}\sqrt{((1-x^2)(1+e^2x^2))}.$$

En supposant x réel, ρ^2 sera toujours fini et positif, de même que $\sqrt{(1+e_1^2y^2)}$ et $\sqrt{(1+e^2x^2)}$. Donc le signe du second membre de l'équation est le même que celui de la quantité

$$tt_1ss_1\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)};$$

maintenant on a

$$ss_1=\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\varpi}{2}i+n\alpha\right)}\right\};$$

$$\text{or } \varphi\left(\frac{\varpi}{2}i+\alpha\right)=\frac{i}{e}\cdot\frac{F\alpha}{f\alpha} \text{ etc.,}$$

donc

$$ss_1=\left[1+\left(\frac{ef\alpha.x}{F\alpha}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{efn\alpha.x}{Fn\alpha}\right)^2\right],$$

donc, en remarquant que α est réel dans le cas que nous considérons, on voit que $s.s_1$ sera toujours une quantité positive; or $t.t_1$ est réel, donc la quantité $\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)}$ sera positive également, et par conséquent le signe, dont il s'agit, sera le même, que celui de la quantité tt_1. Il n'est pas difficile de voir qu'en vertu de (248) et en mettant pour α sa valeur $\frac{2m\omega}{2n+1}$, on aura

$$tt_1=\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}\right\}$$

quantité qui est positive depuis $x=0$ jusqu'à $x=\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$, négative depuis $x=\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$ jusqu'à $x=\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$, positive depuis $x=\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$ jusqu'à $x=\varphi\left(\frac{5}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$ etc. Si x est plus grand que l'unité, tt_1 aura toujours le même signe, savoir $(-1)^n$.

Donc, dans ce cas l'équation (270) donnera, en intégrant et commençant l'intégrale par $x=1$:

$$274)\quad \int_1^y\frac{dy}{\sqrt{[(y^2-1)(1+e_1^2y^2)]}}=a.\int_1^x\frac{dx}{\sqrt{[(x^2-1)(1+e^2x^2)]}}.$$

Si la valeur de x est moindre que l'unité, on aura

$$275)\quad \int\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}}=a\int\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}}+\text{Const.}$$

entre les limites

$$x = \varphi\left(\frac{4m-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right) \text{ et } x = \varphi\left(\frac{4m+1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$$

et

$$276)\quad -\int\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = a\int\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}} + \text{Const.}$$

entre les limites $x = \varphi\left(\frac{4m+1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$ et $x = \varphi\left(\frac{4m+3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$.

Si p. ex. on suppose x renfermé entre les limites

$$-\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right) \text{ et } +\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)$$

on aura, en intégrant et commençant l'intégrale par $x = 0$,

$$277)\quad \int_0^y\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = a.\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

En faisant $x = \varphi\left(\frac{\omega}{(2n+1).2}\right)$, on aura $y = (-1)^n$, et par suite:

$$\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}} = \frac{a.\omega}{2(2n+1)}(-1)^n,$$

d'où

$$278)\quad (-1)^n.a = \frac{4n+2}{\omega}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}}.$$

Cette expression de a est très commode pour le calcul. En négligeant les quantités de l'ordre e_1^2, on obtiendra

$$279)\quad (-1)^n.a = (2n+1).\frac{\pi}{\omega}.$$

En substituant et négligeant toujours e_1^2 la formule (277) donnera

$$280)\quad \begin{cases} \int_0^x\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}} = \frac{(-1)^n\omega}{(2n+1)\pi}\cdot\text{arc. sin }(y), \\ y = (2n+1)\frac{\pi}{\omega}.x\frac{\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}\right\}.(-1)^n}{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)x^2\right]\cdots\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)x^2\right]}. \end{cases}$$

B. Dans le cas $\alpha = \frac{2\mu\varpi i}{2n+1}$, on trouvera de la même manière la formule suivante

$$281)\quad \int_0^x\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}} = a'.\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}},$$

où

$$e_1 = \frac{1}{e^{2n-1}.\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right)\right]^4},$$

$$a' = \frac{(-1)^n}{e^{2n}\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\varpi}{2}i\right)\cdot\varphi\left(\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{\varpi}{2}i\right)\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\varpi}{2}i\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\varpi}{2}i\right)\right]^2},$$

$$y = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}}\cdot x\,\frac{\left[x^2-\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)\right]\left[x^2-\varphi^2\left(\frac{2\varpi i}{2n+1}\right)\right]\cdots\left[x^2-\varphi^2\left(\frac{n\varpi i}{2n+1}\right)\right]}{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right)x^2\right]\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{2\varpi i}{2n+1}\right)x^2\right]\cdots\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{n\varpi i}{2n+1}\right)x^2\right]}.$$

La formule précédente a lieu pour toutes les valeurs de x moindres que l'unité.

49.

Pour avoir une théorie complète de la transformation des fonctions elliptiques, il faudrait connaître toutes les transformations possibles; or je suis parvenu à démontrer, qu'on les obtient toutes en combinant celle de M. Legendre avec celles, contenues dans la formule ci-dessus, *même en cherchant la relation la plus générale entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques.*

Ce théorème dont les conséquences embrassent presque toute la théorie des fonctions elliptiques, m'a conduit à un très grand nombre de belles propriétés de ces fonctions.

§. X.

Sur l'intégration de l'équation séparée

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+\mu y^2)]}} = a.\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+\mu x^2)]}}.$$

50.

On peut toujours comme on sait présenter l'intégrale complète de cette équation sous une forme algébrique, lorsque la quantité constante a est un *nombre rationnel,* quelle que soit d'ailleurs la valeur réelle ou imaginaire de μ. Mais si a n'est pas un nombre rationnel, cela n'a pas lieu. A cet égard je suis parvenu aux théorèmes suivants:

Théorème I. En supposant a réel, et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que a soit un nombre rationnel.

Théorème II. En supposant *a imaginaire,* et l'équation intégrable *algébriquement,* il faut nécessairement que a soit de la forme $m \pm \sqrt{-1}.\sqrt{n}$, où m et n sont des nombres rationnels. Dans ce cas la quantité μ n'est pas arbitraire; il faut qu'elle satisfasse à une équation qui a une infinité de racines réelles et imaginaires. Chaque valeur de μ satisfait à la question.

La Démonstration de ces théorèmes fait partie d'une théorie très étendue des fonctions elliptiques, dont je m'occupe actuellement, et qui paraîtra aussitôt qu'il me sera possible. Je me borne ici à considérer un cas particulier, qu'on peut tirer des formules du paragraphe précédent.

Si dans la formule (270) on pose

$$e_1 = \frac{1}{e},$$

et eyi à la place de y, il viendra

$$282) \quad \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}} = a\sqrt{-1}.\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

où

$$283) \quad y = \pm\sqrt{-1}.e^n.x\frac{\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)-x^2\right]\cdots\left[\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)-x^2\right]}{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)x^2\right]\cdots\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)x^2\right]};$$

e est déterminé par l'équation (269') qui deviendra

$$284) \quad \begin{cases} 1 = e^{n+1}.\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)\right]^2 \\ \quad \text{et } a \text{ par} \\ a = \left\{\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\cdots\varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\cdots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}\right\}^2\cdot\frac{1}{e}. \end{cases}$$

Donc on connait une intégrale particulière de l'équation (282) et par conséquent on en pourra trouver l'intégrale complète.

Dans le cas que nous considérons, la valeur de a est $\sqrt{(2n+1)}$; ce qu'on démontrera aisément comme il suit:

En mettant dans l'équation (282) $y = z\sqrt{-1}$, et intégrant entre les limites zéro et $\varphi\left(\frac{\omega}{4n+2}\right)$, il viendra

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dz}{\sqrt{[(1+z^2)(1-e^2z^2)]}} = a:\frac{\omega}{4n+2},$$

en remarquant que les limites de z seront zéro et $\frac{1}{e}$. En faisant de même $x = z\sqrt{-1}$, et intégrant entre les limites zéro et $\frac{1}{e}$, on trouvera que les limites de y seront zéro et l'unité et par conséquent

$$\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}} = \frac{\omega}{2} = a.\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dz}{\sqrt{[(1+z^2)(1-e^2z^2)]}} = a.\frac{\varpi}{2}.$$

Donc on a

$$\frac{\varpi}{2}=\frac{a}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}$$

et

$$\frac{\omega}{2}=a.\frac{\varpi}{2},$$

d'où l'on tire

285) $$a=\sqrt{(2n+1)},$$

286) $$\frac{\omega}{\varpi}=\sqrt{(2n+1)}.$$

Donc l'équation différentielle deviendra:

287) $$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}}=\sqrt{-1}.\sqrt{(2n+1)}.\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

51.

Pour donner un exemple, considérons le cas où $n=1$ et $n=2$.

A. Si $n=1$, on aura:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}}=\sqrt{-3}.\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}},$$

$$y=\sqrt{-1}.e.x.\frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)-x^2}{1+e^2.\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right).x^2},$$

e est déterminé par l'équation:

$$1=e^2\left[\varphi\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\right]^2.$$

On a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{6}\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\omega}{3}\right)=\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot\frac{f\left(\frac{\omega}{3}\right)}{F\left(\frac{\omega}{3}\right)}=\frac{\sqrt{\left[1-\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)\right]}}{\sqrt{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)\right]}},$$

donc

$$1=e^2.\frac{1-\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}=\frac{e^2-e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)},$$

$$a=\frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{6}\right)}\cdot\frac{1}{e}.$$

Maintenant on trouvera en combinant ces équations et remettant pour a sa valeur $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} = e.\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right),$$

donc

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{e},$$

et par suite

$$1 = \frac{e^2 - e\sqrt{3}}{1 + e\sqrt{3}},$$

de là

$$e^2 - 2\sqrt{3}.e = 1$$

et

$$e = \sqrt{3} + 2.$$

Ayant trouvé e, on aura

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3.$$

Donc on aura l'équation différentielle:

288) $$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+(2+\sqrt{3})^2y^2)]}} = \sqrt{-3}.\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+(2+\sqrt{3})^2x^2)]}},$$

qui sera satisfaite par l'intégrale algébrique:

$$y = \sqrt{-1}.x\,\frac{\sqrt{3}-(2+\sqrt{3}).x^2}{1+\sqrt{3}(2+\sqrt{3}).x^2}.$$

Si l'on pose $x\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ au lieu de x, et $y\sqrt{(2-\sqrt{3})}.\sqrt{-1}$ au lieu de y, on obtiendra l'équation:

289) $$\frac{dy}{\sqrt{[(1-2\sqrt{3}.y^2-y^4)]}} = \sqrt{3}.\frac{dx}{\sqrt{[(1+2\sqrt{3}.x^2-x^4)]}},$$

qui sera satisfaite par

$$y = x.\frac{\sqrt{3}-x^2}{1+\sqrt{3}.x^2}.$$

B. Si $n=2$, on aura l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}} = \sqrt{-5}.\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}},$$

où

$$y = \sqrt{-1}.e^2.x\frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)-x^2}{1+e^2.\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right).x^2}.\frac{\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)-x^2}{1+e^2.\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right).x^2},$$

290) $$1 = e^2.\varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right).\varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right);\quad \sqrt{5} = e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right).\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right).$$

On a

291) $$\begin{cases} \varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right) = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2}-\frac{2\omega}{5}\right) = \dfrac{f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}, \\ \varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right) = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\omega}{5}\right) = \dfrac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}, \end{cases}$$

$$\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}+\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}+\frac{\omega}{5}\right)}=\frac{f\left(\frac{3\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\omega}{5}\right)}=\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right).\,f\left(\frac{\omega}{5}\right)-\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)F\left(\frac{2\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right).\,F\left(\frac{\omega}{5}\right)+e^2\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)f\left(\frac{2\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)},$$

$$\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}-\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}-\frac{\omega}{5}\right)}=\frac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)}=\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right)\,f\left(\frac{\omega}{5}\right)+\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right).F\left(\frac{2\omega}{5}\right)F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right)\,F\left(\frac{\omega}{5}\right)-e^2\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right).f\left(\frac{2\omega}{5}\right)f\left(\frac{\omega}{5}\right)}.$$

En multipliant ces valeurs de $\frac{f\left(\frac{3\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\omega}{5}\right)}$ et $\frac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)}$ entre elles, et remarquant que

$$f\left(\frac{3\omega}{5}\right)=f\left(\frac{2\omega}{5}\right),$$

$$F\left(\frac{3\omega}{5}\right)=F\left(\frac{2\omega}{5}\right),$$

on obtiendra

$$P=\frac{P^2-\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right)\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{1-e^4.\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right).\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right).P^2},$$

où l'on a fait pour abréger

$$P=\frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right).f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right).F\left(\frac{\omega}{5}\right)}.$$

Celà posé, les équations (290, 291) donneront

$$1=e^3.P^2,\ \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right).\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}}{e^2},$$

donc, en substituant

$$\frac{1}{e\sqrt{e}}=\frac{\frac{1}{e^3}-\frac{\sqrt{5}}{e^2}}{1-\frac{\sqrt{5}}{e}}=\frac{1}{e^2}.\ \frac{1-e\sqrt{5}}{e-\sqrt{5}},$$

et de là

$$\sqrt{e}=\frac{1-e\sqrt{5}}{e-\sqrt{5}},$$

$$e^3-1-(5+2\sqrt{5})e(e-1)=0.$$

Les racines de cette équation sont

$$e=1,\ e=2+\sqrt{5}-2\sqrt{(2+\sqrt{5})},\ e=2+\sqrt{5}+2\sqrt{(2+\sqrt{5})}.$$

La dernière de ces racines

$$e=2+\sqrt{5}+2\sqrt{(2+\sqrt{5})}=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}\right]^2$$

répond à la question, car l'équation

$$1 = e^3 . \varphi^2 \left(\frac{\omega}{10}\right) . \varphi^2 \left(\frac{3\omega}{10}\right)$$

fait voir que e doit être plus grand que l'unité. Connaissant e, on trouve la valeur des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)$ et $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)$ comme il suit.

Nous avons

$$1 = e^3 . P^2 = e^3 . \frac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right) f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right) F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)};$$

or en faisant $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) = \alpha$ et $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) = \beta$, on aura

$$f^2\left(\frac{\omega}{5}\right) = 1 - \alpha^2, \quad f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = 1 - \beta^2,$$

$$F^2\left(\frac{\omega}{5}\right) = 1 + e^2\alpha^2, \; F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = 1 + e^2\beta^2,$$

donc

$$(1 + e^2\alpha^2)(1 + e^2\beta^2) = e^3 (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2),$$

$$1 + e^2(\alpha^2 + \beta^2) + e^4\alpha^2\beta^2 = e^3 - e^3(\alpha^2 + \beta^2) + e^3\alpha^2\beta^2,$$

$$e^3 - 1 - e^3(e - 1) . \alpha^2\beta^2 = e^2(e + 1) . (\alpha^2 + \beta^2);$$

or nous avons trouvé plus haut, $\alpha^2\beta^2 = \frac{\sqrt{5}}{e^2}$, donc:

$$e^3 - 1 - e(e - 1)\sqrt{5} = e^2(e + 1)(\alpha^2 + \beta^2).$$

Donc on connait $\alpha^2 . \beta^2$ et $\alpha^2 + \beta^2$ et par suite α^2 et β^2 par la résolution d'une équation du second degré. On a donc aussi la valeur de y, qui satisfait à l'équation:

$$292) \quad \frac{dy}{\sqrt{[(1 - y^2)(1 + (2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{(2 + \sqrt{5})})^2 . y^2)]}}$$

$$= \sqrt{-5} . \frac{dx}{\sqrt{[(1 - x^2)(1 + (2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{(2 + \sqrt{5})})^2 . x^2)]}}.$$

Si l'on pose $\frac{x}{\sqrt{e}}$ au lieu de x, et $\frac{y\sqrt{-1}}{\sqrt{e}}$ au lieu de y, on obtiendra l'équation

$$293) \quad \frac{dy}{\sqrt{[1 - 4\sqrt{(2 + \sqrt{5})} . y^2 - y^4]}} = \sqrt{5} . \frac{dx}{\sqrt{[1 + 4\sqrt{(2 + \sqrt{5})} . x^2 - x^4]}},$$

où

$$y = x . \frac{\sqrt{5} - \sqrt{(10 + 10\sqrt{5})} . x^2 + x^4}{1 + \sqrt{(10 + 10\sqrt{5})} . x^2 + \sqrt{5} . x^4}$$

52.

Dans les deux cas que nous venons de considérer, il n'était pas difficile de trouver la valeur de la quantité e, mais la valeur de n étant plus grande, on

parviendra à des équations algébriques, qui peut être ne seront pas résolubles algébriquement.

Néanmoins on peut dans tous les cas exprimer la valeur de e par des séries, et comme leur forme est très remarquable, je vais les rapporter ici.

En faisant dans la formule (206.) $\alpha = 1$, on aura, en remarquant que $c = 1$, $\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{e}$,

$$294)\qquad e\omega = 4\pi\left(\frac{\rho}{\rho^2+1} + \frac{\rho^3}{\rho^6+1} + \frac{\rho^5}{\rho^{10}+1} + \dots\right),$$

où

$$\rho = h^{\frac{\varpi}{\omega}\cdot\frac{\pi}{2}}.$$

En faisant de même dans la formule (204.): $\alpha = \frac{\varpi}{2}i$, on aura $\varphi\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{i}{e}$; $\varepsilon = h^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, donc

$$\frac{i}{e} = \frac{2}{e}\cdot\frac{\pi}{\varpi}\cdot\left\{\frac{i-\frac{1}{i}}{r+r^{-1}} - \frac{i^3-i^{-3}}{r^3+r^{-3}} + \dots\right\},$$

c'est-à-dire

$$\varpi = 4\pi\cdot\left(\frac{r}{r^2+1} + \frac{r^3}{r^6+1} + \frac{r^5}{r^{10}+1} + \dots\right),$$

où

$$r = h^{\frac{\omega}{\varpi}\cdot\frac{\pi}{2}}.$$

Maintenant dans le cas que nous considérons, on a

$$\frac{\omega}{\varpi} = \sqrt{(2n+1)},$$

et par conséquent

$$295)\quad \omega = 4\pi\sqrt{(2n+1)}\cdot\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}\sqrt{(2n+1)}}}{h^{\pi\sqrt{(2n+1)}}+1} + \frac{h^{\frac{3\pi}{2}\sqrt{(2n+1)}}}{h^{3\pi\sqrt{(2n+1)}}+1} + \dots\right\}.$$

Cette formule donne la valeur de

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

Ensuite on aura la valeur de e par la formule (294) qui, en substituant pour ρ sa valeur $h^{\frac{\varpi}{\omega}\cdot\frac{\pi}{2}} = h^{\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}\cdot\frac{\pi}{2}}$, donne

$$296)\quad e = \frac{4\pi}{\omega}\left\{\frac{h^{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}}}{h^{\frac{\pi}{\sqrt{(2n+1)}}}+1} + \frac{h^{\frac{3\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}}}{h^{\frac{3\pi}{\sqrt{(2n+1)}}}+1} + \dots\right\},$$

h est le nombre 2,7182818 . . .

Addition au mémoire précédent.

Ayant terminé le mémoire précédent sur les fonctions elliptiques, une note sur les mêmes fonctions par *Mr. C. G. T. Jacobi,* inserée dans le No. 123. année 1827. du recueil de *Mr. Schumacher,* qui a pour titre *"Astronomische Nachrichten,"* m'est venu sous les yeux. *Mr. Jacobi* donne le théorème suivant:

Soit p un nombre impair et θ' un angle tel qu'on ait, en désignant l'intégrale $\int\frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}$ prise de 0 jusqu'à θ, par $F(k,\theta)$:

$$F(k,\theta') = \frac{1}{p}.F(k,90^0);$$

et en général $\theta^{(m)}$ un angle tel, qu'on ait

$$F(k,\theta^{(m)}) = \frac{m}{p}.F(k,90^0):$$

soit déterminé encore l'angle ψ par l'équation

$$\text{tang}\,(45^0-\tfrac{1}{2}\psi) = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}{\text{tang}\frac{1}{2}(\theta'+\theta)}\cdot\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(\theta'''+\theta)}{\text{tang}\frac{1}{2}(\theta'''-\theta)}\cdots\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(\theta^{(p-2)}\pm\theta)}{\text{tang}\frac{1}{2}(\theta^{(p-2)}\mp\theta)}\,\text{tang}\,(45^0\mp\tfrac{1}{2}\theta),$$

on aura:

$$F(k,\theta) = \mu.F(\lambda,\psi).$$

Il faut admettre le signe supérieur si p est de la forme $4n+1$, et le signe inférieur, si p est de la forme $4n-1$. ψ doit être pris entre $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$, si θ tombe entre $\theta^{(m)}$ et $\theta^{(m+1)}$. Les constantes μ et λ se déterminent de différentes manières. On a p. ex.

$$\mu = \frac{1}{2(\text{cosec}\,\theta'-\text{cosec}\,\theta'''+\dots\mp\text{cosec}\,\theta^{(p-2)}\pm\frac{1}{2})},$$

$$\lambda = 2k\mu(\sin\theta-\sin\theta'''+\dots\mp\sin\theta^{(p-2)}\pm\tfrac{1}{2}).$$

Ce théorème élégant que *M. Jacobi* donne sans démonstration est contenu comme cas particulier dans la formule (227) du mémoire précédent, et au fond il est le même que celui de la formule (270).

Nous allons démontrer cela:

En faisant dans l'intégrale

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]}};$$

$$x = \sin\theta,$$

on aura

$$\alpha = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{[(1-k^2\sin^2\theta)]}},$$

mais

$$x = \varphi\alpha,$$

donc:

$$\alpha = F(k,\theta) \text{ donne } \sin\theta = \varphi\alpha.$$

Si $\theta = 90^0$, on a $x = 1$, donc

$$\frac{\omega}{2} = F(k, 90^0).$$

Donc en faisant $\theta = \theta^{(m)}$, on aura

$$F(k, \theta^{(m)}) = \frac{m}{p}\cdot\frac{\omega}{2} \text{ et } \sin\theta^{(m)} = \varphi\left(\frac{m}{p}\cdot\frac{\omega}{2}\right).$$

Cela posé, faisons dans (269' et 270):

$$e_1^2 = -\lambda^2,\ e^2 = -k^2,\ \mu = \frac{(-1)^n}{a},$$

$$x = (-1)^n.\sin\theta,\ y = \sin\psi,\ 2n+1 = p,$$

il viendra:

$$1)\qquad \int\frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}} = \pm\mu\int\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\lambda^2.\sin^2\psi)}} + C,$$

où les quantités μ, λ, ψ sont déterminés par les équations

$$\lambda = k^{2n+1}.(\sin\theta'.\sin\theta''' \ldots \sin\theta^{(2n-1)})^4,$$

$$\mu = \left\{\frac{\sin\theta' \sin\theta''' \ldots \sin\theta^{(2n-1)}}{\sin\theta'' \sin\theta'''' \ldots \sin\theta^{(2n)}}\right\}^2,$$

$$2)\quad \sin\psi = \frac{k^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda}}.\sin\theta\,\frac{(\sin^2\theta''-\sin^2\theta)(\sin^2\theta''''-\sin^2\theta)\ldots(\sin^2\theta^{(2n)}-\sin^2\theta)}{(1-k^2\sin^2\theta''\sin^2\theta)(1-k^2\sin^2\theta''''\sin^2\theta)\ldots(1-k^2\sin^2\theta^{(2n)}\sin^2\theta)}.$$

Nous supposons k moindre que l'unité, car dans le cas contraire ω sera une quantité imaginaire.

Celà posé, considérons les équations (249). En remarquant que $c_1 = c = 1$, on en tire

$$\sqrt{\left(\frac{1-y}{1+y}\right)} = \frac{t}{t_1}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)},$$

où

$$\frac{t}{t_1}=\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)-x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)+x}\cdot\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)-x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)+x}\cdots\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)-x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)+x},$$

c'est-à-dire en faisant $\alpha=\frac{2m\omega}{2n+1}$ et $m=-1$:

$$\frac{t}{t_1}=\frac{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)+x}{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)-x}\cdot\frac{\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)-x}{\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)+x}\cdots\frac{(-1)^n\cdot\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)-x}{(-1)^n\cdot\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)+x}.$$

Maintenant on a

$$x=(-1)^n.\sin\theta,\ \text{et}\ \varphi\left(\frac{m}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)=\sin\theta^{(m)},$$

donc en substituant:

$$\sqrt{\left(\frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi}\right)}=\sqrt{\left(\frac{1-(-1)^n.\sin\theta}{1+(-1)^n.\sin\theta}\right)}\cdot\frac{\sin\theta'-\sin\theta}{\sin\theta'+\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta'''+\sin\theta}{\sin\theta'''-\sin\theta}\cdots\frac{\sin\theta^{(2n-1)}+(-1)^n\sin\theta}{\sin\theta^{(2n-1)}-(-)1^n\sin\theta},$$

et de là

$$\begin{aligned}&\tang\left(45^\circ-\tfrac{1}{2}\psi\right)\\&=\frac{\tang\frac{1}{2}(\theta'-\theta)}{\tang\frac{1}{2}(\theta'+\theta)}\cdot\frac{\tang\frac{1}{2}(\theta'''+\theta)}{\tang\frac{1}{2}(\theta'''-\theta)}\cdots\frac{\tang\frac{1}{2}[\theta^{(2n-1)}+(-1)^n\theta]}{\tang\frac{1}{2}[\theta^{(2n-1)}-(-1)^n\theta]}\tang\left(45^\circ-(-1)^n\theta\right).\end{aligned}$$

C'est précisément la formule de *Mr. Jacobi.*

Dans la formule (1), on peut toujours supposer le second membre positif. En effet, en différentiant, on aura

$$\pm\mu\partial\psi=\frac{\sqrt{(1-\lambda^2\sin^2\psi)}}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}.d\theta.$$

En supposant θ toujours croissant, le second membre sera toujours positif. Donc en déterminant la valeur ψ de sorte quelle soit croissante et décroissante en même temps avec θ, on doit prendre le signe supérieur. On a donc

$$\int_0\frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\theta)}}=\mu\int_0\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\lambda^2\sin^2\psi)}},$$

ou bien

$$F(k,\theta)=\mu.F(\lambda,\psi).$$

De la remarque que ψ doit être croissant et décroissant en même temps avec θ, et en ayant égard à la formule (2), on tirera aisément la conséquence que ψ doit tomber entre $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$, si θ tombe entre $\theta^{(m)}$ et $\theta^{(m+1)}$.

Quant aux quantités λ et μ, il est évident qu'elles ont nécessairement les mêmes valeurs que celles de *Mr. Jacobi.* Mais les expressions que j'ai données seront plus commodes pour l'application, et font voir clairement que λ est extrèmement petit, si n est un peu grand. Au reste on peut sans difficulté démontrer leur identité à l'aide de la formule (257).

XIII.

Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques.

Dans le Nr. 127 du journal d'astronomie de *Mr. Schumacher* (Astronomische Nachrichten) *Mr. Jacobi* démontre un théorème très élégant relatif à la transformation des fonctions elliptiques. Ce théorème est un cas particulier d'un autre plus général auquel je suis parvenu depuis longtemps sans connaître le mémoire de *Mr. Jacobi.* On en trouve la démonstration dans le mémoire précédent. Mais on peut envisager cette théorie sous un point de vue beaucoup plus général en se proposant comme un problème d'analyse indéterminée de trouver toutes les transformations possibles d'une fonction elliptique qui peuvent s'effectuer d'une certaine manière. Je suis parvenu à résoudre complètement un grand nombre de problèmes de cette espèce. Parmi eux est le suivant, qui est d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques:

"Trouver tous les cas possibles dans lesquels on pourra satisfaire à l'équa-"tion différentielle:

$$1)\quad \frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)]}} = \pm a.\frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)]}}$$

"en mettant pour y une fonction algébrique de x, rationnelle ou irrationnelle."

Ce problème vu la généralité de la fonction y paraît au premier coup d'oeil bien difficil, mais on peut le ramener au cas où l'on suppose y rationnelle. En effet on peut démontrer que si l'équation (1) a lieu pour une valeur irrationnelle de y, on en pourra toujours déduire une autre de la même forme dans laquelle y est rationnelle en changeant convenablement le coefficient a, les quantités c_1, e_1, c, e restant les mêmes. La méthode qui s'offre d'abord pour résoudre le problème dans le cas où y est rationnelle est celle des coefficiens indéterminés; or on serait bientôt fatigué à cause de l'extrême complication des équations à satisfaire.

Je crois donc que le procédé suivant, qui conduit de la manière la plus simple à une solution complète, doit peut-être mériter l'attention des géomètres. —

En faisant:

$$2)\qquad \theta = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)]}}$$

la quantité x sera une certaine fonction de θ; nous la désignerons par $\lambda\theta$. De même nous désignerons par $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega'}{2}$ les valeurs de θ qui répondent respectivement à $x = \frac{1}{c}$ et á $x = \frac{1}{e}$; et par $\Delta(\theta)$ la fonction $\sqrt{((1-c^2x^2)(1-e^2x^2))}$. Cela posé on pourra démontrer les théorèmes suivants:

Théorème I. En désignant par θ et θ' deux quantités quelconques on aura toujours

$$3)\qquad \lambda(\theta \pm \theta') = \frac{\lambda\theta.\Delta(\theta') \pm \lambda\theta'.\Delta(\theta)}{1-c^2e^2\lambda^2\theta.\lambda^2\theta'}$$

(Voy. Exercices de calcul int. T. I. pag. 23)

Théorème II. On satisfait de la manière la plus générale à l'équation

$$\lambda\theta' = \lambda\theta$$

en prenant

$$\theta' = (-1)^{m+m'}.\theta + m\omega + m'\omega'$$

où m et m' sont des nombres entiers quelconques positifs ou negatifs. On aura donc

$$4)\qquad \lambda((-1)^{m+m'}.\theta + m\omega + m'\omega') = \lambda\theta.$$

Ce théorème a lieu généralement quelles que soient les quantités e et c, réelles ou imaginaires. Je l'ai démontré pour le cas où e^2 est négatif et c^2 positif dans le mémoire précédent (voy. p. 154). Les quantités ω, ω' sont toujours dans un rapport imaginaire. Elles jouent d'ailleurs le même rôle dans la théorie des fonctions elliptiques que le nombre π dans celle des fonctions circulaires. —

A l'aide de ces deux théorèmes nous allons voir comment on pourra déterminer facilement l'expression générale de y, et les valeurs qui résulteront pour c_1 et e_1.

Soit

$$5)\qquad y = \psi(x)$$

la fonction rationnelle cherchée. — Si l'on considère x comme fonction de y, sa valeur sera déterminée par l'équation (5), qui aura un certain nombre de

racines. Or il existe entre ces racines des relations qui nous conduiront à l'expression de $\psi(x)$.

Si l'équation (5) passe le premier degré par rapport à x, désignons par x_1, une autre racine et par θ_1 la valeur correspondante de θ en sorte que $x_1=\lambda\theta_1$; $y=\psi(x)=\psi(x_1)$.

En vertu de (2) l'équation (1) deviendra en désignant le radical du premier membre par $\sqrt{R}$

$$\frac{dy}{\sqrt{R}}=\pm\, ad\theta.$$

En changeant x en x_1 ou ce qui revient au même θ en θ_1, la valeur de y reste la même et par conséquent $\frac{dy}{\sqrt{R}}$ reste la même ou se change en $-\frac{dy}{\sqrt{R}}$. On aura donc

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{R}}=\pm\, ad\theta_1$$

et par suite: $d\theta_1=\pm d\theta$, d'où l'on tire en intégrant $\theta_1=\alpha\pm\theta$, α étant une quantité indépendante de θ. On aura par conséquent $x_1=\lambda(\alpha\pm\theta)$. Il suffit de prendre θ avec le signe $+$ car on a d'après la formule (4) en y faisant $m=1$, $m'=0$, $\lambda\theta=\lambda(\omega-\theta)$ et par conséquent $\lambda(\alpha-\theta)=\lambda(\omega-\alpha+\theta)$, où $\omega-\alpha$ est une nouvelle constante. On pourra donc faire $x_1=\lambda(\theta+\alpha)$. On a ainsi établi ce théorème.

Théorème III. Si une racine de l'équation $y=\psi(x)$ est représentée par "$\lambda\theta$, une autre racine quelconque sera de la forme $\lambda(\theta+\alpha)$ où α est une quan-"tité constante."

Si l'on pouvait parvenir à trouver toutes les valeurs de α, rien ne serait plus facile que de déterminer ensuite celle de y. Or c'est cela que nous allons faire à l'aide du Théorème II. Les quantités $\lambda\theta$ et $\lambda(\theta+\alpha)$ étant des racines on aura à la fois:

$$y=\psi(\lambda\theta)=\psi(\lambda(\theta+\alpha))$$

équation qui doit avoir lieu pour une valeur quelconque de θ. On en tire en mettant au lieu de θ successivement $\theta+\alpha$, $\theta+2\alpha,\ldots\theta+k\alpha$:

$$\psi(\lambda\theta)=\psi(\lambda(\theta+\alpha))=\psi(\lambda(\theta+2\alpha))=\ldots=\psi(\lambda(\theta+k\alpha))$$

donc on aura

$$y=\psi(\lambda(\theta+k\alpha))$$

k désignant un nombre entier quelconque. On voit par là que non seulement $\lambda(\theta+\alpha)$ mais toute quantité de la forme $\lambda(\theta+k\alpha)$ sera une racine de l'équa-

tion $y = \psi(x)$. Or k pouvant avoir une infinité de valeurs différentes il faut nécessairement que plusieurs des quantités $\lambda(\theta + k\alpha)$ soient égales pour des valeur différentes de k, car l'équation $y = \psi(x)$ n'a qu'un nombre limité de racines.

Soit donc $\lambda(\theta + k\alpha) = \lambda(\theta + k'\alpha)$ où nous supposons k plus grand que k'. En mettant $\theta - k'\alpha$ au lieu de θ il viendra: $\lambda(\theta + (k - k')\alpha) = \lambda\theta$ ou bien en faisant $k - k' = n$:

$$6) \qquad \lambda(\theta + n\alpha) = \lambda\theta.$$

Cette équation détermine la valeur de α, car en vertu du Théorème II on en tire:

$$\theta + n\alpha = (-1)^{m+m'}.\theta + m\omega + m'\omega'$$

ce qui donne en remarquant que θ est variable: $(-1)^{m+m'} = 1$ et $n\alpha = m\omega + m'\omega'$; $m + m'$ doit donc être un nombre pair, et alors on aura:

$$7) \qquad \alpha = \frac{m}{n}.\omega + \frac{m'}{n}\omega'$$

$\frac{m}{n}$ et $\frac{m'}{n}$ pouvant désigner des quantités rationnelles quelconques; on voit donc que pour que la quantité $\lambda(\theta + \alpha)$ puisse être racine de l'équation $y = \psi(x)$ en même temps que $\lambda\theta$ il faut que la constante α ait la forme

$$8) \qquad \alpha = \mu\omega + \mu'\omega'$$

où μ et μ' sont des quantités rationnelles positives on négatives. La quantité α ayant une telle valeur, l'expression $\lambda(\theta + k\alpha)$ n'aura qu'un nombre limité de valeurs différentes, car ayant $\lambda(\theta + n\alpha) = \lambda\theta$ on aura de même $\lambda(\theta + (n+1)\alpha) = \lambda(\theta + \alpha)$; $\lambda(\theta + (n+2)\alpha) = \lambda(\theta + 2\alpha)$ etc.

Cela posé si le degré de l'équation $y = \psi(x)$ surpasse le nombre des valeurs inégales de $\lambda(\theta + k\alpha)$ soit $\lambda(\theta + \alpha_1)$ une nouvelle racine différente des racines $\lambda(\theta + k\alpha)$; on doit avoir de la même manière: $\alpha_1 = \mu_1\omega + \mu'_1\omega'$ et $\psi(\lambda\theta) = \psi(\lambda(\theta + k_1\alpha_1))$. En mettant $\theta + k\alpha$ au lieu de θ il viendra en remarquant que $\psi(\lambda(\theta + k\alpha)) = \psi(\lambda\theta) = y$

$$y = \psi(\lambda(\theta + k\alpha + k_1\alpha_1)),$$

donc $\lambda(\theta + k\alpha + k_1\alpha_1)$ sera une racine quels que soient les nombres entières k et k_1. Si maintenant le degré de l'équation $y = \psi(x)$ surpasse le nombre des valeurs inégales de l'expression $\lambda(\theta + k\alpha + k_1\alpha_1)$; soit $\lambda(\theta + \alpha_2)$ une nouvelle racine on doit avoir $\alpha_2 = \mu_2\omega + \mu'_2\omega'$ et $\psi(\lambda\theta) = \psi(\lambda(\theta + k_2\alpha_2))$ d'où l'on tire en mettant $\theta + k\alpha + k_1\alpha_1$ au lieu de θ

$$y = \psi(\lambda(\theta + k\alpha + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2))$$

et par conséquent toutes les quantités contenues dans l'expression $\lambda(\theta + k\alpha + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)$ seront des racines, quels que soient les nombres entiers k, k_1, k_2.

En continuant ce raisonnement jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les racines de l'équation $y = \psi(x)$, on aura donc le théorème suivant:

Théorème IV. Toutes les racines de l'équation $y = \psi(x)$ pourront être représentées par les valeurs inégales de l'expression:

$$\lambda(\theta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 \ldots + k_\nu\alpha_\nu)$$

en donnant à $k_1, k_2, \ldots k_\nu$ toutes les valeurs entières, et les quantités $\alpha_1 \alpha_2, \ldots \ldots \alpha_\nu$ étant de la forme

$$\mu\omega + \mu'\omega'$$

où μ et μ' sont des quantités rationnelles.

Cela posé designons ces valeurs de l'expression $\lambda(\theta + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots \ldots + k_\nu\alpha_\nu)$ par $\lambda(\theta)$, $\lambda(\theta + \alpha_1)$, $\lambda(\theta + \alpha_2), \ldots \lambda(\theta + \alpha_{m-1})$ et faisons $\psi(x) = \frac{p}{q}$, p et q étant des fonctions entières de x sans diviseur commun, on aura donc:

$$p - qy = A.(x - \lambda\theta)(x - \lambda(\theta + \alpha_1))(x - \lambda(\theta + \alpha_2)) \ldots (x - \lambda(\theta + \alpha_{m-1}))$$

équation qui à lieu pour une valeur quelconque de x. A est le coefficient de x^m dans $p - qy$, il est donc de la forme $f - gy$ où f et g sont des constantes. On aura par conséquent:

$$9) \quad p - qy = (f - gy)(x - \lambda\theta)(x - \lambda(\theta + \alpha_1)) \ldots (x - \lambda(\theta + \alpha_{m-1})).$$

De là on déduira une expression de y en θ en attribuant à x une valeur particulière, ou bien en comparant les coefficiens d'une même puissance de x dans les deux membres. Une telle expression de y contiendra trois quantités constantes inconnues, et le problème se réduit maintenant à trouver tous les cas dans lesquels ces trois quantités pourront être déterminées de la sorte que l'équation proposée soit satisfaite. Or nous allons voir tout-à-l'heure que cela sera toujours possible quelles que soient les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$; en déterminant convenablement deux des quantités a, e_1, c_1. Mais avant de considérer le cas général nous allons commencer par celui où p et q sont du premier degré, car un théorème qui en résulte nous sera utile pour parvenir à la solution du problème général.

Soit donc

$$y = \frac{f' + fx}{g' + gx}$$

on en tire:

$$1 \pm c_1 y = \frac{g' \pm c_1 f' + (g \pm c_1 f)x}{g' + gx}, \quad 1 \pm e_1 y = \frac{g' \pm e_1 f' + (g \pm e_1 f)x}{g' + gx}$$

$dy = \frac{fg' - f'g}{(g' + gx)^2}\, dx$. Par là l'équation (1) deviendra, en substituant:

$$\frac{fg'-f'g}{\sqrt{[(g'^2-c_1^2f'^2)(g'^2-e_1^2f'^2)]}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\left[\left(1+\frac{g+c_1f}{g'+c_1f'}\cdot x\right)\left(1+\frac{g-c_1f}{g'-c_1f'}x\right)\left(1+\frac{g+e_1f}{g'+e_1f'}x\right)\left(1+\frac{g-e_1f}{g'-e_1f'}x\right)\right]}}$$
$$=\pm a.\frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)]}}.$$

L'on trouve aisément que cette formule ne peut être satisfaite que de l'une des manières suivantes:

10) $\quad y=ax,\quad c_1^2=\frac{c^2}{a^2},\quad e_1^2=\frac{e^2}{a^2},$

11) $\quad y=\frac{a}{ec}\cdot\frac{1}{x},\quad c_1^2=\frac{c^2}{a^2},\quad e_1^2=\frac{e^2}{a^2},$

12) $\quad y=m.\frac{1-x\sqrt{ec}}{1+x\sqrt{ec}},\quad c_1=\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{\sqrt{c}-\sqrt{e}}{\sqrt{c}+\sqrt{e}}\right),$

$$e_1=\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{e}}{\sqrt{c}-\sqrt{e}}\right),\quad a=\frac{m\sqrt{-1}}{2}(c-e).$$

On peut prendre les quantités c, e, $\sqrt{c}$, $\sqrt{e}$ avec quel signe qu'on voudra.

Cela posé reprenons l'équation (9). En désignant par f' et g' les coefficiens de x^{m-1} dans p et q on aura:

$$f'-g'y=-(f-gy)\left(\lambda\theta+\lambda(\theta+\alpha_1)+\lambda(\theta+\alpha_2)+\ldots+\lambda(\theta+\alpha_{m-1})\right)$$

d'où l'on tire en faisant pour abréger

13) $\quad \varphi\theta=\lambda\theta+\lambda(\theta+\alpha_1)+\lambda(\theta+\alpha_2)+\ldots+\lambda(\theta+\alpha_{m-1}),$

14) $\quad y=\frac{f'+f.\varphi\theta}{g'+g.\varphi\theta},$

équation qui pourra servir à déterminer la fonction y excepté dans le cas où $\varphi\theta$ se réduit à une quantité constante.

Selon l'hypothèse y doit être une fonction rationnelle de x, donc la fonction $\varphi\theta$ le doit être de même. Il faut donc d'abord examiner dans quels cas cela pourra avoir lieu.

Soit $\lambda(\theta+\alpha)$ une quelconque des quantités $\lambda(\theta+\alpha_1)$, $\lambda(\theta+\alpha_2)$, ... il suit de ce qui précède que $\lambda(\theta+k\alpha)$ sera de même égale à l'une d'entre elles. Or soit $\lambda(\theta+n\alpha)=\lambda\theta$ ce qui a toujours lieu en déterminant convenablement le nombre entier n, on aura en mettant $\theta-\alpha$ au lieu de θ: $\lambda(\theta+(n-1)\alpha)=\lambda(\theta-\alpha)$ donc $\lambda(\theta-\alpha)$ sera encore contenue parmi les quantités dont il s'agit. De là suit que si $\lambda(\theta-\alpha_1)$ est différente de $\lambda(\theta+\alpha_1)$, la quantité $\lambda(\theta-\alpha_1)$ sera égale à l'une des quantités $\lambda(\theta+\alpha_2)$, $\lambda(\theta+\alpha_3)$, ... Cherchons donc d'abord les valeurs de α qui donneront $\lambda(\theta-\alpha)=\lambda(\theta+\alpha)$; c'est-à-dire $\lambda(\theta+2\alpha)=\lambda\theta$. Or selon l'équation (7) on en tire

$$\alpha = \frac{m}{2}\omega + \frac{m'}{2}\omega'$$

où $m+m'$ est un nombre pair. En donnant à m et m' toutes les valeurs entières depuis zero telles que $m+m'$ soit pair, $\lambda(\theta+\alpha)$ prendra les valeurs

$$\lambda\theta,\ \lambda(\theta+\omega),\ \lambda(\theta+\omega'),\ \lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),\ \lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),$$
$$\lambda(\theta+\omega+\omega'),\ \text{etc.}$$

mais, d'après le théorème II, il est clair que les seules de ces valeurs qui soient différentes entre elles sont celles-ci

$$\lambda\theta,\ \lambda(\theta+\omega),\ \lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),\ \lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),$$

donc puisque $\lambda(\theta+\alpha)$ doit être différent de $\lambda\theta$; $\lambda(\theta+\alpha)$ ne pourra avoir que l'une de ces trois valeurs

$$\lambda(\theta+\omega),\ \lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right),\ \lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right).$$

En exceptant ces quantités, il répond donc toujours à $\lambda(\theta+\alpha)$ une autre $\lambda(\theta-\alpha)$. De là il suit qu'on pourra écrire l'expression de $\varphi\theta$ comme il suit:

$$15)\quad \varphi\theta = \lambda\theta + k.\lambda(\theta+\omega) + k'.\lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right) + k''.\lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)$$
$$+\lambda(\theta+\alpha_1)+\lambda(\theta-\alpha_1)+\lambda(\theta+\alpha_2)+\lambda(\theta-\alpha_2)+\ldots+\lambda(\theta+\alpha_n)+\lambda(\theta-\alpha_n)$$

où k, k', k'' sont égaux à zéro ou à l'unité.

Pour avoir maintenant l'expression de $\varphi\theta$ en x il faut recourir à la formule (3), En y faisant d'abord $\theta' = \frac{\omega}{2}$ on aura $\lambda\theta' = \frac{1}{c}$ donc $\Delta(\theta') = 0$ et par conséquent:

$$\lambda\left(\theta \pm \frac{\omega}{2}\right) = \pm\frac{1}{c}\cdot\frac{\Delta(\theta)}{1-e^2\lambda^2\theta};$$

or $\Delta(\theta) = \sqrt{((1-e^2x^2)(1-c^2x^2))}$ donc:

$$\lambda\left(\theta \pm \frac{\omega}{2}\right) = \pm\frac{1}{c}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-c^2x^2}{1-e^2x^2}\right)}.$$

De la même manière on aura en faisant $\theta' = \frac{\omega'}{2}$

$$\lambda\left(\theta + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{e}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-e^2x^2}{1-c^2x^2}\right)}.$$

La 1ère formule donne

$$16)\qquad \lambda\left(\theta-\frac{\omega}{2}\right) = -\lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}\right)$$

donc en mettant $\theta+\frac{\omega}{2}$ au lieu de θ,

$$17)\qquad \lambda(\theta+\omega) = -\lambda\theta = -x.$$

En multipliant $\lambda\left(\theta-\frac{\omega}{2}\right)$ par $\lambda\left(\theta+\frac{\omega'}{2}\right)$ on aura

$$18)\qquad \lambda\left(\theta-\frac{\omega}{2}\right).\,\lambda\left(\theta+\frac{\omega'}{2}\right)=-\frac{1}{ec}$$

d'où l'on tire en mettant $\theta+\frac{\omega}{2}$ et $\theta+\frac{3\omega}{2}$ ou lieu de θ:

$$19)\qquad \begin{cases} \lambda\left(\theta+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=-\frac{1}{ec}\cdot\frac{1}{\lambda\theta}=-\frac{1}{ec}\cdot\frac{1}{x}, \\ \lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}\right)=-\frac{1}{ec}\cdot\frac{1}{\lambda(\theta+\omega)}=\frac{1}{ec}\cdot\frac{1}{x}. \end{cases}$$

La formule (3) donne encore en faisant $\theta'=\alpha$

$$20)\qquad \lambda(\theta+\alpha)+\lambda(\theta-\alpha)=\frac{2x.\Delta(\alpha)}{1-e^2c^2\lambda^2\alpha.x^2}.$$

Par là on voit donc que l'expression de $\varphi\theta$ sera toujours une fonction rationnelle de x savoir

$$21)\qquad \varphi\theta=(1-k)x+\frac{k''-k'}{ec}\cdot\frac{1}{x}+\Sigma\,\frac{2x.\Delta(\alpha)}{1-e^2c^2\lambda^2\alpha.x^2}$$

en employant pour abréger le signe de sommation Σ.

Cela posé il faut considérer plusieurs cas selon les valeurs différentes de k, k', k''.

Premier cas. Si $k=k'=k''=0$.

Si les trois quantités k, k', k'', sont égales à zéro l'expression de $\varphi\theta$ deviendra:

$$22)\quad \varphi\theta=\lambda\theta+\lambda(\theta+\alpha_1)+\lambda(\theta-\alpha_1)+\lambda(\theta+\alpha_2)+\lambda(\theta-\alpha_2)+\ldots+\lambda(\theta+\alpha_n)+\lambda(\theta-\alpha_n)$$

et

$$23)\qquad \varphi\theta=x+2x.\Sigma\,\frac{\Delta(\alpha)}{1-e^2c^2\lambda^2\alpha.x^2}.$$

Donc la première condition que y soit rationnelle en x est remplie. Il faut maintenant substituer son expression dans l'équation proposée et voir si elle pourra être satisfaite.

On tire d'abord de l'équation (14)

$$1\pm c_1y=\frac{g'\pm c_1f'+(g\pm c_1f).\varphi\theta}{g'+g.\varphi\theta},$$

$$1\pm e_1y=\frac{g'\pm e_1f'+(g\pm e_1f).\varphi\theta}{g'+g.\varphi\theta}.$$

Cela posé désignons par δ, δ', ε, ε' les valeurs de θ qui répondent respectivement á $y=+\frac{1}{c_1}$, $y=-\frac{1}{c_1}$, $y=+\frac{1}{e_1}$, $y=-\frac{1}{e_1}$ on doit avoir

$$24)\quad \begin{cases} g'-c_1f'+(g-c_1f).\varphi\delta=0, & g'+c_1f'+(g+c_1f)\varphi\delta'=0, \\ g'-e_1f'+(g-e_1f).\varphi\varepsilon=0, & g'+e_1f'+(g+e_1f)\varphi\varepsilon'=0. \end{cases}$$

En vertu de ces équations les valeurs de $1-c_1y$, $1+c_1y$, $1-e_1y$, $1+e_1y$ deviendront en faisant pour abréger

$$25)\quad g'+g.\varphi\theta=r,$$

$$26)\quad \begin{cases} 1-c_1y=\dfrac{g'-c_1f'}{r}\left(1-\dfrac{\varphi\theta}{\varphi\delta}\right), \\ 1+c_1y=\dfrac{g'+c_1f'}{r}\left(1-\dfrac{\varphi\theta}{\varphi\delta'}\right), \\ 1-e_1y=\dfrac{g'-e_1f'}{r}\left(1-\dfrac{\varphi\theta}{\varphi\varepsilon}\right), \\ 1+e_1y=\dfrac{g'+e_1f'}{r}\left(1-\dfrac{\varphi\theta}{\varphi\varepsilon'}\right). \end{cases}$$

En substituant dans $1-\dfrac{\varphi\theta}{\varphi\delta}$ l'expression de $\varphi\theta$ en x, on obtiendra un résultat de la forme:

$$1-\frac{\varphi\theta}{\varphi\delta}=\frac{1+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{2n+1}x^{2n+1}}{(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_1x^2)(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_2x^2)\ldots(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_nx^2)}$$

En faisant $\theta=\delta$ le second membre s'évanouira, mais il est clair par ce qui précède que $\varphi(\theta)$ ne change pas de valeur en mettant au lieu de θ une quelconque des quantités $\theta\pm\alpha_1$, $\theta\pm\alpha_2\ldots\theta\pm\alpha_n$. Donc le numérateur du second membre doit s'évanouir toutes les fois où x a une des valeurs $\lambda\delta$, $\lambda(\delta\pm\alpha_1)$, $\lambda(\delta\pm\alpha_2),\ldots\lambda(\delta\pm\alpha_n)$. Donc puisque le nombre de ces valeurs en général toutes différentes entre elles est $2n+1$ il s'ensuit que

$$1+A_1x+\ldots+A_{2n+1}x^{2n+1}=\left(1-\frac{x}{\lambda\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_1)}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_1)}\right)$$
$$\ldots\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_n)}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_n)}\right);$$

donc en substituant et faisant pour abréger,

$$27)\quad \rho=(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_1x^2)(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_2x^2)\ldots(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_nx^2)$$

$$28)\quad 1-\frac{\varphi\theta}{\varphi\delta}=\frac{1}{\rho}.\left(1-\frac{x}{\lambda\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_1)}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_1)}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_n)}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_n)}\right),$$

formule qui a lieu pour des valeurs quelconques de δ et θ.

A l'aide de cette formule il sera facile de trouver les cas dans lesquels on pourra satisfaire à l'équation proposée. On peut écrire cette équation comme il suit:

$$29)\quad \sqrt{((1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2))}=\frac{1}{a}\left(\frac{dy}{dx}\right)\sqrt{((1-c^2x^2)(1-e^2x^2))}$$

ce qui nous fait voir que l'une des quatre fonctions $1 \pm c_1 y$, $1 \pm e_1 y$ doit s'évanouir en attribuant à x une des quatre valeurs $\pm \frac{1}{c}, \pm \frac{1}{e}$ c'est-à-dire à θ une des valeurs $\pm \frac{\omega}{2}, \pm \frac{\omega'}{2}$.

Supposons d'abord $1 - c_1 y = 0$ pour $\theta = \frac{\omega}{2}$, $1 + c_1 y = 0$ pour $\theta = -\frac{\omega}{2}$, $1 - e_1 y = 0$ pour $\theta = \frac{\omega'}{2}$, $1 + e_1 y = 0$ pour $\theta = -\frac{\omega'}{2}$, on pourra prendre $\delta = \frac{\omega}{2}$, $\delta' = -\frac{\omega}{2}$, $\varepsilon = \frac{\omega'}{2}$, $\varepsilon' = -\frac{\omega'}{2}$. En substituant ces valeurs dans les équations (24) et remarquant que $\varphi\left(-\frac{\omega}{2}\right) = -\varphi\frac{\omega}{2}$, $\varphi\left(-\frac{\omega'}{2}\right) = -\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right)$, on en tire:

$$g' = c_1 f . \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1 f . \varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right);\ f' = \frac{g}{c_1}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{g}{e_1}\varphi\left(\frac{\omega'}{2}\right).$$

On satisfait à ces équations en prenant:

$$30)\quad g = f' = 0,\ \frac{f}{g'} = \frac{1}{k},\ c_1 = \frac{k}{\varphi\frac{\omega}{2}},\ e_1 = \frac{k}{\varphi\frac{\omega'}{2}}$$

où k est arbitraire.

La valeur de y deviendra donc:

$$31)\qquad y = \frac{1}{k} . \varphi\theta$$

et ensuite:

$$1 \pm c_1 y = 1 \pm \frac{\varphi\theta}{\varphi\frac{\omega}{2}},\ 1 \pm e_1 y = 1 \pm \frac{\varphi\theta}{\varphi\frac{\omega'}{2}}.$$

Cela posé faisons dans la formule (28) $\delta = \pm\frac{\omega}{2}, \pm\frac{\omega'}{2}$ on obtiendra:

$$32)\ 1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{\rho}.\left\{1 - \frac{x}{\lambda\frac{\omega}{2}}\right\}\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha_1\right)}\right\}\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)}\right\}\cdots\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha_n\right)}\right\}\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right)}\right\};$$

or $\lambda\frac{\omega}{2} = \frac{1}{c}$, et d'après la formule (16) or aura $\lambda\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) = \lambda\left(\frac{\omega}{2} - \alpha\right)$ donc

$$33)\ 1 - \frac{\varphi\theta}{\varphi\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{\rho}(1 - cx)\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)}\right\}^2\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_2\right)}\right\}^2\cdots\left\{1 - \frac{x}{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right)}\right\}^2.$$

On aura des expressions analogues pour $1 + \frac{\varphi\theta}{\varphi\frac{\omega}{2}}$, $1 \pm \frac{\varphi\theta}{\varphi\frac{\omega'}{2}}$ en faisant $\delta = -\frac{\omega}{2}$, $\delta = \pm\frac{\omega'}{2}$.

En faisant donc pour abréger

$$34)\quad \begin{cases} t = \left\{1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)}\right\}\left\{1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_2\right)}\right\}\cdots\left\{1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right)}\right\} \\ t' = \left\{1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_1\right)}\right\}\left\{1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_2\right)}\right\}\cdots\left\{1 - \dfrac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_n\right)}\right\} \end{cases}$$

on trouvera:

$$35)\quad 1-c_1^2y^2 = (1-c^2x^2).\frac{t^2}{\rho^2},\quad 1-e_1^2y^2 = (1-e^2x^2).\frac{t'^2}{\rho^2},$$

et de là

$$36)\quad \sqrt{((1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2))} = \pm\frac{tt'}{\rho^2}\sqrt{((1-c^2x^2)(1-e^2x^2))}.$$

Maintenant les deux équations (35) nous montrent que $\rho^2\frac{dy}{dx}$ est une fonction entière de x qui est divisible par les deux fonctions entières t et t'; donc puisque ces fonctions n'ont point de diviseur commun il en résulte que $\rho^2\frac{dy}{dx}$ sera divisible par leur produit, mais le degré de la fonction $\rho^2\frac{dy}{dx}$ est précisement le même que celui de la fonction tt' savoir $4n$. Donc l'expression $\dfrac{\rho^2\frac{dy}{dx}}{tt'}$ se réduit à une constante. En la désignant par a on aura donc

$$37)\quad dy = a.\frac{tt'}{\rho^2}.dx,$$

et par suite l'équation (36) donnera

$$38)\quad \frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)]}} = \pm a\frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)]}},$$

c'est-à-dire l'équation proposée.

Pour déterminer le coefficient a faisons dans (37) x infini, on obtiendra d'après les valeurs des fonctions ρ, t, t'

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{(-e^2c^2)^{2n}.\lambda^4\alpha_1.\lambda^4\alpha_2\ldots\lambda^4\alpha_n.\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)\ldots\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right).\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_1\right)\ldots\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha_n\right)};$$

mais d'après (18) on a: $\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right).\lambda^2\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{c^2e^2}$,

donc

$$39)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\lambda^4\alpha_1.\lambda^4\alpha_2\ldots\lambda^4\alpha_n}.\frac{1}{(e^2c^2)^n};$$

or en différentiant l'équation

40) $$y = \frac{1}{k}.\varphi\theta = \frac{1}{k}\left(x + 2x.\Sigma \frac{\Delta(\alpha)}{1 - e^2c^2\lambda^2\alpha . x^2}\right)$$

et faisant ensuite $x = \frac{1}{0}$ on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{k}$. En égalant cette valeur à la précédente on en tire:

41) $$a = (e^2c^2)^n . \frac{1}{k}.\lambda^4\alpha_1 . \lambda^4\alpha_2 \ldots \lambda^4\alpha_n.$$

On pourra donner à l'expression de y une autre forme plus simple à quelques égards. En multipliant les deux membres de l'équation (28) par $\varphi\delta$ et faisant ensuit $\delta = 0$ il viendra

$$\varphi\theta = \frac{Ax}{\rho}.\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\alpha_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\alpha_n}\right)$$

où A est une quantité constante. En attribuant à x la valeur $\frac{1}{0}$ après avoir divisé par x on trouvera:

42) $$A = (e^2c^2)^n . \lambda^4\alpha_1 . \lambda^4\alpha_2 \ldots \lambda^4\alpha_n = ak.$$

L'expression de y deviendra donc:

43) $$y = a.\frac{x\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\alpha_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2\alpha_n}\right)}{(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_1 x^2)(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_2 x^2)\ldots(1 - e^2c^2\lambda^2\alpha_n x^2)}.$$

Il y a encore une autre manière d'exprimer y qui est très simple. En faisant dans (28) $x = \frac{1}{0}$ après avoir divisé les deux membres par x on trouvera

44) $$\begin{cases} \varphi\delta = (e^2c^2)^n . \lambda^2\alpha_1 . \lambda^2\alpha_2 \ldots \lambda^2\alpha_n . \lambda\delta . \lambda(\alpha_1 + \delta).\lambda(\alpha_1 - \delta)\ldots\lambda(\alpha_n + \delta).\lambda(\alpha_n - \delta) \\ \quad = \lambda\delta + \lambda(\delta + \alpha_1) + \lambda(\delta - \alpha_1) + \ldots + \lambda(\delta + \alpha_n) + \lambda(\delta - \alpha_n) \end{cases}$$

formule qui a lieu pour une valeur quelconque de δ.

En mettant donc θ au lieu de δ et multipliant par $\frac{1}{k}$ on aura y exprimé comme il suit:

35) $$y = \frac{1}{k}(ec)^{2n} . b . \lambda\theta . \lambda(\alpha_1 + \theta).\lambda(\alpha_1 - \theta)\ldots\lambda(\alpha_n + \theta).\lambda(\alpha_n - \theta)$$

où l'on a fait pour abréger:

46) $$b = \lambda^2\alpha_1 . \lambda^2\alpha_2 . \lambda^2\alpha_3 \ldots \lambda^2\alpha_n.$$

En faisant $\theta = +\frac{\omega}{2}$, $\theta = +\frac{\omega'}{2}$ les valeurs correspondantes de y seront $\frac{1}{c_1}$ et $\frac{1}{e_1}$ donc:

47) $$\begin{cases} \frac{1}{c_1} = \frac{b}{k}\, e^{2n} . c^{2n-1} . \left[\lambda\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_1\right).\lambda\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_2\right)\ldots\lambda\left(\frac{\omega}{2} - \alpha_n\right)\right]^2 \\ \frac{1}{e_1} = \frac{b}{k}\, e^{2n-1} . c^{2n} . \left[\lambda\left(\frac{\omega'}{2} - \alpha_1\right).\lambda\left(\frac{\omega'}{2} - \alpha_2\right)\ldots\lambda\left(\frac{\omega'}{2} - \alpha_n\right)\right]^2. \end{cases}$$

Si donc les quantités c_1, e_1, a, y ont les valeurs exprimées par les équations (43, 45, 47), l'équation (1) sera satisfaite en déterminant convenablement le signe du second membre. Il faut remarquer que ce signe n'est pas le même pour toutes les valeurs de x; mais il sera toujours le même pour des valeurs de x entre certaines limites. On doit prendre le signe $+$ si x est très petit; et alors on doit conserver le même signe jusqu'à une certaine limite. Dans tous les cas le signe qu'il faut prendre se détermine par l'équation (36).

Le théorème de *Mr. Jacobi* est contenu comme cas particulier dans ce qui précède. En effet on l'obtiendra en faisant $\alpha_1 = \frac{2\omega}{2n+1}$, $c = 1$, $c_1 = 1$. Alors on trouvera $\alpha_2 = \frac{4\omega}{2n+1}$, $\alpha_3 = \frac{6\omega}{2n+1}$, $\ldots \alpha_n = \frac{2n\omega}{2n+1}$

$$48)\quad \begin{cases} k = b.e^{2n}\left[\lambda\left(\frac{1}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right).\,\lambda\left(\frac{3}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)\ldots\lambda\left(\frac{2n-1}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)\right]^2 \\ e_1 = e^{2n+1}.\left[\lambda\left(\frac{1}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right).\,\lambda\left(\frac{3}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)\ldots\lambda\left(\frac{2n-1}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)\right]^4 \\ a = \left\{\dfrac{\lambda\left(\frac{\omega}{2n+1}\right).\lambda\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right).\,\lambda\left(\frac{3\omega}{2n+1}\right)\ldots\lambda\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\lambda\left(\frac{1}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right).\lambda\left(\frac{3}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)\ldots\lambda\left(\frac{2n-1}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)}\right\}^2 \\ y = \dfrac{\lambda\theta.\lambda\left(\frac{2\omega}{2n+1}+\theta\right).\,\lambda\left(\frac{2\omega}{2n+1}-\theta\right)\ldots\lambda\left(\frac{2n\omega}{2n+1}+\theta\right).\,\lambda\left(\frac{2n\omega}{2n+1}-\theta\right)}{\left[\lambda\frac{1}{2n+1}.\,\frac{\omega}{2}.\lambda\frac{3}{2n+1}.\,\frac{\omega}{2}\ldots\lambda\left(\frac{2n-1}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)\right]^2} \\ \dfrac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-e_1^2y^2)]}} = \pm\, a\,\dfrac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-e^2x^2)]}} = \pm a.d\theta. \end{cases}$$

Il faut prendre le signe supérieur si x est compris entre les limites $+\lambda\left(\frac{4m+1}{2n+1}.\frac{\omega}{2}\right)$ et $+\lambda\left(\frac{4m+3}{2n+1}.\,\frac{\omega}{2}\right)$ et le signe inférieur si x est compris entre les limites $\lambda\left(\frac{4m+3}{2n+1}.\,\frac{\omega}{2}\right)$ et $\lambda\left(\frac{4m+5}{2n+1}.\,\frac{\omega}{2}\right)$.

En faisant dans notre formule générale $\alpha_1 = \frac{m\omega+m'\omega'}{2n+1}$ où $m+m'$ est un nombre pair et où les trois nombres m, m', $2n+1$ ne sont divisibles par le même facteur on aura une formule plus générale que celle de *Mr Jacobi* savoir celle que j'ai demontré dans les "Recherches sur les fonctions elliptiques." On aura dans ce cas en faisant $\alpha = \frac{m\omega+m'\omega'}{2n+1}$; $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 2\alpha$, $\alpha_3 = 3\alpha, \ldots$ $\ldots \alpha_n = n\alpha$, ce qui suffit pour déterminer les quantités c_1, e_1, a et y.

Dans ce qui précède nous avons démontré qu'on aura une valeur convenable de la fonction y en prenant dans l'expression générale de cette fonction $y = \frac{f' + f\varphi\theta}{g' + g\varphi\theta}$, $f' = g = 0$. On peut aisément trouver tous les autres cas possibles à l'aide des formules (10, 11, 12). Soit

$$49) \qquad y_1 = \frac{f' + f.\varphi\theta}{g' + g.\varphi\theta}$$

et désignons par c_2, e_2, les valeurs correspondantes de c_1 et e_1 on doit avoir

$$50) \qquad \frac{dy_1}{\sqrt{[(1-c_2^2 y_1^2)(1-e_2^2 y_1^2)]}} = \pm\, a_1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-e^2x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

mais en faisant $y = \frac{1}{k}\, \varphi\theta$ le second membre sera d'après ce qui précède égal à $\pm \frac{a_1}{a} \cdot \frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2 y^2)(1-e_1^2 y^2)]}}$, donc on doit avoir

$$51) \qquad \frac{dy_1}{\sqrt{[(1-c_2 y_1^2)(1-e_2^2 y_1^2)]}} = \pm \frac{a_1}{a} \cdot \frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2 y^2)(1-e_1^2 y^2)]}}$$

où

$$y_1 = \frac{f' + f.y}{g' + g.y}.$$

Selon les équations (10, 11, 12) on satisfait de la manière la plus générale à ces équations en prenant

$$52) \begin{cases} \text{a.} \quad y_1 = \pm \frac{a_1}{a} \cdot y, \quad c_2^2 = \frac{c_1^2 a^2}{a_1^2}, \quad e_2^2 = \frac{e_1^2 a^2}{a_1^2}, \\ \text{b.} \quad y_1 = \pm \frac{a_1}{a e_1 c_1} \cdot \frac{1}{y}, \quad c_2^2 = \frac{c_1^2 a^2}{a_1^2}, \quad e_2^2 = \frac{e_1^2 a^2}{a_1^2}, \\ \text{c.} \quad y_1 = m \frac{1 - y.\sqrt{(\pm e_1 c_1)}}{1 + y.\sqrt{(\pm e_1 c_1)}}, \quad c_2 = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\sqrt{c_1} - \sqrt{\pm e_1}}{\sqrt{c_1} + \sqrt{\pm e_1}}\right)^2, \quad e_2 = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{\pm e_1}}{\sqrt{c_1} - \sqrt{\pm e_1}}\right)^2, \quad \frac{a_1}{a} = \frac{m\sqrt{-1}}{2}(c_1 \mp e_1). \end{cases}$$

Ces trois formules en y faisant $y = \frac{1}{k} . \varphi\theta$ contiendront donc toutes les manières possibles de satisfaire à l'équation (50).

On peut sans nuire à la généralité faire $k = 1$. La 1ère de ces formules est la même que celle qui résulte de $y = \frac{1}{k} . \varphi\theta$. La seconde en résulte en mettant $\frac{1}{e_1 c_1} \cdot \frac{1}{y}$ au lieu de y. Les modules restent par cette substitution les mêmes. La troisième est en général différente des deux premières.

Deuxième cas. Si $k = 0$ et l'une des quantités k', k'' égale à l'unité.

Si, k étant égal à zéro, l'une des quantités k', k'' est égale a l'unité il faut nécessairement que l'autre soit égale à zéro. En effet si l'on avait $k' = k'' = 1$, les racines $\lambda\left(\theta + \frac{\omega + \omega'}{2}\right)$, $\lambda\left(\theta + \frac{3\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right)$ donneraient celle-ci

$\lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}-\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\lambda(\theta+\omega)$, c'est-à-dire k ne serait pas égal à zéro comme nous l'avons supposé. Désignons donc par β l'une des quatités $\frac{\omega+\omega'}{2}$, $\frac{3\omega+\omega'}{2}$ l'expression de $\varphi\theta$ deviendra:

53) $\varphi\theta=\lambda\theta+\lambda(\theta+\beta)+\lambda(\theta+\alpha_1)+\lambda(\theta-\alpha_1)+\ldots+\lambda(\theta+\alpha_n)+\lambda(\theta-\alpha_n)$

et exprimée en x.

54) $$\varphi\theta=x\pm\frac{1}{ec}\cdot\frac{1}{x}+2x.\Sigma\frac{\Delta(\alpha)}{1-e^2c^2\lambda^2\alpha.x^2}.$$

Soit comme dans le premier cas $1-c_1y=0$ pour $x=\frac{1}{c}$ on aura:

$$1\pm c_1y=\frac{g'\pm c_1f'}{r}\cdot\left\{1\pm\frac{\varphi\theta}{\varphi\frac{\omega}{2}}\right\}$$

55) $$1-c_1^2y^2=\frac{g_1^2-c_1^2f'^2}{r^2}\cdot\left\{1-\left(\frac{\varphi\theta}{\varphi\frac{\omega}{2}}\right)^2\right\}.$$

Maintenant entièrement de la même manière qu'on a démontré précédemment la formule (28) on établira la suivante:

56) $$1-\frac{\varphi\theta}{\varphi\delta}=\frac{1}{\rho}\cdot\left(1-\frac{x}{\lambda\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta+\beta)}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_1)}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_1)}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta+\alpha_n)}\right)\left(1-\frac{x}{\lambda(\delta-\alpha_n)}\right),$$

où l'on a fait pour abréger:

57) $\rho=\pm ecx.(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_1x^2)(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_2x^2)\ldots(1-e^2c^2\lambda^2\alpha_nx^2)$.

En faisant $\delta=\pm\frac{\omega}{2}$ on aura les valeurs de $1+\frac{\varphi\theta}{\varphi\frac{\omega}{2}}$ et $1-\frac{\varphi\theta}{\varphi\frac{\omega}{2}}$ qui multipliées entre elles donneront celle de $1-\left\{\frac{\varphi\theta}{\varphi\frac{\omega}{2}}\right\}^2$. Cette valeur substituée dans l'expression de $1-c_1^2y^2$ (55) donnera:

$$1-c_1^2y^2=\frac{g'^2-c_1^2f'^2}{r^2.\rho^2}(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)}\right\}^2\ldots\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right)}\right\}^2,$$

et par conséquent si l'on fait

58) $$t=\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_1\right)}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_2\right)}\right\}\ldots\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\alpha_n\right)}\right\}.$$

$$59)\quad \sqrt{(1-c_1^2y^2)}=\frac{\sqrt{(g'^2-c_1^2f^2)}}{r.\rho}.t.\sqrt{((1-c^2x^2)(1-e^2x^2))}.$$

Cette valeur mise dans l'équation (29) donne

$$60)\quad \sqrt{(1-e_1^2y^2)}=\frac{1}{a\sqrt{(g'^2-c_1^2f'^2)}}\cdot\frac{r.\rho}{t}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

On voit donc que $\sqrt{(1-e_1^2y^2)}$ doit être une fonction rationnelle de x. Il n'est pas difficile de démontrer qu'on satisfera à cette condition en supposant que $1-e_1^2y^2$ s'évanouit pour $x=\pm\lambda\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)$ et on aura alors:

$$61)\quad \sqrt{(1-e_1^2y^2)}=\frac{\sqrt{(g'^2-e_1^2f'^2)}}{r.\rho}\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega-\beta}{2}-\alpha_1\right)}\right\}\cdots\left\{1-\frac{x^2}{\lambda^2\left(\frac{\omega-\beta}{2}-\alpha_n\right)}\right\}.$$

Les équation (24) donneront dans ce cas:

$$g'=c_1f\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=e_1f\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right);$$

$$f'=\frac{g}{c_1}\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{g}{e_1}\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)$$

auxquelles on satisfera en prenant $f=g'=0$

$$\frac{f'}{g}=\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}{c_1}=\frac{\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)}{e_1}.$$

De là résulte:

$$62)\qquad c_1=k.\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right);\ e_1=k.\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)$$

$$y=\frac{1}{k\varphi\theta}\qquad a=\frac{ec}{k}.$$

Connaissant ainsi une solution de l'équation proposée on aura toutes les autres possibles à l'aide des formules (10), (11), (12). Le cas le plus simple est celui où $n=0$. Alors on aura en faisant $c_1=c=1$, $\beta=\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}$:

$$\varphi\theta=\lambda\theta+\lambda(\theta+\beta)=x+\frac{1}{ex},$$

$$63)\quad \begin{cases} y=(1+e)\cdot\frac{x}{1+ex^2},\quad e_1=\frac{2\sqrt{e}}{1+e},\\ \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-e_1^2y^2)]}}=(1+e)\cdot\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-e^2x^2)]}}.\end{cases}$$

Troisième cas. Si $k=1$.

Dans ce cas l'expression (15) de $\varphi\theta$ deviendra,

$$\varphi\theta=\lambda\theta+\lambda(\theta+\omega)+\lambda(\theta+\alpha_1)+\lambda(\theta-\alpha_1)+\ldots+\lambda(\theta+\alpha_n)+\lambda(\theta-\alpha_n).$$

Or cette quantité se réduit à zéro pour une valeur quelconque de θ dont on pourra se convaincre aisément en remarquant que $\varphi\theta$ doit rester le même en changeant $\theta+\omega$ en θ c'est-à-dire $+\theta$ en $-\theta$.

La fonction $\varphi\theta$ étant égale à zéro si l'on désigne par $\frac{1}{2}(f'-g'y)$ le coefficient de x^{m-2} dans le premier membre de l'équation (9) on aura en faisant pour abréger

$$F\theta = \lambda^2\theta + \lambda^2(\theta+\alpha) + \dots + \lambda^2(\theta+\alpha_m),$$

$f'-g'y = -(f-gy).F\theta$, d'où l'on tire,

$$64)\qquad y = \frac{f'+f.F\theta}{g'+g.F\theta}.$$

Maintenant il n'est pas difficile de trouver toutes les solutions qui résultent de ce troisième cas en se servant de l'expression (64). Je ne m'arrêterai pas ici à développer les formules mêmes, je vais seulement faire connaître un théorème plus général que celui exprimé par les formules (48).

Théorème. On aura:

$$65)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-e_1^2y^2)]}} = \pm \dfrac{adx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-e^2x^2)]}} = \pm\, ad\theta, \\ \text{où } a = k.\lambda\dfrac{\omega}{n}.\lambda\dfrac{2\omega}{n}\dots\lambda\dfrac{(n-1)\omega}{n},\quad e_1 = e^n.\left(\lambda\dfrac{\omega}{2n}.\lambda\dfrac{3\omega}{2n}\dots\lambda(n-\tfrac{1}{2})\dfrac{\omega}{n}\right)^2, \\ 1 = k.\lambda\dfrac{\omega}{2n}.\lambda\dfrac{3\omega}{2n}\dots\lambda(n-\tfrac{1}{2})\dfrac{\omega}{n},\quad y = k.\lambda\theta.\lambda\left(\theta+\dfrac{\omega}{n}\right).\lambda\left(\theta+\dfrac{2\omega}{n}\right)\dots\lambda\left(\theta+\dfrac{(n-1)\omega}{n}\right) \\ n \text{ étant un nombre entier quelconque, } \dfrac{\omega}{2} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-e^2x^2)]}}. \end{array}\right.$$

En supposant n impair la formule (65) est la même que celle que nous avons trouvé (48).

Si l'on fait $x=\sin\varphi$, $y=\sin\psi$ on obtiendra

$$66)\qquad \frac{d\psi}{\sqrt{(1-e_1^2\sin^2\psi)}} = a\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}},$$

où l'on pourra exprimer la quantité ψ comme il suit:

$$67)\qquad \begin{aligned} \psi = \varphi &+ \text{Arct.}\left\{\text{tang}\,\varphi.\sqrt{\left[1-e^2\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)\right]}\right\} \\ &+ \text{Arct.}\left\{\text{tang}\,\varphi.\sqrt{\left[1-e^2\lambda^2\left(\frac{2\omega}{n}\right)\right]}\right\} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \text{Arct.}\left\{\text{tang}\,\varphi.\sqrt{\left[1-e^2\lambda^2\left(\frac{n-1}{n}\omega\right)\right]}\right\}. \end{aligned}$$

En supposant $n=2$ on aura

$$\psi = \varphi + \text{Arct.}\,(\tang\varphi.\sqrt{(1-e^2)}),$$

ou bien

$$\tang(\psi-\varphi) = \tang\varphi.\sqrt{(1-e^2)}.$$

(Voyez: *Legendre* Exercices T. I. p. 84.)

Si l'on suppose n très grand on aura à peu près $e_1 = 0$, donc

$$\psi = a.\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}} = \sum_0^{n-1}{}_m \text{Arct.}\left\{\tang\varphi.\sqrt{\left[1-e^2\lambda^2\left(\frac{m\omega}{n}\right)\right]}\right\}.$$

Soit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ on aura $\psi = n.\frac{\pi}{2}$, donc $n\frac{\pi}{2} = a.\frac{\omega}{2}$, donc $\frac{1}{a} = \frac{1}{\pi}.\frac{\omega}{n}$. De la il résulte en faisant n infini

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}} = \frac{1}{\pi}.\int_0^\omega \text{Arct.}\,(\tang\varphi.\sqrt{(1-e^2\lambda^2 x)}).dx.$$

Nous avons vu précédemment que le nombre des valeurs inégales de l'expression $\lambda(\theta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_\nu\alpha_\nu)$ est toujours fini. On peut dans tous les cas trouver ces valeurs comme il suit.

Soient

$$68)\quad \begin{cases} \lambda(\theta+n_1\alpha_1) = \lambda\theta, \\ \lambda(\theta+n_2\alpha_2) = \lambda(\theta+m_1\alpha_1), \\ \lambda(\theta+n_3\alpha_3) = \lambda(\theta+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda(\theta+n_\nu\alpha_\nu) = \lambda(\theta+m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\ldots+m_{\nu-1}\alpha_{\nu-1}), \end{cases}$$

où n_1, n_2, n_3, ... n_ν sont les nombres entiers les plus petits possibles qui puissent satisfaire à des équations de cette forme, m_1, m_2, ... $m_{\nu-1}$ étant des nombres entiers qui pourront être différents dans les différentes équations. Cela posé je dis qu'on aura toutes les valeurs inégales de l'expression $\lambda(\theta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_\nu\alpha_\nu)$ en attribuant à k_1, k_2, ... k_ν toutes les valeurs entières et positives respectivement moindres que n_1, n_2, ... n_ν. En effet si l'on avait

$$\lambda(\theta+k'_1\alpha_1+k'_2\alpha_2+\ldots+k'_\nu\alpha_\nu) = \lambda(\theta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_\nu\alpha_\nu)$$

où l'on n'a pas à la fois

$$k'_1 = k_1,\ k'_2 = k_2, \ldots k'_\nu = k_\nu,$$

on en tirerait en mettant

$\theta-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\ldots-k_{m-1}\alpha_{m-1}-k'_m\alpha_m-k_{m+1}\alpha_{m+1}-\ldots-k_\nu\alpha_\nu$ au lieu de θ

$$\lambda(\theta+(k_m-k'_m)\alpha_m) = \lambda(\theta+(k'_1-k_1)\alpha_1+(k'_2-k_2)\alpha_2+\ldots+(k'_{m-1}-k_{m-1})\alpha_{m-1}),$$

où l'on a supposé que $k_m-k'_m$ est la première des quantités $k_\nu-k'_\nu$,

$k_{\nu-1}-k'_{\nu-1}, \ldots$ qui soit différente de zéro. Or en supposant ce qui est permis que $k_m-k'_m$ soit positif ce nombre sera en même temps moindre que n_m ce qui est contre l'hypothèse. Le nombre total des valeurs inégales de l'expression $\lambda(\theta+k_1\alpha_1+k_2k_2+\ldots+k_\nu\alpha_\nu)$ sera donc égal à

$$n_1.n_2.n_3\ldots n_\nu,$$

car il est clair qu'on n'aura pas des valeurs nouvelles en attribuant à k_1, k_2, $\ldots k_\nu$ des valeurs respectivement plus grandes que n_1, $n_2, \ldots n_\nu$.

Le degré de l'équation $p-qy=0$ est donc

$$m=n_1.n_2.n_3\ldots n_\nu.$$

Si donc ce degré doit être un nombre premier on doit avoir $\nu=1$ et $m=n_1$. Les racines de l'équation $p-qy=0$ deviendront donc dans ce cas:

$$\lambda\theta,\ \lambda(\theta+\alpha),\ \lambda(\theta+2\alpha), \ldots \lambda(\theta+(n-1)\alpha),$$
$$\lambda(\theta+n\alpha)=\lambda\theta,$$
$$\text{et}\quad \alpha=\frac{m\omega+m'\omega'}{n},$$

m et m' étant deux nombres entiers dont la somme est un nombre pair et qui n'ont pas le même commun diviseur avec n.

On doit remarquer qu'à la même valeur de m répondent toujours plusieurs solutions différentes du problème général. Le nombre total de ces solutions est en général égal à $3m$.

On peut de ce qui précède déduire un grand nombre de théorèmes remarquables sur les fonctions elliptiques. Parmi ceux-ci on doit distinguer les suivants.

a. Si l'équation (1) pourra être satisfaite en supposant $y=\psi(x)=\frac{p}{q}$ où le degré des fonctions entières p et q est égal à un nombre composé $m.n$, on pourra toujours trouver des fonctions rationnelles φ et f telles qu'en faisant:

$$69)\quad \begin{cases} x_1=\varphi x=\frac{p'}{q'} \text{ on ait } y=f(x_1)=\frac{p_1}{q_1}, \\ \frac{dx_1}{\sqrt{[(1-c_2^2x_1^2)(1-e_2^2x_1^2)]}}=a_1\cdot\frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)]}}, \\ \frac{dy_1}{\sqrt{[(1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2)]}}=a_2\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{[(1-c_2^2x_1^2)(1-e_2^2x_1^2)]}}, \end{cases}$$

le degré des fonctions entières p' et q' étant égal à l'un des facteurs m et n et le degré de p_1 et q_1 étant égal à l'autre.

b. Quel que soit le degré de l'équation $p-qy=0$, on en pourra toujours tirer la valeur de x en y à l'aide d'opérations algébriques. Voilà donc

une classe d'équations qui sont résolubles algébriquement. Les racines auront la forme suivante:

$$70)\qquad x = \text{fonct. ration.}\left(y,\ r_1^{\frac{1}{n_1}},\ r_2^{\frac{1}{n_2}},\ r_3^{\frac{1}{n_3}}\ldots r_\nu^{\frac{1}{n_\nu}}\right),$$

$n_1, n_2, \ldots n_\nu$ étant des nombres premiers entre eux dont le produit est égal au degré de l'équation en question, et les $r_1, r_2, \ldots r_\nu$ de la forme

$$71)\qquad \zeta + t\sqrt{((1-c_1^2y^2)(1-e_1^2y^2))}$$

où ζ et t sont des fonctions entières de y.

c. Il y a un cas remarquable du problème général, c'est celui où l'on demande toutes les solutions possibles de l'équation:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-c^2y^2)(1-e^2y^2)]}} = a \cdot \frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)]}}.$$

On aura à cet égard le théorème suivant.

Si l'équation précédente admet une solution *algébrique* en x et y, y étant rationnelle en x ou non, la quantité constante a doit nécessairement avoir la forme

$$\mu' + \sqrt{-\mu}$$

où μ' et μ désignent deux nombres rationnels, le dernier étant essentiellement *positif*. Si l'on attribue à a une telle valeur on pourra trouver une infinité de valeurs différentes pour e et c, qui rendent le problème possible. Toutes ces valeurs sont exprimables par des *radicaux*.

Si donc on suppose que a soit une quantité réelle il faut qu'elle soit en même temps rationnelle. Dans ce cas on sait d'ailleurs qu'on pourra satisfaire à l'équation différentielle dont il s'agit quelles que soient les valeurs des quantités c et e.

d. Du théorème précédent, on peut par un simple changement de variables déduire ce-ci.

Si l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-b^2y^2)]}} = a \cdot \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$$

où $b^2 = 1 - c^2$ admet une solution algébrique entre x et y, le coefficient a doit avoir la forme suivante:

$$\sqrt{\mu'} + \mu.\sqrt{-1}$$

μ' et μ ayant la même signification que précédemment. Si donc l'on veut que a soit réelle il faut qu'elle soit égale à la racine carrée d'une quantité rationnelle. Cette condition remplit le problème à une infinité de solutions. Comme cas particulier on en déduit le théorème:

Si en supposant φ et ψ réels et le module c moindre que l'unite, l'équation

$$72)\qquad \frac{d\psi}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\psi)}}=a.\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}},$$

a une intégrale algébrique entre sin φ et sin ψ il faut nécessairement que a soit égal à la racine carrée d'une quantité rationnelle et positive.

Ainsi par exemple si l'on suppose $e_1^2=1-e^2$ on aura $a=\sqrt{n}$ comme nous allons voir.

En faisant dans l'expression (65) de y, $\theta=\frac{\omega}{2n}$ on trouvera, en vertu de la valeur de k, $y=1$ donc

$$73)\qquad \int_0^1\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-e_1^2y^2)]}}=a\int_0^{\lambda\left(\frac{\omega}{2n}\right)}\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-e^2x^2)]}}=\frac{a\omega}{2n},$$

en remarquant qu'on doit dans le second membre de l'équation (65) prendre le signe supérieur depuis $x=0$ jusqu'à $x=\lambda\left(\frac{\omega}{2n}\right)$. Cela posé en remarquant que $\lambda\left(\theta+\frac{m\omega}{n}\right)=\lambda\left(\frac{(n-m)\omega}{n}-\theta\right)$, il est clair qu'on aura:

$$y=k.\lambda\theta.\lambda\left(\frac{\omega}{n}-\theta\right).\lambda\left(\frac{2\omega}{n}-\theta\right)\ldots\lambda\left(\frac{(n-1)\omega}{n}-\theta\right),$$

en multipliant cette valeur avec celle que donne (65) on aura en faisant usage de la formule

$$\lambda(\alpha+\theta).\lambda(\alpha-\theta)=\frac{\lambda^2\alpha-\lambda^2\theta}{1-e^2\lambda^2\alpha\lambda^2\theta}=\frac{\lambda^2\alpha-x^2}{1-e^2\lambda^2\alpha.x^2},$$

qu'on obtiendra à l'aide du théorème 1.

$$y^2=k^2.x^2.\frac{\lambda^2\frac{\omega}{n}-x^2}{1-e^2.\lambda^2\frac{\omega}{n}.x^2}\cdots\frac{\lambda^2\frac{(n-1)\omega}{n}-x^2}{1-e^2\lambda^2\frac{(n-1)\omega}{n}.x^2}.$$

En faisant maintenant $x=p\sqrt{-1}$, $y=z\sqrt{-1}$ on aura en supposant p réel pour toutes les valeurs de cette quantité:

$$\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{[(1+z^2)(1+e_1^2z^2)]}}=a\int_0^p\frac{dp}{\sqrt{[(1+p^2)(1+e^2p^2)]}},$$

mais si l'on fait $p=\frac{1}{0}$ on aura de même $z=\frac{1}{0}$ donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dz}{\sqrt{[(1+z^2)(1+e_1^2z^2)]}}=a\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dp}{\sqrt{[(1+p^2)(1+e^2p^2)]}}.$$

Le premier membre de cette équation est la même chose que $\frac{\omega}{2}$ et le second

la méme chose que $a\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-e_1^2y^2)]}}$ ce qui est facile à prouver, donc

$$\frac{\omega}{2} = a.\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-e_1^2y^2)]}}.$$

Cette équation combinée avec (73) donne

$$\frac{\omega}{2} = a.\frac{a\omega}{2n},$$

c'est-à-dire

$$a = \sqrt{n}.$$

XIV.

Addition au mémoire précédent.

Dans le mémoire précédent j'ai fait voir comment on pourra trouver toutes les transformations possibles, réelles ou imaginaires d'une fonction elliptique proposée. Les modules c, e, c_1, e_1 pourront être des quantités quelconques. Le cas le plus remarquable est celui où l'on suppose les modules réelles. Dans ce cas le problème général pourra se résoudre par une méthode particulière, entièrement différente de celle que nous avons donnée dans le mémoire précédent. Puisque cette nouvelle méthode est remarquable par sa grande simplicité je vais l'indiquer ici en peu de mots.

Le problème général que nous allons complètement résoudre est le suivant:

"Trouver tous les cas possibles où l'on pourra satisfaire à l'équation "différentielle:

$$1)\qquad \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2y^2)]}} = a\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$$

"par une *équation algébrique* entre les variables x et y, en supposant les "modules c et c_1 moindres que l'unité et le coefficient a réel où imaginaire."

En désignant par $\lambda\theta$ la fonction inverse de celle-ci

$\theta = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$ en sorte que $x = \lambda\theta$, on aura en vertu de la formule (4) du mémoire précédent

$$\lambda\left((-1)^{m+m'}\,\theta + m\omega + m'\omega'\right) = \lambda\theta,$$

où les quantités constantes ω, ω' sont déterminées par les formules:

$$2)\qquad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$$

$$\frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}.$$

Dans le cas que nous considérons, la quantité ω est réelle mais ω' est imaginaire. On aura en effet

$$\frac{\omega'}{2}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}+\int_1^{\frac{1}{c}}\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\omega'}{2}=\frac{\omega}{2}+\sqrt{-1}\,.\int_1^{\frac{1}{c}}\frac{dx}{\sqrt{[(x^2-1)(1-c^2x^2)]}}\,.$$

où il est clair que le coefficient de $\sqrt{-1}$ est une quantité réelle. En faisant $x=\frac{1}{\sqrt{[(1-b^2y^2)}}$ où $b=\sqrt{(1-c^2)}$ on trouve:

$$\frac{\omega'}{2}=\frac{\omega}{2}+\sqrt{-1}\,.\frac{\varpi}{2}$$

où

3) $$\frac{\varpi}{2}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-b^2x^2)]}}.$$

Le théorème II du mémoire précédent donnera donc ce-ci:

"On satisfera de la manière la plus générale à l'équation

$$\lambda\theta'=\lambda\theta$$

"en prenant

4) $$\theta'=(-1)^m\theta+m\omega+m'\varpi.\sqrt{-1}$$

"où m et m' sont des nombres entiers quelconques et ω et ϖ deux quantités "réelles données par les formules (2) et (3)."

Cela posé soit

5) $$f(y,x)=0$$

l'équation algébrique entre y et x qui doit satisfaire à l'équation différentielle (1). Si l'on fait $x=\lambda\theta$ et $y=\lambda_1\theta'$ où θ et θ' sont deux nouvelles variables et λ_1 la fonction elliptique qui répond au module c_1 en sorte que

6) $$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2y^2)]}}=d\theta' \text{ pour } y=\lambda_1\theta'$$

l'équation (1) deviendra

$$d\theta'=\pm\, a d\theta$$

d'où l'on tire en intégrant: $\theta'=\varepsilon\pm a\theta$ où ε est une constante. On a donc

$$y=\lambda_1(\varepsilon\pm a\theta)$$

ou bien en mettant $+a$ pour $\pm a$:

7) $$y=\lambda_1(\varepsilon+a\theta).$$

L'équation (5) entre x et y donnera donc celle-ci

8) $$f(\lambda_1(\varepsilon+a\theta),\,\lambda\theta)=0$$

qui ne contient que la seule variable θ et qui aura lieu quelle que soit la valeur de cette quantité.

Il ne serait pas difficile à l'aide de la formule (8) de trouver la fonction $f(y,x)$; mais pour notre objet il suffit de connaître le coefficient a et une certaine relation entre les fonctions complètes. Voici comment on y parviendra. En mettant $\theta + 2m\omega$ au lieu de θ on obtiendra, en remarquant qu'en vertu de (4)

$$\lambda(\theta + 2m\omega) = \lambda\theta,$$

cette autre équation

$$9)\qquad f(\lambda_1(\varepsilon + 2ma\omega + a\theta),\ \lambda\theta) = 0.$$

On aura de même en mettant $\theta + m\varpi i$ pour θ, où $i = \sqrt{-1}$:

$$10)\qquad f(\lambda_1(\varepsilon + ma\varpi i + a\theta),\ \lambda\theta) = 0.$$

Dans ces deux équations m pourra être un nombre entier quelconque. En faisant $x = \lambda\theta$ on voit donc que l'équation algébrique

$$f(y,x) = 0$$

est satisfaite en mettant pour y une quantité quelconque de l'une des deux formes:

$$\lambda_1(\varepsilon + 2ma\omega + a\theta),\quad \lambda_1(\varepsilon + ma\varpi i + a\theta),$$

mais m peut avoir une infinité de valeurs tandis que l'équation dont il s'agit n'a qu'un nombre limité de racines; il faut donc qu'on puisse trouver deux nombres entiers k et k' tels que

$$11)\qquad \lambda_1(\varepsilon + 2k'a\omega + a\theta) = \lambda_1(\varepsilon + 2ka\omega + a\theta)$$

et deux autres ν et ν' tels que

$$12)\qquad \lambda_1(\varepsilon + \nu' a\varpi i + a\theta) = \lambda_1(\varepsilon + \nu a\varpi i + a\theta).$$

En vertu de la formule (4) ces deux équations donneront respectivement:

$$13)\qquad \begin{cases} 2k'a\omega = 2ka\omega + 2m\omega_1 + m'\varpi_1.\sqrt{-1} \\ \nu' a\varpi i = \nu a\varpi i + 2\mu\omega_1 + \mu'\varpi_1.\sqrt{-1} \end{cases}$$

où ω_1 et ϖ_1 désignent les valeurs de ω et ϖ qui répondent au module c_1 c'est-à-dire on a:

$$14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\omega_1}{2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c_1^2x^2)]}} \\ \dfrac{\varpi_1}{2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-b_1^2x^2)]}} \quad \text{où } b_1 = \sqrt{(1-c_1^2)} \end{cases}$$

Cela posé les équations (13) donneront en mettant ν pour $k'-k$ et ν' pour $\nu'-\nu$.

$$15)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{m}{\nu}\cdot\dfrac{\omega_1}{\omega} + \dfrac{m'}{2\nu}\cdot\dfrac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1} \\ a = \dfrac{\mu'}{\nu'}\cdot\dfrac{\varpi_1}{\varpi} - \dfrac{2\mu}{\nu'}\cdot\dfrac{\omega_1}{\varpi}\sqrt{-1} \end{cases}$$

et de là en comparant les parties réelles et imaginaires:

$$16)\qquad \frac{m}{\nu}\cdot\frac{\omega_1}{\omega}=\frac{\mu'}{\nu'}\cdot\frac{\varpi_1}{\varpi};\quad \frac{m'}{2\nu}\cdot\frac{\varpi_1}{\omega}=-\frac{2\mu}{\nu'}\cdot\frac{\omega_1}{\varpi}.$$

Ces deux équations donneront celles-ci:

$$17)\qquad \frac{\omega^2}{\varpi^2}=-\frac{1}{4}\frac{m.m'}{\mu.\mu'}\cdot\frac{\nu'^2}{\nu^2},\quad \frac{\omega_1^2}{\varpi_1^2}=-\frac{1}{4}\frac{m'\mu'}{m\mu}.$$

Maintenant $\frac{\omega^2}{\varpi^2}$ est une fonction continue de c, donc les équations (17) ne sauront avoir lieu que pour des valeurs particulières des modules c et c_1. Si donc on suppose c indéterminé il faut que l'une des équations

$$18)\qquad m'=\mu=0,$$

$$19)\qquad m=\mu'=0$$

ait lieu. Dans le premier cas les équations (15) et (16) se réduiront à

$$20)\qquad \begin{cases} a=\frac{m}{\nu}\cdot\frac{\omega_1}{\omega}=\frac{\mu'}{\nu'}\cdot\frac{\varpi_1}{\varpi}, \\ \frac{\omega_1}{\varpi_1}=\frac{\nu\mu'}{\nu' m}\cdot\frac{\omega}{\varpi}, \end{cases}$$

et dans le second cas à

$$21)\qquad \begin{cases} a=\frac{m'}{2\nu}\cdot\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}=-\frac{2\mu}{\nu'}\cdot\frac{\omega_1}{\varpi}\sqrt{-1} \\ \frac{\omega_1}{\varpi_1}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{m'\nu'}{\mu\nu}\cdot\frac{\varpi}{\omega}. \end{cases}$$

Mais si la valeur du module c est telle que la 1ère des équations (17) ait lieu, on doit avoir en même temps:

$$22)\quad \frac{\omega}{\varpi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\nu'}{\nu}\cdot\sqrt{\left(-\frac{m.m'}{\mu.\mu'}\right)},\quad \frac{\omega_1}{\varpi_1}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{m'\mu'}{m\mu}\right)},$$

et alors a est donné par l'une des équations (15).

Quant aux nombres m, m', μ, μ', ν, ν' il faut les prendre tels que ω, ω_1, ϖ, ϖ_1 soient selon leur nature des quantités positives. Si donc on suppose, ce qui est permis, ν et ν' positifs, il faut que m et μ' soient du même signe et m' et μ du signe contraire. On pourra d'ailleurs sans diminuer la généralité supposer m', m et μ' positifs et μ negatif.

Par ce qu'on vient de voir on a immédiatement ce théorème:

I. *Théorème.* Pour que l'équation (1) ait une intégrale algébrique en x et y il faut nécessairement que les modules c_1 et c soient liés entre eux de la manière que l'une des deux quantités $\frac{\omega_1}{\varpi_1}$ et $\frac{\varpi_1}{\omega_1}$ soit dans un rapport *rationnel* avec $\frac{\omega}{\varpi}$; c'est-à-dire on doit avoir l'une des équations

23) $$\frac{\omega_1}{\varpi_1} = k . \frac{\omega}{\varpi}; \; \frac{\varpi_1}{\omega_1} = k' . \frac{\omega}{\varpi}$$

où k et k' sont des nombres rationnels. Si la première de ces équations a lieu mais pas la seconde, on aura en même temps

24) $$a = \delta . \frac{\omega_1}{\omega}$$

où δ est un nombre rationnel. Si la seconde équation a lieu mais pas la première, on aura en même temps

25) $$a = \delta . \frac{\varpi_1}{\omega} \sqrt{-1}.$$

Enfin si les deux équations (23) ont lieu en même temps, les modules c et c_1 seront tous deux déterminés, savoir respectivement par les équations:

26) $$\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{(k . k')}; \; \frac{\varpi_1}{\omega_1} = \sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)}$$

et alors le coefficient a doit avoir la forme:

$$a = \delta . \frac{\omega_1}{\omega} + \delta' . \frac{\varpi_1}{\omega} \sqrt{-1}$$

oú δ et δ' sont des nombres rationnels.

Les conditions indiquées dans ce théorème doivent donc nécessairement être remplies pour que l'équation (1) ait une intégrale algébrique. Il reste encore le point le plus important, savoir de déterminer si ces conditions sont suffisantes. Or c'est ce que nous allons faire voir à l'aide de la formule (65) du mémoire précédent. Cette formule peut facilement être démontrée en faisant effectivement la substitution de y; mais il existe une autre démonstration, tirée des considérations entièrement différentes et que nous allons donner ici en nous servant d'une formule démontrée dans *"les recherches sur les fonctions elliptiques."* Il s'agit de la formule (185) de ce mémoire

28) $$f\alpha = \prod_0^{\infty}{}_m . \frac{1 - \left(\frac{\rho - \rho^{-1}}{r^{m+\frac{1}{2}} - r^{-m-\frac{1}{2}}}\right)^2}{1 + \left(\frac{\rho - \rho^{-1}}{r^{m+\frac{1}{2}} + r^{-m-\frac{1}{2}}}\right)^2}$$

où

29) $$\rho = e^{\frac{\alpha\pi}{\varpi'}}, \; r = e^{\frac{\omega'\pi}{\varpi'}};$$

les quantités ω' et ϖ' étant données par les équations

30) $$\frac{\omega'}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}};$$

$$\frac{\varpi'}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\sqrt{[(1-e^2x^2)(1+x^2)]}}.$$

On a de plus:

$$31)\qquad f\alpha = \sqrt{(1-x^2)}$$

où x est lié à α par l'équation

$$32)\qquad \alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)\,(1+e^2x^2)]}}.$$

Si l'on fait $e = \frac{c}{\sqrt{(1-c^2)}} = \frac{c}{b}$; $x = \sqrt{(1-y^2)}$ on trouvera:

$$\frac{\omega'}{2} = b.\frac{\omega}{2};\quad \frac{\varpi'}{2} = b.\frac{\varpi}{2};\quad \frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{\omega}{\varpi},$$

$$d\alpha = -\, b.\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)\,(1-c^2y^2)]}}$$

et de là:

$$y = \lambda\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha}{b}\right),$$

maintenant l'équation $x = \sqrt{(1-y^2)}$ donne

$$y = \sqrt{(1-x^2)} = f\alpha,\ \text{donc: } f\alpha = \lambda\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\alpha}{b}\right)$$

et de là en mettant $b\,\frac{\omega}{2} - b\alpha$ pour α

$$33)\qquad \lambda\alpha = f\left(b\,\frac{\omega}{2} - b\alpha\right).$$

Cela posé si l'on pose dans la formule (28) $b\,\frac{\omega}{2} - b\alpha$ au lieu de α on trouvera après quelques réductions faciles:

$$34)\quad \lambda\alpha = A.\frac{(1-t^2)\,(1-t^2.r^2)\,(1-t^{-2}.r^2)\,(1-t^2.r^4)\,(1-t^{-2}.r^4)\ldots}{(1+t^2)\,(1+t^2.r^2)\,(1+t^{-2}.r^2)\,(1+t^2.r^4)\,(1+t^{-2}.r^4)\ldots}$$

où

$$35)\qquad t = e^{-\frac{\alpha\pi}{\varpi}},\quad r = e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}$$

et A une quantité indépendante de α.

Si l'on fait pour abréger

$$35')\qquad \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \psi(x)$$

on aura donc:

$$36)\quad \lambda\alpha = A.\psi\left(\alpha\,\frac{\pi}{\varpi}\right).\psi(\omega+\alpha)\,\frac{\pi}{\varpi}.\psi(\omega-\alpha)\frac{\pi}{\varpi}.\psi(2\omega+\alpha)\frac{\pi}{\varpi}.$$
$$\psi(2\omega-\alpha)\,\frac{\pi}{\varpi}\cdot\psi(3\omega+\alpha)\,\frac{\pi}{\varpi}\cdot\psi(3\omega-\alpha)\,\frac{\pi}{\varpi}\ldots$$

Si l'on fait maintenant successivement

$$\alpha = \theta,\ \theta + \frac{\omega}{n},\ \ \theta + \frac{2\omega}{n},\ \ldots\theta + \frac{n-1}{n}\,\omega,$$

on aura les valeurs de $\lambda\theta$, $\lambda\left(\theta+\frac{\omega}{n}\right)\ldots\lambda\left(\theta+\frac{n-1}{n}\omega\right)$ qui multipliées ensemble donneront sur le champ

$$37)\quad \lambda\theta.\lambda\left(\theta+\frac{\omega}{n}\right).\lambda\left(\theta+\frac{2\omega}{n}\right)\ldots\lambda\left(\theta+\frac{n-1}{n}.\omega\right)$$

$$=A^n.\psi\left(\delta.\frac{\pi}{\varpi_1}\right).\psi(\omega_1+\delta)\frac{\pi}{\varpi_1}.\psi(\omega_1-\delta)\frac{\pi}{\varpi_1}.\psi(2\omega_1+\delta)\frac{\pi}{\varpi_1}\ldots$$

où on a fait pour abréger

$$38)\qquad \delta=\frac{\varpi_1}{\varpi}.\theta,\quad \frac{\omega_1}{\varpi_1}=\frac{1}{n}.\frac{\omega}{\varpi},$$

or si l'on pose dans la formule (36) le module c_1 au lieu de c et désigne les valeurs correspondantes de

$\lambda\theta$, ω, ϖ, A respectivement par

$\lambda_1\theta$, ω_1, ϖ_1, A_1 il viendra

$$\lambda_1\alpha=A_1.\psi\left(\alpha\frac{\pi}{\varpi_1}\right).\psi(\omega_1+\alpha)\frac{\pi}{\varpi_1}.\psi(\omega_1-\alpha)\frac{\pi}{\varpi_1}\ldots$$

Le second membre de la formule (37) est donc la même chose que $\frac{A^n}{A_1}.\lambda_1\delta$ $=\frac{A^n}{A_1}.\lambda_1\left(\frac{\varpi_1}{\omega}\theta\right)$ et par conséquent on aura la suivante

$$39)\quad \lambda_1\left(\frac{\varpi_1}{\varpi}\theta\right)=\frac{A_1}{A^n}.\lambda\theta.\lambda\left(\theta+\frac{\omega}{n}\right).\lambda\left(\theta+\frac{2\omega}{n}\right)\ldots\lambda\left(\theta+\frac{n-1}{n}\omega\right),$$

cette équation a donc toujours lieu si le module c_1 et tel que

$$40)\qquad \frac{\omega_1}{\varpi_1}=\frac{1}{n}.\frac{\omega}{\varpi},$$

quel que soit d'ailleurs le nombre entier n.

Si l'on fait $\lambda\theta=x$, $\lambda_1\left(\frac{\varpi_1}{\varpi}\theta\right)=y$ on aura

$$41)\qquad \frac{\varpi.dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2y^2)]}}=\frac{\varpi_1.dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}=\varpi_1 d\theta$$

qui par conséquent est satisfaite par l'équation algébrique

$$42)\qquad y=\frac{A_1}{A^n}.\lambda\theta.\lambda\left(\theta+\frac{\omega}{n}\right)\ldots\lambda\left(\theta+\frac{n-1}{n}\omega\right).$$

La valeur de y est toujours une fonction algébrique de x. En effet si n est un nombre impair on a

$$43)\qquad y=\frac{A_1}{A^n}.x.\frac{\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)-x^2}{1-c^2.\lambda^2\frac{\omega}{n}.x^2}\ldots\frac{\lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\,\frac{\omega}{n}\right)-x^2}{1-c^2\lambda^2\left(\frac{n-1}{2}\,\frac{\omega}{n}\right).x^2}$$

et si n est un nombre pair:

$$44)\quad y=\frac{A_1}{A^n}.x.\frac{\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right)-x^2}{1-c^2\lambda^2\left(\frac{\omega}{n}\right).x^2}\cdots\frac{\lambda^2\left(\frac{n-2}{2}.\frac{\omega}{n}\right)-x^2}{1-c^2\lambda^2\left(\frac{n-2}{2}.\frac{\omega}{n}\right)}.\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-c^2x^2)}}.$$

Considérons maintenant les trois cas de notre problème général.

Premier cas. Si a est réel. Dans ce cas on doit avoir comme nous avons vu $a=\delta.\frac{\varpi_1}{\varpi}=\frac{\mu}{\nu}.\frac{\varpi_1}{\varpi}$ où μ et ν sont des nombres entiers et l'équation proposée deviendra:

$$45)\quad \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2y^2)]}}=\frac{\mu}{\nu}.\frac{\varpi_1}{\varpi}\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}.$$

On doit avoir de plus $\frac{\omega_1}{\varpi_1}=k.\frac{\omega}{\varpi}=\frac{m}{n}.\frac{\omega}{\varpi}$ où m et n sont entiers. Si l'on fait $x=\lambda(\nu\varpi\theta)$ et $y=\lambda_1(\mu\varpi_1\theta)$ où θ est une nouvelle variable, l'équation (45) sera satisfaite, car les deux membres se réduiront à $\mu\varpi_1 d\theta$. Pour avoir une intégrale en x et y il faut donc éliminer θ des deux équations:

$$46)\quad x=\lambda(\nu\varpi\theta);\quad y=\lambda_1(\mu\varpi_1\theta).$$

Nous allons voir que le résultat de l'élimination sera une équation algébrique en x et y.

Soit c' un nouveau module et désignons par $\lambda'\theta$, ω', ϖ', A' les valeurs correspondantes de $\lambda\theta$, ω, ϖ, A. Cela posé si l'on suppose le module c' tel que $\frac{\omega'}{\varpi'}=\frac{1}{n}.\frac{\omega}{\varpi}$ on aura en vertu de la formule (39), en mettant $\mu\nu\theta\varpi$ au lieu de θ

$$47)\quad \lambda'(\mu\nu\varpi'\theta)=\frac{A'}{A^n}.\lambda(\mu\nu\varpi\theta).\lambda\left(\mu\nu\varpi\theta+\frac{\omega}{n}\right)\cdots\lambda\left(\mu\nu\varpi\theta+\frac{n-1}{n}\omega\right),$$

maintenant ayant $\frac{\omega'}{\varpi'}=\frac{1}{n}.\frac{\omega}{\varpi}$ et $\frac{\omega_1}{\varpi_1}=\frac{m}{n}.\frac{\omega}{\varpi}$ on en tire $\frac{\omega'}{\varpi'}=\frac{1}{m}.\frac{\omega_1}{\varpi_1}$; donc la même formule donnera:

$$48)\quad \lambda'(\mu\nu\varpi'\theta)=\frac{A'}{A_1^m}.\lambda_1(\mu\nu\varpi_1\theta).\lambda_1\left(\mu\nu\varpi_1\theta+\frac{\omega_1}{m}\right)\cdots\lambda_1\left(\mu\nu\varpi_1\theta+\frac{m-1}{m}\omega_1\right).$$

En égalant entre elles ces deux expressions de $\lambda'(\mu\nu\varpi'\theta)$ il viendra en faisant pour abréger

$$49)\quad \nu\varpi\theta=\delta,\quad \mu\varpi_1\theta=\delta_1$$

$$50)\quad \begin{cases}\frac{1}{A^n}.\lambda(\mu\delta).\lambda\left(\mu\delta+\frac{\omega}{n}\right)\cdots\lambda\left(\mu\delta+\frac{n-1}{n}.\omega\right)\\ =\frac{1}{A_1^m}.\lambda_1(\nu\delta_1).\lambda_1\left(\nu\delta_1+\frac{\omega_1}{m}\right)\cdots\lambda_1\left(\nu\delta_1+\frac{m-1}{m}.\omega_1\right).\end{cases}$$

Le premier membre de cette équation est une fonction algébrique de $\lambda(\mu\delta)$ et le second une fonction algébrique de $\lambda_1(\nu\delta_1)$; mais $\lambda(\mu\delta)$ est à son tour une fonction algébrique de $\lambda\delta = x$ et $\lambda_1(\nu\delta_1)$ une fonction algébrique de $\lambda_1\delta_1 = y$. Donc enfin les deux membres de l'équation (50) sont respectivement des fonctions algébriques de x et de y. Donc cette équation exprime l'intégrale cherchée en x et y de l'équation différentielle (45). Pour en avoir l'intégrale complète il suffit d'ajouter à δ ou à δ_1 une quantité constante arbitraire. Quant aux quantités A et A_1 on doit remarquer qu'on a

$$51)\qquad A = \frac{1}{\sqrt{c}} \quad A_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}}.$$

Pour donner un exemple supposons qu'on demande une intégrale algébrique de l'équation,

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2y^2)]}} = \frac{\varpi_1}{\varpi}\cdot\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

dans le cas où $\frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\omega}{\varpi}$. On aura alors $\mu = \nu = 1$, $m = 2$, $n = 3$. L'équation (50) deviendra donc:

$$c\sqrt{c}\,.\,\lambda\delta\,.\,\lambda\left(\delta + \frac{\omega}{3}\right)\cdot\lambda\left(\delta + \frac{2\omega}{3}\right) = c_1\lambda_1\delta_1\cdot\lambda_1\left(\delta_1 + \frac{\omega_1}{2}\right),$$

c'est-à-dire:

$$y\cdot\frac{\sqrt{(1-y^2)}}{\sqrt{(1-c^2y^2)}} = \frac{c\sqrt{c}}{c_1}\,.\,x\,.\,\frac{\lambda^2\frac{\omega}{3} - x^2}{1 - c^2\lambda^2\frac{\omega}{3}\,.\,x^2}.$$

Second cas. Si $a\sqrt{-1}$ *est réel.* Dans ce cas on doit avoir selon (15), $a = \frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}$ où μ et ν sont entiers. On doit avoir de même $\frac{\omega_1}{\varpi_1} = \frac{m}{n}\cdot\frac{\varpi}{\omega}$. L'équation proposée (1) deviendra

$$52)\quad \frac{\nu}{\mu}\,\frac{\omega}{\varpi_1}\sqrt{-1}\,.\,\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2y^2)]}} = \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}.$$

Pour réduire ce cas au précédent il suffit de faire $x = \frac{z\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-z^2)}}$ où z est une nouvelle variable, on aura alors $\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} = \sqrt{-1}\,.\,\frac{dz}{\sqrt{[(1-z^2)(1-b^2z^2)]}}$, où $b = \sqrt{(1-c^2)}$ et par suite l'équation (52) deviendra en y et z:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c_1^2y^2)]}} = \frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\varpi_1}{\omega}\cdot\frac{dz}{\sqrt{[(1-z^2)(1-b^2z^2)]}}$$

dont l'intégrale algébrique est exprimée par la formule (50) en y faisant $z = \lambda\delta = \frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}$ et mettant ϖ au lieu de ω.

Supposons par exemple qu'il s'agit de trouver une intégrale algébrique de l'équation:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2y^2)]}}=\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}\,\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

dans le cas où $\frac{\omega_1}{\varpi_1}=2.\frac{\varpi}{\omega}$. Ayant $\mu=\nu=1$ et $m=2$, $n=1$ l'équation (50) deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{c}}.\lambda\delta=\frac{1}{c_1}.\lambda_1(\delta_1).\lambda_1\left(\delta_1+\frac{\omega_1}{2}\right)$$

c'est-à-dire en remettant les valeurs de $\lambda\delta$ et $\lambda_1\delta_1$:

$$y\frac{\sqrt{(1-y^2)}}{\sqrt{(1-c_1^2y^2)}}=\frac{c_1}{\sqrt{c}}.\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)}}.$$

Troisième cas. Si $\frac{\varpi}{\omega}=\sqrt{kk'}$, $\frac{\omega_1}{\varpi_1}=\sqrt{\frac{k}{k'}}$.

Dans ce cas on doit avoir en vertu du théorème I: $a=\frac{\mu}{\nu}.\frac{\varpi_1}{\varpi}+\frac{\mu'}{\nu'}.\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}$ où μ, ν, μ', ν' sont des nombres entiers. L'équation proposée deviendra donc:

53) $$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2y^2)]}}=\left(\frac{\mu}{\nu}.\frac{\varpi_1}{\varpi}+\frac{\mu'}{\nu'}.\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}\right)\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

et cette équation sera toujours intégrable algébriquement. En effet comme on a tant

$$\frac{\omega_1}{\varpi_1}=\frac{1}{k'}.\frac{\varpi}{\omega}\text{ que }\frac{\omega_1}{\varpi_1}=k.\frac{\omega}{\varpi}\text{ où } k' \text{ et } k$$

sont des nombres rationnels, on pourra en vertu de ce que nous venons de voir dans les deux premiers cas satisfaire algébriquement aux équations

$$\frac{dz}{\sqrt{[(1-z^2)(1-c_1^2z^2)]}}=\frac{\mu}{\nu}.\frac{\varpi_1}{\varpi}\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$$

$$\frac{dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-c_1^2v^2)]}}=\frac{\mu'}{\nu'}.\frac{\varpi_1}{\omega}\sqrt{-1}\,\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}.$$

Par la l'équation (53) deviendra:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c_1^2y^2)]}}=\frac{dz}{\sqrt{[(1-z^2)(1-c_1^2z^2)]}}+\frac{dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1-c_1^2v^2)]}}$$

à laquelle on satisfera comme on sait en prenant:

54) $$y=\frac{z.\sqrt{[(1-v^2)(1-c_1^2v^2)]}+v.\sqrt{[(1-z^2)(1-c_1^2z^2)]}}{1-c_1^2z^2v^2}.$$

En y substituant les valeurs de v et z en x on aura une intégrale algébrique en x et y de l'équation.

Nous avons ainsi démontré que les conditions nécessaires exposées dans le théorème I sont en même temps suffisantes.

En vertu de ce qui a été exposé dans le premier cas on a immédiatement ce théorème:

Pour que deux fonctions elliptiques réelles $F(c', \theta')$, $F(c, \theta)$ puissent être réduites l'une à l'autre il est nécessaire et il suffit qu'on ait entre les fonctions complètes

$F^1(c)$, $F^1(b)$, $F^1(c')$, $F^1(b')$ cette relation:

$$55)\qquad n.F^1(c').F^1(b) = m.F^1(b').F^1(c),$$

où m et n sont des nombres entiers. Si cette condition est remplie on pourra établir une relation algébrique entre $\sin\theta'$ et $\sin\theta$ telle que:

$$56)\qquad F(c', \theta') = k.\frac{F^1(b')}{F^1(b)}.F(c, \theta),$$

où k est un nombre rationnel. On pourra ajouter que dans le cas où $k = 1$, θ' est lié à θ par l'équation:

$$57)\ \begin{cases} \theta' + \text{Arct.}(a'_1.\text{tang}\,\theta') + \text{Arct.}(a'_2\,\text{tang}\,\theta') + \ldots + \text{Arct.}(a'_{n-1}.\text{tang}\,\theta') \\ = \theta + \text{Arct.}(a_1.\text{tang}\,\theta) + \text{Arct.}(a_2\,\text{tang}\,\theta) + \ldots + \text{Arct.}(a_{n-1}.\,\text{tang}\,\theta) \end{cases}$$

où a_1, $a_2 \ldots a'_1$, a'_2, $a'_3 \ldots$ sont des quantités constantes données par les formules

$$58)\qquad \begin{cases} a_\mu = \sqrt{(1 - c^2.\sin^2\theta_\mu)} \\ a'_\mu = \sqrt{(1 - c'^2.\sin^2\theta'_\mu)} \end{cases}$$

après avoir déterminé θ_μ et θ'_μ tels que

$$59)\ \begin{cases} F(c, \theta_\mu) = \frac{2\mu}{n}.F^1(c) = \frac{\mu}{n}.\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - c^2 \sin^2\theta)}} \\ F(c', \theta'_\mu) = \frac{2\mu}{m}.F^1(c') = \frac{\mu}{m}.\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - c'^2 \sin^2\theta)}}. \end{cases}$$

En prenant $n = 1$ on aura la formule (67) du mémoire précédent.

Il y a un cas du problème général qui mérite d'être remarqué; c'est celui où l'on suppose les deux modules égaux entre eux, ou en d'autres termes quand on demande tous les cas dans lesquels il sera possible d'intégrer algébriquement l'équation différentielle:

$$60)\qquad \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}} = a\,\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}.$$

Dans ce cas on a $\omega' = \omega$, $\varpi' = \varpi$ et par conséquent les équations (15) deviendront:

$$a = \frac{m}{\nu} + \frac{m'}{2\nu}.\frac{\varpi}{\omega}\sqrt{-1} = \frac{\mu'}{\nu'} - \frac{2\mu}{\nu'}.\frac{\omega}{\varpi}\sqrt{-1}$$

et de là

$$\frac{m}{\nu}=\frac{\mu'}{\nu'},\quad \frac{m'}{2\nu}\cdot\frac{\varpi}{\omega}=-\frac{2\mu}{\nu'}\cdot\frac{\omega}{\varpi}.$$

Si l'on veut que a soit réel on a $a=\frac{m}{\nu}$, $m'=\mu=0$; dans ce cas on n'aura aucune condition pour la valeur de c, qui peut être quelconque, mais on voit que a doit être un nombre rationnel. Si au contraire on admet des valeurs imaginaires de a le modul c doit être tel que $\frac{m'}{2\nu}\cdot\frac{\varpi}{\omega}=-\frac{2\mu}{\nu'}\cdot\frac{\omega}{\varpi}$ d'où l'on tire $\frac{\omega}{\varpi}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{m'\nu'}{\mu\nu}\right)}$. En vertu de cette expression la valeur de a deviendra:

$$a=\frac{\mu'}{\nu'}-\frac{\mu}{\nu'}\cdot\sqrt{\left(-\frac{m'\nu'}{\mu\nu}\right)}.\sqrt{-1}.$$

Soit $\frac{\omega}{\varpi}=\sqrt{k}$ on aura

$$a=\delta+\delta'\sqrt{k}.\sqrt{-1},$$

où k, δ, δ' pourront désigner des nombres rationnels quelconques. On voit que pour que l'équation (60) soit intégrable algébriquement en supposant a imaginaire il est nécessaire et il suffit que

$$\frac{\omega}{\varpi}=\sqrt{k},\quad a=\delta+\delta'.\sqrt{k}.\sqrt{-1}.$$

k est essentiellement positif.

On pourra exprimer le modul c en produits infinis comme il suit:

$$\sqrt[4]{c}=\frac{1-e^{-\pi\sqrt{k}}}{1+e^{-\pi\sqrt{k}}}\cdot\frac{1-e^{-3\pi\sqrt{k}}}{1+e^{-3\pi\sqrt{k}}}\cdot\frac{1-e^{-5\pi\sqrt{k}}}{1+e^{-5\pi\sqrt{k}}}\cdots$$

On tire cette expression de la formule (34) en y faisant $\alpha=\frac{\omega}{\varpi}$ et remarquant que $\frac{\omega}{\varpi}=\sqrt{k}$ et $A=\frac{1}{\sqrt{c}}$. On aura en même temps le module b par cette formule:

$$\sqrt[4]{b}=\frac{1-e^{-\frac{\pi}{\sqrt{k}}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{k}}}}\cdot\frac{1-c^{-\frac{3\pi}{\sqrt{k}}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{k}}}}\cdot\frac{1-e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{k}}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{k}}}}\cdots$$

Il suit encore de ce qui précède que si le modul c a la valeur ci-dessus, l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-b^2y^2)]}}=k'\sqrt{k}\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

sera toujours intégrable algébriquement quels que soient les nombres rationnels k et k', pourvu que k soit positif.

Il y a encore beaucoup de choses à dire sur la transformation des fonctions elliptiques. On trouvera des développements ultérieurs sur cette matière ainsi que sur là théorie des fonctions elliptiques en général dans un mémoire qui va paraître dans le Journal de Monsieur *Crelle*.

XV.

Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes.

Si ψx désigne la fonction elliptique la plus générale, c'est-à-dire si

$$\psi x = \int \frac{r.dx}{\sqrt{R}},$$

où r est une fonction rationnelle quelconque de x, et R une fonction entière de la même variable, qui ne passe pas le quatrième degré, cette fonction a comme on sait la propriété très remarquable, que la somme d'un nombre quelconque de ces fonctions peut être exprimée par une seule fonction de la même forme, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique.

Il semble que dans la théorie des fonctions trancendantes les géomètres se sont bornés aux fonctions de cette forme. Cependant il existe encore pour une classe très étendue d'autres fonctions une propriété analogue à celle des fonctions elliptiques.

Je veux parler des fonctions qui peuvent être regardées comme *intégrales de différentielles algébriques quelconques*. Si l'on ne peut pas exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions données, par une seule fonction de la même espèce, comme dans le cas des fonctions elliptiques, au moins on pourra exprimer dans tous les cas une pareille somme par la somme d'un nombre déterminé d'autres fonctions de la même nature que les premières, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique*). Nous démontrerons une autre fois cette propriété. Pour le moment je vais considérer un cas particulier, qui embrasse en même temps les fonctions elliptiques, savoir les fonctions contenues dans la formule

1) $$\psi x = \int \frac{r.dx}{\sqrt{R}},$$

---

*) J'ai présenté un mémoire sur ces fonctions à l'académie royale des sciences de Paris vers la fin de l'année 1826. Note de l'auteur.

R étant une fonction rationnelle et entière quelconque, et r une fonction rationnelle.

2.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant:

Théorème I. Soit φx une fonction entière de x, décomposée d'une manière quelconque en deux facteurs $\varphi_1 x$ et $\varphi_2 x$, ensorte que $\varphi x = \varphi_1 x . \varphi_2 x$. Soit fx une autre fonction entière quelconque et

$$2)\qquad \psi x = \int \frac{fx\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}},$$

où α est une quantité constante quelconque. Désignons par $a_0, a_1, a_2 \ldots c_0, c_1, c_2, \ldots$ des quantités quelconques dont l'une au moins soit variable. Cela posé, si l'on fait

$$3)\quad \begin{cases} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)^2 . \varphi_1 x - (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m)^2 . \varphi_2 x \\ = A . (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_\mu), \end{cases}$$

où A ne dépend pas de x, je dis qu'on aura

$$4)\qquad \varepsilon_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 \psi x_3 + \ldots + \varepsilon_\mu \psi x_\mu$$

$$= \frac{fa}{\sqrt{\varphi\alpha}} . \log \left(\frac{(a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n)\sqrt{(\varphi_1\alpha)} + (c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_m\alpha^m)\sqrt{(\varphi_2\alpha)}}{(a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n)\sqrt{(\varphi_1\alpha)} - (c_0 + c_1\alpha + \ldots + c_m\alpha^m)\sqrt{(\varphi_2\alpha)}} \right) + r + C,$$

où C est une quantité constante et r le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}} . \log \left(\frac{(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\sqrt{(\varphi_1 x)} + (c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m)\sqrt{(\varphi_2 x)}}{(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)\sqrt{(\varphi_1 x)} - (c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m)\sqrt{(\varphi_2 x)}} \right),$$

suivant les puissances descendantes de x. Les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu$ sont égales à $+1$ ou à -1, et leurs valeurs dépendent de celles des quantités $x_1, x_2 \ldots x_\mu$.

Désignons le premier membre de l'équation (3) par Fx et faisons pour abréger:

$$5)\qquad \begin{cases} \theta x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \\ \theta_1 x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m, \end{cases}$$

nous aurons

$$6)\qquad Fx = (\theta x)^2 . \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 . \varphi_2 x.$$

Cela posé, soit x une quelconque des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, on aura l'équation

$$7)\qquad Fx = 0.$$

De là, en différentiant, on tire

$$8)\qquad F'x . dx + \delta Fx = 0,$$

en désignant par $F'x$ la dérivée de Fx par rapport à x, et par δFx la différentielle de la même fonction par rapport aux quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots c_0, c_1, c_2 \ldots$ Or en remarquant que $\varphi_1 x$ et $\varphi_2 x$ sont indépendants de ces dernières variables l'équation (6) donnera:

9) $$\delta Fx = 2\theta x.\varphi_1 x.\delta\theta x - 2\theta_1 x.\varphi_2 x.\delta\theta_1 x,$$

donc en vertu de (8)

10) $$F'x.dx = 2\theta_1 x.\varphi_2 x.\delta\theta_1 x - 2\theta x.\varphi_1 x.\delta\theta x.$$

Maintenant ayant $Fx = 0 = (\theta x)^2.\varphi_1 x - (\theta_1 x)^2.\varphi_2 x$, on en tire:

11) $$\theta x.\sqrt{\varphi_1 x} = \varepsilon\theta_1 x.\sqrt{\varphi_2 x},$$

où $\varepsilon = \pm 1$. De là vient

$$\theta x.\varphi_1 x = \varepsilon\theta_1 x.\sqrt{(\varphi_1 x.\varphi_2 x)} = \varepsilon\theta_1 x.\sqrt{(\varphi x)},$$
$$\theta_1 x.\varphi_2 x = \varepsilon\theta x.\sqrt{(\varphi_2 x.\varphi_1 x)} = \varepsilon\theta x.\sqrt{(\varphi x)},$$

donc l'expression de $F'x.dx$ pourra être mise sous la forme

12) $$F'x.dx = 2\varepsilon.(\theta x.\delta\theta_1 x - \theta_1 x.\delta\theta x).\sqrt{(\varphi x)}.$$

Céla donne, en multipliant par $\varepsilon.\frac{fx}{\sqrt{(\varphi x)}}.\frac{1}{F'x}.\frac{1}{x-\alpha}$:

13) $$\varepsilon.\frac{fx.dx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} = \frac{fx.(2\theta x.\delta\theta_1 x - 2\theta_1 x.\delta\theta x)}{(x-\alpha)F'x}.$$

En faisant pour abréger

14') $$\lambda(x) = 2fx(\theta x.\delta\theta_1 x - \theta_1 x.\delta\theta x),$$

il viendra:

14) $$\varepsilon.\frac{fx.dx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} = \frac{\lambda x}{(x-\alpha).F'x},$$

où λx sera une fonction *entière* par rapport à x.

Désignons par $\Sigma\chi x$ la quantité

$$\chi x_1 + \chi x_2 + \chi x_3 + \ldots + \chi x_\mu,$$

et remarquons que l'équation (14) subsiste encore en mettant l'une quelconque des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ au lieu de x, cette équation donnera

15) $$\Sigma\varepsilon.\frac{fx.dx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} = \Sigma\frac{\lambda x}{(x-\alpha)F'x} = \delta v.$$

Cela posé, on pourra chasser sans difficulté les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ du second membre.

En effet, quelle que soit la fonction entière λx, on peut supposer

16) $$\lambda x = (x-\alpha).\lambda_1 x + \lambda\alpha,$$

où $\lambda_1 x$ est une fonction entière de x, savoir $\frac{\lambda x - \lambda\alpha}{x-\alpha}$. En substituant cette valeur dans (15), il viendra

16') $$\delta v = \Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x} + \lambda\alpha \,.\, \Sigma \frac{1}{(x-\alpha)F'x}.$$

Maintenant d'après une formule connue on aura

17) $$\Sigma \frac{1}{(x-\alpha)F'x} = -\frac{1}{F\alpha},$$

ayant égard que

$$F\alpha = A(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)\dots(\alpha - x_\mu),$$

donc

18) $$\delta v = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x}.$$

Il reste à trouver $\Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x}$. Or cela peut se faire à l'aide de la formule (17). En effet en développant $\frac{1}{\alpha - x}$ selon les puissances descendantes de α, il viendra:

19) $$\frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{\alpha}.\Sigma\frac{1}{F'x} + \frac{1}{\alpha^2}.\Sigma\frac{x}{F'x} + \dots + \frac{1}{\alpha^{k+1}}.\Sigma\frac{x^k}{F'x} + \dots$$

d'où l'on voit que $\Sigma \frac{x^k}{F'x}$ est égal au coefficient de $\frac{1}{\alpha^{k+1}}$ dans le développement de $\frac{1}{F\alpha}$, ou bien à celui de $\frac{1}{\alpha}$ dans le développement de $\frac{\alpha^k}{F\alpha}$. De là on voit aisément que $\Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x}$, où $\lambda_1 x$ est une fonction quelconque entière de x, sera égal au coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction $\frac{\lambda_1 x}{Fx}$ selon les puissances ascendantes de $\frac{1}{x}$. Si pour abréger on désigne ce coefficient compris dans une fonction quelconque r développable de cette manière par Πr, on aura:

20) $$\Sigma \frac{\lambda_1 x}{F'x} = \Pi \frac{\lambda_1 x}{Fx}.$$

Or la formule (16), en divisant par $Fx.(x-\alpha)$, donne

21) $$\Pi . \frac{\lambda x}{(x-\alpha)Fx} = \Pi \frac{\lambda_1 x}{Fx},$$

en remarquant que $\Pi \frac{\lambda\alpha}{(x-\alpha)Fx}$ est toujours égal à zéro. Donc l'expression (16) de δv deviendra

22) $$\delta v = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \Pi \frac{\lambda x}{(x-\alpha)Fx}.$$

Maintenant on a (14')

$$\lambda x = 2fx.(\theta x.\delta\theta_1 x - \theta_1 x.\delta\theta x),$$

donc en mettant α au lieu de x,

$$\lambda\alpha = 2f\alpha.(\theta\alpha.\delta\theta_1\alpha - \theta_1\alpha.\delta\theta\alpha).$$

En vertu de cette expression et en substituant pour $F\alpha$ sa valeur $(\theta\alpha)^2.\varphi_1\alpha - (\theta_1\alpha)^2.\varphi_2\alpha$, on obtiendra

$$\delta v = -\frac{2f\alpha.(\theta\alpha.\delta\theta_1\alpha - \theta_1\alpha.\delta\theta\alpha)}{(\theta\alpha)^2.\varphi_1\alpha - (\theta_1\alpha)^2.\varphi_2\alpha} + \Pi\frac{2fx}{x-\alpha}.\frac{\theta x.\delta\theta_1 x - \theta_1 x.\delta\theta x}{(\theta x)^2.\varphi_1 x - (\theta_1 x)^2.\varphi_2 x}.$$

On trouvera aisément l'intégrale de cette expression; car en remarquant que $f\alpha$, $\varphi_1\alpha$, $\varphi_2\alpha$, fx, $x-\alpha$, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$ sont des quantités constantes, on aura en vertu de la formule

$$\int\frac{pdq-qdp}{p^2m-q^2n} = \frac{1}{2\sqrt{(m.n)}}\log.\left(\frac{p\sqrt{m}+q\sqrt{n}}{p\sqrt{m}-q\sqrt{n}}\right):$$

$$23)\quad v = C - \frac{f\alpha}{\sqrt{(\varphi\alpha)}}.\log\left(\frac{\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)}+\theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)}}{\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)}-\theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)}}\right)$$
$$+\Pi\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}}.\log\left(\frac{\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)}+\theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)}-\theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}}\right).$$

Or l'équation (15) donne

$$\Sigma\varepsilon\int\frac{fx.dx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} = v,$$

donc en faisant

$$24)\quad \psi(x) = \int\frac{fx.dx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}}$$

et désignant par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu$ des quantités de la forme ± 1, on aura la formule

$$25)\left\{\begin{aligned}&\varepsilon_1\psi x_1 + \varepsilon_2\psi x_2 + \varepsilon_3\psi x_3 + \ldots + \varepsilon_\mu\psi x_\mu = \\ &C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}}\log\left(\frac{\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)}+\theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)}}{\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)}-\theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)}}\right)\\ &+\Pi\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}}\log\left(\frac{\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)}+\theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)}-\theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}}\right),\end{aligned}\right.$$

qui s'accorde parfaitement avec la formule (4).

Les valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu$ ne sont pas arbitraires, elles dépendent de la grandeur de $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ et celle-ci est déterminée par l'équation

$$\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)} = \varepsilon\theta_1 x\sqrt{(\varphi_2 x)},$$

équivalente aux équations

$$26)\quad \theta x_1.\sqrt{(\varphi_1 x_1)} = \varepsilon_1.\theta_1 x_1.\sqrt{(\varphi_2 x_1)};\ \theta x_2.\sqrt{(\varphi_1 x_2)} = \varepsilon_2\theta_1 x_2\sqrt{(\varphi_2 x_2)}; \ldots$$
$$\theta x_\mu.\sqrt{(\varphi_1 x_\mu)} = \varepsilon_\mu\theta_1 x_\mu\sqrt{(\varphi_2 x_\mu)}.$$

D'ailleur les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\mu$ conserveront les mêmes valeurs pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, comprises dans certaines limites. Il en sera de même de la constante C.

3.

La démonstration précédente suppose toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, différentes entre elles, car dans le cas contraire $F'x$ serait égal à zéro pour

un certain nombre de valeurs de x, et alors le second membre de la formule (14) se présenterait sous la forme $\frac{0}{0}$. Néanmoins il est évident, que la formule (25) subsistera encore dans le cas même, où plusieurs des quantités x_1, $x_2, \ldots x_\mu$ sont égales entre elles.

En faisant $x_2 = x_1$, on aura (26)

$$\theta x_1 . \sqrt{(\varphi_1 x_1)} = \varepsilon_1 \theta_1 x_1 \sqrt{(\varphi_2 x_1)} = \varepsilon_2 \theta_1 x_1 \sqrt{(\varphi_2 x_1)},$$

et cela donne, en supposant que $\theta_1 x \varphi_2 x$ et $\theta x . \varphi_1 x$ n'aient pas de diviseur commun:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1.$$

En vertu de cette remarque on aura le théorème suivant:

Théorème II. *Si l'on fait*

$$27) \quad (\theta x)^2 . \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 . \varphi_2 x = A . (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \ldots (x - x_\mu)^{m_\mu},$$

où les fonctions entières $\theta x . \varphi_1 x$ *et* $\theta_1 x . \varphi_2 x$ *n'ont pas de diviseur commun, on aura:*

$$28) \begin{cases} \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 m_3 \psi x_3 + \ldots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = \\ C - \dfrac{f\alpha}{\sqrt{(\varphi\alpha)}} \log\left(\dfrac{\theta\alpha . \sqrt{(\varphi_1\alpha)} + \theta_1\alpha . \sqrt{(\varphi_2\alpha)}}{\theta\alpha . \sqrt{(\varphi_1\alpha)} - \theta_1\alpha . \sqrt{(\varphi_2\alpha)}}\right) \\ \quad + \Pi \dfrac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} \log\left(\dfrac{\theta x . \sqrt{(\varphi_1 x)} + \theta_1 x . \sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x . \sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x . \sqrt{(\varphi_2 x)}}\right). \end{cases}$$

4.

Si l'on suppose fx divisible par $x - \alpha$, on aura $f\alpha = 0$, donc en mettant $(x - \alpha) . fx$ au lieu de fx, il viendra:

Théorème III. *Les choses étant supposées les mêmes que dans le Théorème* II, *si l'on fait*

$$\psi x = \int \frac{fx . dx}{\sqrt{(\varphi x)}},$$

où fx *est une fonction entière quelconque, on aura*

$$29) \quad \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 \ldots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu$$
$$= C + \Pi \frac{fx}{\sqrt{(\varphi x)}} \log . \left(\frac{\theta x . \sqrt{(\varphi_1 x)} + \theta_1 x \sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x . \sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x \sqrt{(\varphi_2 x)}}\right).$$

5.

Si dans la formule (28) on suppose le degré de la fonction entière $f(x)$ moindre que la moitié de celui de φx, il est clair que la partie du second membre affectée du signe Π, s'évanouira. Donc on aura ce théorème:

Théorème IV. *Si le degré de la fonction entière* $(fx)^2$ *est moindre que celui de* φx, *et qu'on fait*

$$\psi x = \int \frac{fx.dx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}}:$$

on aura

30) $$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \ldots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu$$
$$= C - \frac{f\alpha}{\sqrt{(\varphi\alpha)}}.\log\left(\frac{\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)} + \theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)}}{\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)} - \theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)}}\right).$$

6.

En faisant $f\alpha = 1$ dans le théorème précédent et différentiant $k-1$ fois de suite, on aura le théorème suivant

Théorème V. *Si l'on fait*

$$\psi x = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{(\varphi x)}},$$

on aura

$$\varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \ldots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu$$
$$= C - \frac{1}{1.2\ldots(k-1)}\cdot\frac{d^{k-1}}{d\alpha^{k-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\varphi\alpha)}}.\log\left(\frac{\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)} + \theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)}}{\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)} - \theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)}}\right).$$

7.

Si dans le théorème III. on suppose le degré de $(fx)^2$ moindre que celui de φx, le second membre se réduit à une constante. Cela donne aisément le théorème qui suit:

Théorème VI. *Si l'on désigne par ψx la fonction*

$$\int \frac{(\delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \ldots + \delta_{\nu'}.x^{\nu'})dx}{\sqrt{(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_\nu x^\nu)}},$$

où $\nu' = \frac{\nu-1}{2} - 1$, *si ν est impair, et* $\nu' = \frac{\nu}{2} - 2$ *si ν est pair, on aura toujours*:

31) $\varepsilon_1 m_1 \psi(x_1) + \varepsilon_2 m_2 \psi(x_2) + \ldots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi(x_\mu) =$ *à une constante.*

On voit que ν' a la même valeur pour $\nu = 2m-1$ et pour $\nu = 2m$, savoir $\nu' = m - 2$.

8.

Soit maintenant

$$\psi x = \int \frac{rdx}{\sqrt{(\varphi x)}},$$

où r est une fonction rationnelle quelconque de x. Quelle que soit la forme de r, on pourra toujours faire

32) $$r = fx + \frac{f_1 x}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{f_2 x}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{f_\omega x}{(x-\alpha_\omega)^{k_\omega}},$$

où fx, f_1x, f_2x, ... $f_\omega x$ sont des fonctions entières. Cela posé, il est clair qu'en vertu des théorèmes III. et V. on aura le suivant:

Théorème VII. Quelle que soit la fonction rationnelle r, exprimée par la formule (32), *en faisant*

$$33)\quad \psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{(\varphi x)}} \text{ et } \frac{\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)} + \theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x.\sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x.\sqrt{(\varphi_2 x)}} = \chi x$$

on aura toujours:

$$34)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = C + \Pi \dfrac{r}{\sqrt{(\varphi x)}} \log \chi(x) \\ -\dfrac{1}{\Gamma k_1} \cdot \dfrac{d^{k_1-1}}{d\alpha_1^{k_1-1}} \cdot \dfrac{f_1\alpha_1}{\sqrt{(\varphi\alpha_1)}} \log \chi\alpha_1 - \dfrac{1}{\Gamma k_2} \cdot \dfrac{d^{k_2-1}}{d\alpha_2^{k_2-1}} \cdot \dfrac{f_2\alpha_2}{\sqrt{(\varphi\alpha_2)}} . \log \chi\alpha_2 - \dots \\ -\dfrac{1}{\Gamma k_\omega} \cdot \dfrac{d^{k_\omega-1}}{d\alpha_\omega^{k_\omega-1}} \cdot \dfrac{f_\omega\alpha_\omega}{\sqrt{(\varphi\alpha_\omega)}} \log \chi\alpha_\omega, \end{cases}$$

en représentant par $\Gamma(k)$ le produit $1.2.3\dots(k-1)$.

9.

Précédemment nous avons considéré les quantités x_1, x_2, ... x_μ comme des fonctions de a_0, a_1, a_2, ... c_0, c_1, c_2, ... Supposons maintenant qu'un certain nombre des quantités x_1, x_2, ... x_μ soient données et regardées comme des variables indépendantes; et soient x_1, x_2, ... $x_{\mu'}$ ces quantités. Alors il faut déterminer a_0, a_1, ... c_0, c_1, ... de manière que le premier membre de l'équation (3) soit divisible par

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{\mu'}).$$

Cela se fera à l'aide des équations (26) Les μ' premières équations

$$35)\quad \begin{cases} \theta x_1 . \sqrt{(\varphi_1 x_1)} = \varepsilon_1 . \theta_1 x_1 . \sqrt{(\varphi_2 x_1)}, \\ \theta x_2 . \sqrt{(\varphi_1 x_2)} = \varepsilon_2 . \theta_1 x_2 . \sqrt{(\varphi_2 x_2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \theta x_{\mu'} . \sqrt{(\varphi_1 x_{\mu'})} = \varepsilon_{\mu'} . \theta_1 x_{\mu'} . \sqrt{(\varphi_2 x_{\mu'})} \end{cases}$$

donneront un nombre de μ' des quantités a_0. a_1, ... c_0, c_1, ... exprimées en fonctions rationnelles des autres et de x_1, x_2, ... $x_{\mu'}$; $\sqrt{(\varphi x_1)}$, $\sqrt{(\varphi x_2)}$, ... $\sqrt{(\varphi x_{\mu'})}$.

Le nombre des indéterminées a_0, a_1, ... a_n, c_0, c_1, ... c_m est égal à $m+n+1$; donc, comme il est aisé de voir par la forme des équations (35), on pourra faire $\mu' = m+n+1$. Cela posé, en substituant les valeurs de a_0, a_1, ... c_0, c_1, ... dans les fonctions θx, $\theta_1 x$, ..., la fonction entière $(\theta x)^2 . \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 . \varphi_2 x$ deviendra divisible par

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{\mu'}).$$

Désignant le quotient par R, on aura

$$36)\qquad R = A(x - x_{\mu'+1})(x - x_{\mu'+2}) \dots (x - x_{\mu}).$$

Donc les $\mu - \mu'$ quantités $x_{\mu'+1}, x_{\mu'+2}, \dots x_{\mu}$, seront les racines d'une équation $R = 0$ du degré $\mu - \mu'$, dont tous les coefficiens sont exprimés rationnellement par les quantités $x_1, x_2, x_3, \dots x_{\mu'}$; $\sqrt{(\varphi x_1)}, \sqrt{(\varphi x_2)}, \dots \sqrt{(\varphi x_{\mu'})}$.

Faisons

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_{\mu_1} = 1,$$
$$\varepsilon_{\mu_1+1} = \varepsilon_{\mu_1+2} = \dots = \varepsilon_{\mu'} = -1,$$
$$x_{\mu_1+1} = x'_1, \; x_{\mu_1+2} = x'_2, \dots x_{\mu'} = x'_{\mu_2},$$
$$x_{\mu'+1} = y_1, \; x_{\mu'+2} = y_2, \dots x_{\mu} = y_{\nu'},$$

on aura, en désignant par $\psi(x)$ la fonction $\int \frac{r dx}{\sqrt{(\varphi x)}}$,

$$37)\; \begin{cases} \psi x_1 + \psi x_2 + \dots + \psi x_{\mu_1} - \psi x'_1 - \psi x'_2 - \dots - \psi x'_{\mu_2} \\ = v - \psi y_1 - \psi y_2 - \psi y_3 - \dots - \psi y_{\nu'}, \end{cases}$$

où v est une expression algébrique et logarithmique. Les quantités $x_1, x_2, \dots x_{\mu_1}$; $x'_1, x'_2, \dots x'_{\mu_2}$ sont des quantités variables quelconques, et $y_1, y_2, \dots y_{\nu'}$ seront déterminables à l'aide d'une équation du degré ν'.

Maintenant nous verrons qu'on pourra toujours rendre ν' indépendant du nombre $\mu_1 + \mu_2$ des fonctions données. En effet cherchons la plus petite valeur de ν'.

En supposant indéterminées toutes les quantités $a_0, a_1, \dots c_0, c_1, \dots$, il est clair que μ sera égal à l'un des deux nombres $2n + \nu_1$ et $2m + \nu_2$, où ν_1 et ν_2 représentent les degrés des fonctions $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$. Soit p. ex.

$$\mu = 2n + \nu_1,$$

on doit avoir en même temps:

$$\mu = \text{ou} > 2m + \nu_2,$$

d'où, en ajoutant, on tire

$$\mu = \text{ou} > m + n + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2},$$

or

$$\nu' = \mu - \mu' = \mu - m - n - 1,$$

donc

$$\nu' = \text{ou} > \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} - 1,$$

ou bien, désignant le degré de φx par ν,

$$38)\qquad \nu' = \text{ou} > \frac{\nu}{2} - 1.$$

De la on voit, que la plus petite valeur de ν' est $\frac{\nu-1}{2}$ ou $\frac{\nu}{2}-1$, selon que ν est impair ou pair.

Donc cette valeur est indépendante du nombre $\mu_1+\mu_2$ des fonctions données; elle est précicément la même que le nombre total des coefficiens δ_0, δ_1, δ_2, ... dans le 6me théorème. On aura maintenant ce théorème:

Théorème VIII. Soit $\psi x = \int \frac{r\,dx}{\sqrt{(\varphi x)}}$, *où* r *est une fonction rationnelle quelconque de* x, *et* φx *une fonction entière de degré* $2\nu-1$ *ou* 2ν, *et soient* $x_1, x_2, \ldots x_{\mu}, x'_1, x'_2, \ldots x'_{\mu_1}$ *des variables données. Cela posé, quel que soit le nombre* $\mu_1+\mu_2$ *des variables, on pourra toujours trouver au moyen d'une équation algébrique,* $\nu-1$ *quantités* $y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}$, *telles que:*

$$39)\ \begin{cases} \psi x_1+\psi x_2+\ldots+\psi x_{\mu_1}-\psi x'_1-\psi x'_2-\ldots-\psi x'_{\mu_1} \\ = v+\varepsilon_1\cdot\psi y_1+\varepsilon_2\psi y_2+\ldots+\varepsilon_{\nu-1}\psi y_{\nu-1}, \end{cases}$$

v *étant algébrique et logarithmique, et* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\nu-1}$ *égaux à* $+1$ *ou à* -1.

On peut ajouter que les fonctions $y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}$ restent les mêmes, quelle que soit la forme de la fonction rationnelle r, et que la fonction v ne change pas de valeur en ajoutant à r une fonction entière quelconque du degré $\nu-2$.

10.

Les équations (35) qui déterminent les quantités $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$ deviendront en vertu de la formule (39)

$$40)\ \begin{cases} \theta x_1\cdot\sqrt{(\varphi_1 x_1)}=\theta_1 x_1\cdot\sqrt{(\varphi_2 x_1)}, & \theta x'_1\cdot\sqrt{(\varphi_1 x'_1)}=-\theta'_1 x'_1\cdot\sqrt{(\varphi_2 x'_1)}, \\ \theta x_2\cdot\sqrt{(\varphi_1 x_2)}=\theta_1 x_2\cdot\sqrt{(\varphi_2 x_2)}, & \theta x'_2\cdot\sqrt{(\varphi_1 x'_2)}=-\theta_1 x'_2\cdot\sqrt{(\varphi_2 x'_2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta x_{\mu_1}\cdot\sqrt{(\varphi_1 x_{\mu_1})}=\theta_1 x_{\mu_1}\cdot\sqrt{(\varphi_2 x_{\mu_1})}, & \theta x'_{\mu_2}\cdot\sqrt{(\varphi_1 x'_{\mu_2})}=-\theta_1 x'_{\mu_2}\cdot\sqrt{(\varphi_2 x'_{\mu_2})}. \end{cases}$$

Pour déterminer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{\nu-1}$, on aura les équations:

$$41)\ \begin{cases} \theta y_1\cdot\sqrt{(\varphi_1 y_1)}=\varepsilon_1\theta_1 y_1\cdot\sqrt{(\varphi_2 y_1)}, \\ \theta y_2\cdot\sqrt{(\varphi_1 y_2)}=\varepsilon_2\theta_1 y_2\cdot\sqrt{(\varphi_2 y_2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta y_{\nu-1}\cdot\sqrt{(\varphi_1 y_{\nu-1})}=\varepsilon_{\nu-1}\theta_1 y_{\nu-1}\cdot\sqrt{(\varphi_2 y_{\nu-1})}. \end{cases}$$

Les fonctions $y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}$ sont les racines de l'équation

$$42)\ \frac{(\theta y)^2\cdot\varphi_1 y-(\theta_1 y)^2\cdot\varphi_2 y}{(y-x_1)(y-x_2)\ldots(y-x_{\mu_1})(y-x'_1)(y-x'_2)(y-x'_{\mu_1})}=0.$$

Le degré de la fonction θy est $n=\frac{\mu_1+\mu_2+\nu-1-\nu_1}{2}$ et celui de $\theta_1 y$ est $m=n+\nu_1-\nu$.

11.

La formule (39) a lieu si plusieurs des quantités x_1, x_2, ... x'_1, x'_2, ... sont égales entre elles, mais dans ce cas les équations (40) ne suffisent plus pour déterminer les quantités a_0, a_1, ... c_0, c_1, ...; car si p. ex. $x_1 = x_2 = \ldots = x_k$, les k premières des équations (40) deviendront identiques. Pour avoir les équations nécessaires dans ce cas soit pour abréger

$$\theta x . \sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x . \sqrt{(\varphi_2 x)} = \lambda x.$$

L'expression $\frac{\lambda x}{(x - x_1)^k}$ doit avoir une valeur finie en faisant $x = x_1$. De la on tire d'après les principes du calcul différentiel, les k équations

$$43) \qquad \lambda x_1 = 0,\ \lambda' x_1 = 0,\ \lambda'' x_1 = 0, \ldots \lambda^{(k-1)} x_1 = 0,$$

et ce sont elles, qu'il faut substituer à la place des équations

$$\lambda x = 0,\ \lambda x_2 = 0, \ldots \lambda x_k = 0,$$

dans le cas où $x_1 = x_2 = \ldots x_k$.

XVI.

Note sur quelques formules elliptiques.

J'ai présenté plusieurs formules qui tiennent au développement des fonctions elliptiques $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, dans le cas où les modules e et c sont réels. Il sera facile de tirer de ces formules d'autres formules analogues pour le cas où e^2 est une quantité négative. C'est ce que nous ferons voir.

Soit pour plus de simplicité $c = 1$. Cela posé, si l'on fait

$$1) \qquad \lambda\alpha = f\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right), \quad \text{où } b = \frac{1}{\sqrt{(1+e^2)}},$$

on trouvera aisément, en vertu de la définition de la fonction f, que

$$2) \qquad \alpha = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

en faisant

$$x = \lambda\alpha \text{ et } c = \frac{e}{\sqrt{(1+e^2)}},$$

Donc le module c est plus petit que l'unité, et comme on a $b = \sqrt{(1-c^2)}$, b sera son complément.

On trouvera aussi

$$3) \begin{cases} \dfrac{\omega}{2} = b\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}}, \\ \dfrac{\varpi}{2} = b\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}} = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}, \end{cases}$$

Si l'on fait

$$4) \qquad \lambda'\alpha = \sqrt{(1-\lambda^2\alpha)}, \quad \lambda''\alpha = \sqrt{(1-c^2\lambda^2\alpha)},$$

on aura encore

$$5) \qquad \lambda'\alpha = \varphi\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right), \quad \lambda''\alpha = bF\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right),$$

et en faisant

$$6) \quad \frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}}, \quad \frac{\varpi'}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}.$$

on a, en vertu de (3)

$$7) \qquad \frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{\omega}{\varpi}, \quad \omega = b\omega', \quad \varpi = b\varpi'.$$

Considérons maintenant d'abord la formule (185) pag. 216, qui donne la valeur de $f\alpha$. Pour en tirer celle de la fonction $\lambda\alpha$, il suffit de mettre $\frac{\omega}{2} - b.\alpha$ à la place de α. Faisons $\alpha = \frac{\omega}{2} - b.\theta$ et pour abréger,

$$\varrho = e^{-\frac{\theta\pi}{\varpi'}}, \quad r = e^{-\frac{\omega'}{\varpi'}\pi}:$$

alors la formule (185) donne sur le champ:

$$\lambda\theta = A.\prod_0^\infty{}_m \frac{(1 - r^{2m+1})^2 - (\rho r^m - \rho^{-1}.r^{m+1})^2}{(1 + r^{2m+1})^2 + (\rho r^m - \rho^{-1}.r^{m+1})^2},$$

où

$$8') \qquad A^{\frac{1}{2}} = \frac{(1+r)(1+r^3)\dots}{(1-r)(1-r^3)\dots}.$$

Or on a

$$(1 - r^{2m+1})^2 - (\varrho r^m - \varrho^{-1}.r^{m+1})^2 = (1 - \varrho^2.r^{2m})(1 - \varrho^{-2}.r^{2m+2})$$

et

$$(1 + r^{2m+1})^2 + (\varrho r^m - \varrho^{-1}.r^{m+1})^2 = (1 + \varrho^2.r^{2m})(1 + \varrho^{-2}.r^{2m+2}),$$

par conséquent l'expression de $\lambda\theta$ deviendra en développant:

$$9) \quad \lambda\theta = A.\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}.\frac{1-\rho^2 r^2}{1+\rho^2 r^2}.\frac{1-\rho^{-2}.r^2}{1+\rho^{-2}.r^2}.\frac{1-\rho^2.r^4}{1+\rho^2.r^4}.\frac{1-\rho^{-2}.r^4}{1+\rho^{-2}.r^4}\dots$$

Avec la même facilité on tirera des deux formules (184) et (186), en y faisant $\alpha = \frac{\omega}{2} - b.\theta$:

$$10) \quad \lambda'\theta = A'.\frac{2\rho}{1+\rho^2}.\frac{(1-\rho^2.r)(1-\rho^{-2}.r)(1-\rho^2.r^3)(1-\rho^{-2}.r^3)}{(1+\rho^2.r^2)(1+\rho^{-2}.r^2)(1+\rho^2.r^4)(1+\rho^{-2}.r^4)}\dots$$

$$11) \quad \lambda''\theta = A''.\frac{2\rho}{1+\rho^2}.\frac{(1+\rho^2.r)(1+\rho^{-2}.r)(1+\rho^2.r^3)(1+\rho^{-2}.r^3)}{(1+\rho^2.r^2)(1+\rho^{-2}.r^2)(1+\rho^2.r^4)(1+\rho^{-2}.r^4)}\dots$$

où A', A'' sont données par les formules

$$12) \qquad \sqrt{A'} = \frac{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\dots}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\dots},$$

$$13) \qquad \sqrt{A''} = \frac{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\dots}{(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\dots}.$$

On pourra trouver d'autres expressions pour A, A', A'' encore beaucoup plus simples et qui donneront des formules très remarquables.

Si l'on fait dans la formule (9):

$$\theta = \frac{\omega'}{2} + \frac{\varpi'}{2}i,$$

on aura:

$$\lambda\theta = f\left(\frac{\varpi}{2}i\right) = \frac{\sqrt{(1+e^2)}}{e} = \frac{1}{e}$$

et

$$\varrho^2 = e^{-\pi i - \frac{\omega'}{\varpi}\pi} = -r,$$

donc en substituant,

$$\frac{1}{e} = A.\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{1+r^3}{1-r^3}\cdot\frac{1+r^5}{1-r^5}\cdots\right)^2,$$

c'est-à-dire, de vertu de la formule (8')

$$\frac{1}{c} = A^3,$$

d'où

$$A = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

En faisant dans l'expression de $\lambda'\theta$:

$$\theta = \frac{\omega'}{2} + \frac{\varpi'}{2}i,$$

on a

$$\lambda'\theta = \varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\right) = \frac{i}{e} = i\frac{\sqrt{(1-c^2)}}{c},$$

et

$$\varrho^2 = -r,$$

donc:

$$i.\frac{b}{c} = 4A' i\sqrt{r}\left(\frac{1+r^2}{1-r}\cdot\frac{1+r^4}{1-r^3}\cdots\right)^2,$$

d'où l'on tire en vertu de (12):

$$A' = \frac{1}{2\sqrt[4]{r}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

Enfin si l'on fait dans la formule (11) $\theta = \frac{\omega'}{2}$, on trouvera.

$$\lambda''\theta = \sqrt{(1-c^2)} = b, \quad \varrho^2 = r,$$

donc

$$b = 4A''.\sqrt{r}.\left(\frac{1+r^2}{1+r}\cdot\frac{1+r^4}{1+r^3}\cdots\right)^2 = 4A''\sqrt{r}.A'',$$

et par suite

$$A'' = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt[4]{r}}.$$

En comparant ces valeurs de A, A', A'' à celles plus haut, on en déduira ces formules:

14) $$\sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r}\cdot\frac{1-r^3}{1+r^3}\cdot\frac{1-r^5}{1+r^5}\cdots,$$

$$15)\qquad \sqrt[4]{\frac{b}{c}}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{r}.\frac{1+r^2}{1-r}.\frac{1+r^4}{1-r^3}.\frac{1+r^6}{1-r^5}\ldots,$$

$$16)\qquad \sqrt[4]{b}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{r}.\frac{1+r^2}{1+r}.\frac{1+r^4}{1+r^3}.\frac{1+r^6}{1+r^5}\ldots,$$

dont l'une est une suite des deux autres.

Si dans l'expression de $\lambda\theta$, après avoir divisé les deux membres par

$$1-\varrho^2=2.\frac{\theta\pi}{\varpi'}+\ldots,$$

on fait $\theta=0$, et qu'on remarque que

$$\frac{\lambda\theta}{\theta}=1,\ \text{pour}\ \theta=0,$$

on obtiendra

$$17)\qquad \sqrt[4]{c}.\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}}=\frac{(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\ldots}{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots}.$$

De là on tire, en substituant la valeur de $\sqrt[4]{c}$:

$$18)\qquad \sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}}=\frac{(1+r)(1-r^2)(1+r^3)(1-r^4)\ldots}{(1-r)(1+r^2)(1-r^3)(1+r^4)\ldots}$$

$$=(1+r)^2(1+r^3)^2(1+r^5)^2\ldots\times(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\ldots$$

$$=((1+r)(1+r^3)\ldots(1+r^5)\ldots)^2.(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots\times(1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots$$

A l'aide des formules (16, 14, 18) il est facile de trouver l'expression des produits infinis

$$(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots,\ (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots$$

En effet, si pour abréger. on fait

$$19)\qquad \begin{cases} P=(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\ldots \\ P'=(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\ldots \end{cases}$$

et quon ait égard à la formule

$$\frac{1}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\ldots}=(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots=P.P',$$

les formules (14, 16) donneront sur le champ:

$$\sqrt[4]{c}=\frac{1}{P^2.P'},\ \sqrt[4]{b}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{r}.\frac{P'}{P},$$

d'où l'on tire:

$$20)\qquad P=\sqrt[6]{2}.\sqrt[24]{\left(\frac{r}{b^2c^2}\right)},\qquad P'=\frac{\sqrt[6]{b}.\sqrt[24]{r}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[12]{c}}.\frac{1}{\sqrt[8]{r}}.$$

Cela donne les produits P et P'. En les multipliant entre eux, il viendra:

$$21)\qquad (1+r)(1+r^2)(1+r^3)(1+r^4)\ldots=\frac{\sqrt[12]{b}}{\sqrt[6]{2c}.\sqrt[24]{r}}.$$

De même la formule (18) donne, en substituant les valeurs de P, P':

$$\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}} = P^3 . P' . (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots,$$

et de là:

$$22)\qquad (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\ldots = \frac{\sqrt[12]{b}.\sqrt[3]{c}}{\sqrt[6]{2}.\sqrt[24]{r}} . \sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}},$$

formule dûe à *M. Jacobi* (Tome III. pag. 193 du journal de *M. Crelle*, où ce géomètre en présente plusieurs autres très remarquables et très élégantes).

Des formules démontrées précédemment on peut tirer aisément un grand nombre d'autres.

En voici quelques unes des plus remarquables.

Si l'on fait pour abréger

$$23)\qquad q = e^{-\frac{\varpi'}{\omega'}\pi},$$

on aura

$$24)\quad \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{2}{\sqrt{c}} . \sqrt[4]{q} . \sin x . \frac{1-2q^2\cos 2x + q^4}{1-2q\cos 2x + q^2} . \frac{1-2q^4\cos 2x + q^8}{1-2q^3\cos 2x + q^6}\ldots$$

$$25)\quad \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = 2\sqrt{\frac{b}{c}} . \sqrt[4]{q} . \cos x . \frac{1+2q^2\cos 2x + q^4}{1-2q\cos 2x + q^2} . \frac{1+2q^4\cos 2x + q^8}{1-2q^3\cos 2x + q^6}\ldots$$

$$26)\quad \lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \sqrt{b} . \frac{1+2q\cos 2x + q^2}{1-2q\cos 2x + q^2} . \frac{1+2q^3\cos 2x + q^6}{1-2q^3\cos 2x + q^6}\ldots$$

Ces formules ont été déduites respectivement des formules (10, 9, 11), en changeant c en b, et en faisant ensuite

$$\theta = \frac{\varpi'}{2} + \frac{\omega'}{2} . \sqrt{-1} + \frac{\omega'}{\pi} x \sqrt{-1}.$$

En comparant ces valeurs avec celle que *M. Jacobi* a données pour les mêmes fonctions à l'endroit cité, on parviendra à des résultats remarquables. Savoir, en faisant dans la formule (3) de *M. Jacobi*, $k = c$, on aura:

$$27)\quad \begin{cases} \dfrac{1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots} \\ = \dfrac{(1+2q\cos 2x + q^2)(1+2q^3\cos 2x + q^6)(1+2q^5\cos 2x + q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x + q^2)(1-2q^3\cos 2x + q^6)(1-2q^5\cos 2x + q^{10})\ldots} \end{cases}$$

formule qui doit avoir lieu pour des valeurs quelconques réelles de x et q, en supposant q moindre que l'unité.

En prenant les logarithmes des valeurs de $\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)$ etc., on trouvera après quelques réductions faciles:

28) $\log \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \log 2 - \frac{1}{2}\log c - \frac{1}{4}\cdot\frac{\varpi'}{\omega'}\pi + \log\sin x$

$+ 2\left(\cos 2x\cdot\frac{q}{1+q} + \frac{1}{2}\cos 4x\cdot\frac{q^2}{1+q^2} + \frac{1}{3}\cos 6x\cdot\frac{q^3}{1+q^3} + \ldots\right),$

29) $\log \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \log 2 + \frac{1}{2}\log b - \frac{1}{2}\log c - \frac{1}{4}\frac{\varpi'}{\omega'}\pi + \log\cos x$

$+ 2\left(\cos 2x\cdot\frac{q}{1-q} + \frac{1}{2}\cos 4x\cdot\frac{q^2}{1+q^2} + \frac{1}{3}\cos 6x\cdot\frac{q^3}{1-q^3} + \ldots\right),$

30) $\log \lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{1}{2}\log b + 4\cdot\left(\cos 2x\cdot\frac{q}{1-q^2} + \frac{1}{3}\cos 6x\cdot\frac{q^3}{1-q^6} + \ldots\right).$

En faisant $x = 0$, on trouvera:

31) $\log\left(\frac{1}{b}\right) = 8\cdot\left(\frac{q}{1-q^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{q^3}{1-q^6} + \frac{1}{5}\cdot\frac{q^5}{1-q^{10}} + \ldots\right),$

32) $\log\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\varpi'}{\omega'}\pi - 2\log 2 + 4\left(\frac{q}{1+q} - \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{1+q^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{q^3}{1+q^3} - \ldots\right)$

$= 8\cdot\left(\frac{r}{1-r^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{r^3}{1-r^6} + \frac{1}{5}\cdot\frac{r^5}{1-r^{10}} + \ldots\right).$

En posant dans les formules (206) et (207) pag. 220: $\alpha = 1 - \frac{2x}{\pi}$, on trouvera les expressions suivantes:

33) $\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{4\pi}{c\omega'}\cdot\sqrt{q}\cdot\left(\sin x\cdot\frac{1}{1-q} + \sin 3x\cdot\frac{q}{1-q^3} + \sin 5x\cdot\frac{q^2}{1-q^5} + \ldots\right),$

34) $\lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{4\pi}{c^2\omega'}\cdot\sqrt{q}\cdot\left(\cos x\cdot\frac{1}{1+q} + \cos 3x\cdot\frac{q}{1+q^3} + \cos 5x\cdot\frac{q^2}{1+q^5} + \ldots\right),$

Ces formules offrent peut-être les plus simples expressions des fonctions elliptiques en quantités connues.

Voici encore deux autres formules, qu'on déduira des équations (204) et (205) pag. 219, en y faisant $\alpha = \frac{\omega}{2} - \omega x$:

35) $\lambda'(\omega' x) = \frac{2\pi}{c^2\varpi'}\cdot\left(\frac{r^x - r^{1-x}}{1+r} - \frac{r^{3x} - r^{3-3x}}{1+r^3} + \frac{r^{5x} - r^{5-5x}}{1+r^5} - \ldots\right),$

36) $\lambda''(\omega' x) = \frac{2\pi}{c\varpi'}\cdot\left(\frac{r^x + r^{1-x}}{1-r} - \frac{r^{3x} + r^{3-3x}}{1-r^3} + \frac{r^{5x} + r^{5-5x}}{1-r^5} - \ldots\right).$

où r signifie la même chose que précédemment.

Il y a à remarquer que les quantités r et q sont liées entre elles par l'équation:

37) $\log r . \log q = \pi^2.$

A l'aide des expressions des modules c et b données plus haut, on pourra trouver une relation générale entre les modules de deux fonction elliptiques

qui sont réductibles l'une à l'autre. En effet on pourra démontrer, comme je l'ai fait (voyes pag. 285) que si deux fonctions elliptiques *réelles:*

$$38)\quad F(c,\theta)=\int_0 \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}},\quad F(c',\theta')=\int_0 \frac{d\theta'}{\sqrt{(1-c'^2\sin^2\theta')}},$$

dont les modules c et c' sont moindres que l'unité, peuvent être réduites l'une à l'autre à l'aide d'une relation algébrique entre $\sin\theta$ et $\sin\theta'$, on peut trouver deux nombres entiers m et n, tels que l'équation

$$39)\qquad n.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-b'^2\sin^2\theta)}}$$
$$=m.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-b^2\sin^2\theta)}}.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1-c'^2\sin^2\theta)}}$$

soit satisfaite. b' est le complément de c', savoir $b'=\sqrt{(1-c'^2)}$.

Si cette condition est satisfaite on pourra toujours déterminer $\sin\theta'$ *algébriquement* en $\sin\theta$ de manière que

$$40)\qquad F(c',\theta')=a.F(c,\theta),$$

où a est un coefficient constant.

Cela posé, designons par ω'', ϖ'', r', q', les valeurs de ω', ϖ', r, q, qui répondent au module c', on aura en vertu de la formule (14):

$$\sqrt[4]{c'}=\frac{(1-r')(1-r'^3)(1-r'^5)\dots}{(1+r')(1+r'^3)(1+r'^5)\dots},$$

où $r'=e^{-\frac{\omega''}{\varpi''}\pi}$. Mais l'équation (39) donne:

$$\frac{\omega''}{\varpi''}=\frac{n}{m}\cdot\frac{\omega'}{\varpi'},$$

donc

$$r'=e^{-\frac{n}{m}\cdot\frac{\omega'}{\varpi'}\pi},$$

c'est-à-dire:

$$r'=r^{\frac{n}{m}}.$$

Donc on a ce théorème:

Une fonction elliptique réelle étant proposée, si son module c est donné par la formule:

$$41)\qquad \sqrt[4]{c}=\frac{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)}{(1+r)(1+r^3)(1+r^5)}\dots$$

on aura le module de toute autre fonction elliptique réelle, réductible à la première, en mettant au lieu de r la puissance $r^{\frac{n}{m}}$, *où n et m sont deux*

nombres entiers et positifs quelconques, c'est-à-dire, on aura en désignant par c' le module de la nouvelle fonction:

$$42) \qquad \sqrt[4]{c'} = \frac{\left(1-r^{\frac{n}{m}}\right)\left(1-r^{3\frac{n}{m}}\right)\left(1-r^{5\frac{n}{m}}\right)\cdots}{\left(1+r^{\frac{n}{m}}\right)\left(1+r^{3\frac{n}{m}}\right)\left(1+r^{5\frac{n}{m}}\right)\cdots}.$$

En faisant

$$43) \qquad \sqrt[4]{c} = \sqrt{2}.\sqrt[8]{q}.\frac{1+q^2}{1+q}.\frac{1+q^4}{1+q^3}.\frac{1+q^6}{1+q^5}\cdots$$

on aura encore la formule suivante:

$$44) \qquad \sqrt[4]{c'} = \sqrt{2}.\sqrt[8]{q^{\frac{m}{n}}}.\frac{1+q^{2\frac{m}{n}}}{1+q^{\frac{m}{n}}}.\frac{1+q^{4\frac{m}{n}}}{1+q^{3\frac{m}{n}}}.\frac{1+q^{6\frac{m}{n}}}{1+q^{5\frac{m}{n}}}.$$

Dans le cas particulier où le module c est $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on a $\varpi' = \omega'$, donc:

$$r = e^{-\pi} = q.$$

De là il suit

que le module c de toute fonction elliptique réelle, qui est réductible à la fonction $\int_0 \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}.\sin^2\theta)}}$, est donné par la formule:

$$45) \qquad \sqrt[4]{c} = \frac{1-e^{-\mu\pi}}{1+e^{-\mu\pi}}.\frac{1-e^{-3\mu\pi}}{1+e^{-3\mu\pi}}.\frac{1-e^{-5\mu\pi}}{1+e^{-5\mu\pi}}\cdots$$

$$= \sqrt{2}.e^{-\frac{\pi}{8\mu}}.\frac{1+e^{-\frac{2\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\mu}}}.\frac{1+e^{-\frac{4\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\mu}}}.\frac{1+e^{-\frac{6\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\mu}}}\cdots$$

où μ est un nombre rationnel quelconque.

Au reste c pourra toujours être exprimé dans ce cas en termes finis à l'aide de radicaux.

Si l'on suppose $b' = c$, on a $c' = b$, $\omega'' = \varpi'$, $\varpi'' = \omega'$, mais:

$$\frac{\omega''}{\varpi''} = \frac{n}{m}.\frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{\varpi'}{\omega'},$$

donc:

$$\frac{\omega''}{\varpi''} = \sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\mu}.$$

De là nous concluons:

Si deux fonctions elliptiques réelles, dont les modules sont leurs compléments réciproques, peuvent être réduites l'une à l'autre le module sera donné par la formule:

46) $$\sqrt[4]{c} = \frac{1-e^{-\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-\pi\sqrt{\mu}}} \cdot \frac{1-e^{-3\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-3\pi\sqrt{\mu}}} \cdot \frac{1-e^{-5\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-5\pi\sqrt{\mu}}} \cdot$$

et son complément b par celle-ci:

47) $$\sqrt[4]{b} = \frac{1-e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdots$$

où μ est un nombre rationnel quelconque.

Nous ajouterons qu'on a en même temps:

48) $$F(b, \theta') = k\sqrt{\mu} . F(c, \theta),$$

où k est un autre nombre rationnel.

Cela donne immédiatement le théorème suivant:

Si l'équation différentielle

49) $$\frac{dy}{\sqrt{(A+By^2+Cy^4)}} = a \cdot \frac{dx}{\sqrt{(A+Bx^2+Cx^4)}}$$

est intégrable algébriquement, il faut nécessairement que le coefficient a soit égal à la racine carrée d'un nombre rationnel et positif, en supposant que les quantités A, B, C, et a soient réelles; et si a a cette forme, on pourra trouver une infinité de valeurs convenables pour A, B, C.

Nous terminerons ces remarques par la démonstration d'une formule curieuse, qu'on tire de l'équation (20) savoir de la formule

$$(1+r)(1+r^3)(1+r^5) \ldots = \sqrt[6]{2} \cdot \frac{\sqrt[24]{r}}{\sqrt[12]{(bc)}}.$$

En y changeant c en b, b se changera en c, et r en q, donc:

$$(1+q)(1+q^3)(1+q^5) \ldots = \sqrt[6]{2} \cdot \frac{\sqrt[24]{q}}{\sqrt[12]{(bc)}}.$$

En comparant ces formules, on voit que l'équation

50) $$\frac{1}{\sqrt[24]{r}} \cdot (1+r)(1+r^3)(1+r^5) \ldots = \frac{1}{\sqrt[24]{q}} (1+q)(1+q^3)(1+q^5) \ldots,$$

a lieu toutes les fois que les quantités r et q sont moindres que l'unité et qu'elles sont liées entre elles par l'équation

$$\log r \,.\, \log q = \pi^2.$$

Il existe un grand nombre de relations semblables entre q et r, par exemple la suivante:

$$\sqrt[4]{\left[\log\left(\frac{1}{r}\right)\right]}\cdot\left(\tfrac{1}{2}+r+r^4+r^9+r^{16}\ldots\right)=\sqrt[4]{\left[\log\left(\frac{1}{q}\right)\right]}\cdot\left(\tfrac{1}{2}+q+q^4+q^9+q^{16}\ldots\right),$$

qui est due à *Mr. Chauchy* (*Exercices de mathématiques*). On pourra la déduire de la formule

$$\sqrt{\frac{\omega'}{\pi}}=1+2q+2q^4+2q^9+\ldots,$$

donnée par *Mr. Jacobi*, en y changeant c en b.

XVII.

Sur le nombre des transformations différentes, qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction rationnelle dont le degré est un nombre prémier donné.

Soit pour abréger

1) $\Delta = (1-x^2)(1-c^2x^2)$, $\Delta' = (1-y^2)(1-c'^2y^2)$

et supposons qu'on satisfasse à l'équation différentielle

2) $$\frac{dy}{\Delta'} = a.\frac{dx}{\Delta}$$

en y substituant pour y une fonction rationnelle de x de la forme

3) $$y = \frac{A_0 + A_1x + \ldots + A_{2n+1}.x^{2n+1}}{B_0 + B_1x + \ldots + B_{2n+1}.x^{2n+1}}$$

où $2n+1$ est un nombre premier et au moins un des coefficiens A_{2n+1} et B_{2n+1} est différent de zéro. En supposant, ce qui est permis, la fraction précédente réduite à sa plus simple expression, nous dirons que $\frac{dy}{\Delta'}$ se transforme en $a.\frac{dx}{\Delta}$ par la substitution d'une fonction du degré $2n+1$.

Il s'agit maintenant de trouver toutes les valeurs différentes de y qui répondent à la même valeur de $2n+1$. Si l'on fait

4) $$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta} \text{ et } \frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\Delta}$$

et qu'on désigne par $\lambda\theta$ une fonction de θ, telle que

5) $$d\theta = \frac{dx}{\Delta} \text{ pour } x = \lambda\theta,$$

et en outre

$$\lambda(0) = 0,$$

il suit immédiatement de ce que j'ai dit sur le problème général de la transformation des fonctions elliptiques dans le mémoire XIII., qu'on satisfera de la manière la plus générale à l'équation $\frac{dy}{\Delta'} = a.\frac{dx}{\Delta}$ dans le cas où $B_{2n+1}=0$, en prenant

$$5)\begin{cases} y = a\cdot\dfrac{x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 2\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2 n\alpha}\right)}{(1-c^2\lambda^2\alpha.x^2)[1-c^2\lambda^2(2\alpha).x^2]\cdots[1-c^2\lambda^2(n\alpha).x^2]}, \\ c^1 = c^{2n+1}.\left[\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\cdots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^4, \\ a = \dfrac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c^1}}.(\lambda\alpha.\lambda(2\alpha)\cdots\lambda(n\alpha))^2, \end{cases}$$

où α est une quantité de la forme

$$6)\qquad \alpha = \frac{m\omega + m^1\omega^1}{2n+1},$$

m et m^1 étant deux entiers. Maintenant, ayant trouvé cette solution, il suit encore de la formule (51) du mémoire cité que toutes les autres valeurs de y seront de la forme $\frac{f^1+f.y}{g^1+g.y}$, où y est donné par (5), et f^1, f, g, g^1 sont des quantités constantes qui doivent satisfaire à l'équation

$$7)\quad \left(1+\frac{g+f}{g^1+f^1}.x\right)\left(1+\frac{g-f}{g^1-f^1}.x\right)\left(1+\frac{g+c^1f}{g^1+c^1f^1}.x\right)\left(1+\frac{g-c^1f}{g^1-c^1f^1}.x\right) = (1-x^2)(1-c^{1^2}x^2).$$

Cette équation donne vingt-quatre systèmes de valeurs différentes. On trouve ainsi qu'à chaque valeur de a répondent 24 valeurs de y et douze valeurs du module c^1. Mais comme les valeurs de y sont deux à deux égales, mais de signes contraires, nous n'en compterons que douze. Par la même raison nous réduirons le nombre des valeurs de c^1 à six. Cela posé, si l'on fait pour abréger:

$$8)\begin{cases} p = x\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2(n\alpha)}\right);\quad v = (1-c^2\lambda^2\alpha.x^2)\cdots(1-c^2\lambda^2(n\alpha).x^2); \\ \varepsilon = c^{n+\frac{1}{2}}\left[\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\cdots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)\right]^2;\quad \delta = c^{n+\frac{1}{2}}(\lambda\alpha.\lambda(2\alpha)\cdots\lambda(n\alpha))^2, \end{cases}$$

on trouvera aisément ces valeurs correspondantes des trois quantités c^1, a, y:

$$9)\begin{cases} \qquad\quad \text{I.} \qquad\qquad \text{II.} \qquad\qquad \text{III.} \qquad\qquad \text{IV.} \qquad\qquad \text{V.} \qquad\qquad \text{VI.} \\ c^1 = \varepsilon^2,\quad \frac{1}{\varepsilon^2},\quad \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2,\quad \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2,\quad \left(\frac{1-\varepsilon i}{1+\varepsilon i}\right)^2,\quad \left(\frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i}\right)^2, \\ a = \pm\frac{\delta}{\varepsilon},\quad \pm\delta\varepsilon,\quad \pm\frac{\delta}{\varepsilon}(1+\varepsilon)^2 i,\quad \mp\frac{\delta}{\varepsilon}(1-\varepsilon)^2 i,\quad \pm\frac{\delta}{\varepsilon}(1+\varepsilon i)^2 i,\quad \mp\frac{\delta}{\varepsilon}(1-\varepsilon i)^2 i, \\ y = \begin{cases} \frac{\delta}{\varepsilon}.\frac{p}{v},\ \frac{\varepsilon}{\delta}.\frac{v}{p} \\ \frac{1}{\delta\varepsilon}.\frac{v}{p},\ \delta\varepsilon.\frac{p}{v} \end{cases},\ \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}.\frac{v\pm\delta.p}{v\mp\delta.p},\ \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.\frac{v\pm\delta.p}{v\mp\delta.p},\ \frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i}.\frac{v\pm\delta.p.i}{v\mp\delta.p.i},\ \frac{1-\varepsilon i}{1+\varepsilon i}.\frac{v\pm\delta.p.i}{v\mp\delta.p.i}, \\ (\text{où } i = \sqrt{-1}). \end{cases}$$

On voit qu'à chaque valeur de c^1 correspondent deux valeurs différentes de la fonction y. Maintenant si l'on attribue aux nombres m et m^1 des valeurs entières quelconques, on aura toutes les solutions possibles de notre problème. Or parmi ces solutions il n'y aura qu'un nombre fini qui seront différentes entre elles. Cherchons d'abord les solutions différentes qui répondent au premier cas, savoir $c^1 = \varepsilon^2$ et $y = \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \frac{p}{v}$. Pour les trouver soit α^1 une valeur de α et désignons les valeurs correspondantes de $y, p, v, \delta, \varepsilon$ par $y^1, p^1, v^1, \delta^1, \varepsilon^1$. Cela posé il est évident, que si y^1 doit être égal à $\pm y$, on doit avoir:

$$p^1 = p; \quad v^1 = v, \quad \frac{\delta^1}{\varepsilon^1} = \pm \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Or en vertu de (8) on ne pourra avoir $p^1 = p$, à moins que les quantités $\lambda^2\alpha$, $\lambda^2(2\alpha), \ldots \lambda^2(n\alpha)$ ne soient, quoique dans un ordre différent, égales à celles-ci:

$$\lambda^2\alpha^1, \; \lambda^2(2\alpha^1), \ldots \lambda^2(n\alpha^1).$$

Soit donc

$$\lambda^2\alpha^1 = \lambda^2(\mu\alpha),$$

où μ est moindre que n. On en tire $\lambda\alpha^1 = \pm \lambda(\mu\alpha)$ et de là, en vertu du théorème II. du mémoire XIII:

$$\alpha^1 = k\omega + k^1\omega^1 \pm \mu\alpha,$$

où k et k^1 désignent des nombres entiers quelconques. Cela donne

$$\lambda^2(\mu^1\alpha^1) = \lambda^2(\mu^1\mu\alpha),$$

et puisque

$$\lambda(\theta + (2n+1)\alpha) = \lambda\theta,$$

et $2n+1$ est un nombre premier, il suit que

$$p^1 = p, \; v^1 = v, \; \delta^1 = \delta, \; \varepsilon^1 = \varepsilon.$$

Donc les solutions qui répondent à α et α^1 sont précisément égales entre elles.

Soit d'abord $m^1 = 0$ en sorte que $\alpha = \frac{m\omega}{2n+1}$.

Si l'on fait $k^1 = 0$, et qu'on détermine les nombres k et μ de la manière à satisfaire à l'équation

$$k \pm \frac{\mu m}{2n+1} = \frac{1}{2n+1},$$

on aura

$$\alpha^1 = \frac{\omega}{2n+1}.$$

On voit par là que la solution qui répond à $\alpha = \frac{m\omega}{2n+1}$ est la même que celle qui répond à $\alpha = \frac{\omega}{2n+1}$, quel que soit m.

Supposons maintenant m^1 différent de zéro, on aura

$$\alpha^1 = k\omega + k^1\omega^1 \pm \frac{m\mu.\omega + m^1\mu\omega^1}{2n+1}.$$

Si l'on détermine les deux nombres entiers μ et k^1 par l'équation

$$k^1 \pm \frac{m^1\mu}{2n+1} = \frac{1}{2n+1},$$

et k par celle-ci:
$$k \pm \frac{\mu m}{2n+1} = \frac{\nu}{2n+1},$$

où ν est positif et moindre que $2n+1$, on aura

$$\alpha^1 = \frac{\omega^1 + \nu\omega}{2n+1}.$$

On voit de là, que pour toutes les valeurs différentes de v et p, il suffit de donner à α les valeurs:

$$10) \quad \frac{\omega}{2n+1}, \frac{\omega^1}{2n+1}, \frac{\omega^1+\omega}{2n+1}, \frac{\omega^1+2\omega}{2n+1}, \ldots \frac{\omega^1+2n\omega}{2n+1}.$$

Or toutes les solutions ainsi obtenues seront effectivement différentes entre elles; car si l'on attribue à α et à α^1 deux valeurs différentes de la série (10), il est clair qu'on ne pourra satisfaire à l'équation

$$\alpha^1 = k\omega + k^1\omega^1 \pm \mu\alpha,$$

qui exprime une condition nécessaire de l'identité des deux solutions qui répondent à α et à α^1.

Donc le nombre des solutions différentes qui répondent à $y = \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \frac{p}{v}$ est $2n+2$. Maintenant si l'on attribue à α toutes les valeurs (10), les formules (9) donneront $12.(2n+2)$ solutions, et il est évident que toutes les $12.(2n+2)$ valeurs correspondantes de y seront nécessairement différentes entre elles. Cependant il ne répond a ces $24.(n+1)$ solutions que $12.(n+1)$ valeurs du module. Il faut observer que la conclusion précédente n'a pas lieu pour le cas particulier où $n=0$. En effet, dans ce cas y n'aura que douze valeurs différentes, car les deux valeurs $\alpha = \omega$, $\alpha = \omega^1$, auxquelles dans ce cas se réduisent les quantités (10), donneront pour y une même valeur, savoir $y = x$. Il faut remarquer égalément que le module c ne doit avoir les valeurs zéro et l'unité. Dans ces cas la fonction $\int \frac{dx}{\Delta}$ n'est plus une fonction elliptique, mais circulaire ou logarithmique.

On pourra mettre les huit dernières valeurs de y (9) sous une autre forme qui est à quelque égard plus élégante. En effet on pourra démontrer qu'on à

$$11)\begin{cases} v-\delta.p=(1-x.\sqrt{c})(1-2k_1\sqrt{c}.x+c.x^2)(1-2k_2\sqrt{c}.x+cx^2)\ldots \\ \qquad\ldots(1-2k_n\sqrt{c}.x+cx^2), \\ v-\delta.p\sqrt{-1}=(1-x\sqrt{-c})(1-2k_1^1\sqrt{-c}.x-cx^2)(1-2k_2^1\sqrt{-c}.x-cx^2)\ldots \\ \qquad\ldots(1-2k^1_n\sqrt{-c}.x-cx^2). \end{cases}$$

En changeant le signe de x, on aura des expressions semblables pour $v+\delta.p$ et $v+\delta.p.\sqrt{-1}$. Les quantités k_1, k_2, k_3, $\ldots k_n$ sont données par la formule

$$k_\mu=\frac{\Delta(\mu\alpha)}{1-c.\lambda^2\mu\alpha}.$$

Pareillement on a

$$k_\mu^1=\frac{\Delta(\mu\alpha)}{1+c.\lambda^2(\mu\alpha)},$$

où $\Delta(\theta)$ désigne la quantité

$$\frac{d\lambda\theta}{d\theta}=\pm\sqrt{((1-\lambda^2\theta)\,(1-c^2\lambda^2\theta))}.$$

Donc le numérateur et le dénominateur de la fraction (3) qui exprime la valeur de y, se trouvent décomposés en facteurs dans tous les cas.

Dans le cas où le module c est moindre que l'unité, les équations (9), nous font voir, que généralement les modules des transformées sont imaginaires, excepté ceux qui répondent à

$$\alpha=\frac{\omega}{2n+1} \text{ et à } \alpha=\frac{\omega^1-\omega}{2n+1},$$

et en même temps à l'une des solutions I., II., III., IV. Il n'y a donc que huit modules réels. Si l'on ne désire que ceux qui sont moindres que l'unité, on n'en aura que quatre. Cependant il pourra arriver, c ayant des valeurs particulières, qu'un plus grand nombre des modules transformés sont réels. Je ferai voir dans une autre occasion, comment on pourra trouver toutes ces valeurs particulières. Pour le moment je ferai connaître une manière d'exprimer toutes les valeurs du module c^1 à l'aide de produits infinis.

Si c est moindre que l'unité, ω sera une quantité réelle, ω^1 au contraire sera imaginaire; car on a

$$\omega^1=2.\int_0^{\frac{1}{c}}\frac{dx}{\Delta}=\omega+2\sqrt{-1}.\int_1^{\frac{1}{c}}\frac{dx}{\sqrt{[(x^2-1)(1-c^2x^2)]}},$$

c'est-à-dire, si l'on fait

$$\frac{\varpi}{2}=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{[(1-z^2)(1-b^2z^2)]}},$$

où

$$b=\sqrt{(1-c^2)},$$

on aura

$$\omega^1=\omega+\varpi\sqrt{-1},$$

où ϖ est une quantité réelle comme ω. Cela posé les $2n+2$ valeurs de α deviendront:

$$\frac{\omega}{2n+1},\quad \frac{\varpi i+\omega}{2n+1},\quad \ldots \frac{\varpi i+(2n+1)\omega}{2n+1}.$$

A la place de ces valeurs on pourra aussi mettre celles-ci:

$$\frac{\omega}{2n+1},\quad \frac{\varpi i}{2n+1},\quad \frac{\varpi i+2\omega}{2n+1},\quad \frac{\varpi i+4\omega}{2n+1},\quad \ldots \frac{\varpi i+4n\omega}{2n+1},$$

où $i=\sqrt{-1}$.

En faisant $c=1$, $e=\frac{c}{b}$ (formule 189. pag. 217), et mettant ensuite $b\omega$ et $b\varpi$ au lieu de ω et ϖ, et enfin $\alpha=b\left(\frac{\omega}{2}-\theta\right)$, on trouvera $\lambda\theta=f\alpha$ et la formule donnera en vertu de quelques réductions faciles:

$$12)\quad \lambda\theta=\frac{2}{\sqrt{c}}.\sqrt[4]{q}.\sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right).\frac{\left[1-2q^2\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^4\right]\left[1-2q^4\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^8\right]\ldots}{\left[1-2q.\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^2\right]\left[1-2q^3\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right)+q^6\right]\ldots},$$

où $q=e^{-\frac{\varpi}{\omega}\pi}$.

Pour avoir la valeur de ε (8), il suffit de chercher les valeurs de $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)$, $\ldots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)$ au moyen de la formule précédente, et de les multiplier ensuite entre elles. D'abord si l'on fait $\alpha=\frac{\omega}{2n+1}$ on trouvera aisément

$$13)\qquad \varepsilon=2.\sqrt[4]{q^{2n+1}}.\left(\frac{1+q^{2(2n+1)}}{1+q^{2n+1}}.\frac{1+q^{4(2n+1)}}{1+q^{3(2n+1)}}\ldots\right)^2.$$

De même si l'on fait

$$\alpha=\frac{\varpi i+2\mu\omega}{2n+1},$$

et pour abréger

$$\delta_1=\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\sqrt{-1}.\sin\frac{2\pi}{2n+1},$$

on parviendra à cette formule:

$$14)\quad \varepsilon=2.\sqrt[4]{\left(\delta_1^{\mu}.q^{\frac{1}{2n+1}}\right)}.\left\{\frac{1+\left(\delta_1^{\mu}.q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^2}{1+\delta_1^{\mu}.q^{\frac{1}{2n+1}}}.\frac{1+\left(\delta_1^{\mu}.q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^4}{1+\left(\delta_1^{\mu}.q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^3}\ldots\right\}^2.$$

Donc on voit, que pour avoir toutes les valeurs de ε, il suffit de substituer dans l'expression

$$15)\qquad 2.\sqrt[4]{q}.\left(\frac{1+q^2}{1+q}\cdot\frac{1+q^4}{1+q^3}\cdots\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\cdots\right)^2,$$

au lieu de q, $2n+2$ valeurs q^{2n+1}, $q^{\frac{1}{2n+1}}$, $\delta_1\, q^{\frac{1}{2n+1}}$, $\delta_1^2\, q^{\frac{1}{2n+1}}, \ldots \delta_1^{2n}.q^{\frac{1}{2n+1}}$, où 1, δ_1, $\delta_1^2, \ldots$ sont les racines de l'équation $\delta^{2n+1}=1$. Deux seulement des valeurs de ε sont réelles, savoir celles qui répondent à la substitution de q^{2n+1} et $q^{\frac{1}{2n+1}}$, c'est-à-dire à

$$\alpha=\frac{\omega}{2n+1} \text{ et } \alpha=\frac{\varpi i}{2n+1}.$$

Il suit encore des formules précédentes que toutes les $2n+2$ valeurs de ε sont nécessairement différentes entre elles, excepté peut-être pour les cas de valeurs particulières du module c. Ayant trouvé les valeurs de ε, on aura celles du module c^1 à l'aide des équations (9). Il y a à remarquer que l'expression (15) est précisément la valeur de $\sqrt{c}$, comme on peut le voir en faisant $\theta=\frac{\omega}{2}$. Dans le cas où l'on suppose y de la forme $\frac{\delta}{\varepsilon}.v$, le module c^1, suivant I. (9) sera égal à ε^2, donc $\sqrt{c^1}=\varepsilon$. Par conséquent dans ce cas le module c se changera successivement dans toutes les valeurs du module c^1, si l'on remplace dans la formule

$$16)\qquad \sqrt{c}=2.\sqrt[4]{q}.\left(\frac{1+q^2}{1+q}\cdot\frac{1+q^4}{1+q^3}\cdots\right)^2,$$

q par q^{2n+1}, $\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1^2\sqrt[2n+1]{q}, \ldots \delta_1^{2n}\sqrt[2n+1]{q}$.

Ce théorème s'accorde parfaitement avec le théorème énoncé par *Mr. Jacobi* dans le tome III. pag. 193. du journal de *Mr. Crelle*. Seulement à l'endroit cité la fonction de q, qui exprime la valeur de $\sqrt{c}$, est présentée sous une autre forme. Donc on trouverait immédiatement le théorème de ce géomètre, si l'on pouvait parvenir à démontrer l'identité des deux fonctions

$$17)\qquad \sqrt[4]{q}.\left(\frac{1+q^2}{1+q}\cdot\frac{1+q^4}{1+q^3}\cdots\right)^2=\frac{q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}.$$

On pourra encore démontrer qu'on aura les $2n+2$ valeurs de c^1, en mettant dans la formule

$$18)\qquad \sqrt[4]{c}=\frac{1-r}{1+r}\cdot\frac{1-r^3}{1+r^3}\cdot\frac{1-r^5}{1+r^5}\cdots$$

les quantités r^{2n+1}, $\sqrt[2n+1]{r}$, $\delta\sqrt[2n+1]{r}$, $\delta^2\sqrt[2n+1]{r}, \ldots \delta^{2n}\sqrt[2n+1]{r}$, au lieu de r, la lettre r désignant la quantité $e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}$. Donc cette quantité est liée à q par l'équation

$$\log\left(\frac{1}{r}\right).\log\left(\frac{1}{q}\right) = \pi^2.$$

Pour avoir la valeur du coefficient a il faut connaitre celle de δ (8). Or on pourra la déduire aisément de la formule (12), en y faisant $\theta = \alpha,\ 2\alpha \ldots n\alpha$. On trouve de cette manière que les valeurs de δ qui répondent respectivement à

$$\alpha = \frac{\omega}{2n+1},\ \frac{\varpi i}{2n+1},\ \frac{\varpi i + 2\omega}{2n+1}, \ldots \frac{\varpi i + 4n\omega}{2n+1},$$

sont égales à la valeur de l'expression

$$19) \qquad \delta = 2 \cdot \frac{\pi}{\omega} \cdot \sqrt[4]{q} \cdot \left(\frac{1-q^2}{1-q} \cdot \frac{1-q^4}{1-q^3} \ldots\right)^2,$$

en y supposant au lieu de q les valeurs q^{2n+1}, $\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1^2\sqrt[2n+1]{q}, \ldots \delta_1^{2n}\sqrt[2n+1]{q}$.

XVIII.

Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce.

Si une intégrale algébrique $f(y,x)=0$ satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}}=a.\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

on aura toujours:

$$\int\frac{A+B.x^2}{1-\frac{x^2}{n^2}}.\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}=\int\frac{A^1+B^1y^2}{1-\frac{y^2}{m^2}}.\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}}+k\log p,$$

où A, B, n sont des quantités données, A', B', m, k des quantités constantes, fonctions des premières, et p une certaine fonction algébrique de y et x. Il est très remarquable que les paramètres m et n sont liés entre eux par la même équation, que y et x; savoir $f(m,n)=0$. Dans le cas où n est infini, le premier membre deviendra seulement une fonction de la seconde espèce et dans ce cas on pourra démontrer que

$$(a)\int(A+Bx^2)\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}=\int(A'+B'y^2)\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}}+v,$$

où v est une fonction algébrique des variables x et y.

Au reste il est aisé de démontrer la formule (a). Il n'y a qu'à différentier l'équation

$$a\int\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}=\int\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}},$$

par rapport au module c. Je me réserve de donner dans un autre mémoire des développemens plus étendus sur le théorème ci-dessus.

XIX.

Théorèmes sur les fonctions elliptiques.

La formule donnée par *Mr. Jacobi* dans le tome III. pag. 86. du journal de *M. Crelle* peut être établie facilement à l'aide d'un théorème que nous allons démontrer dans ce qui suit.

En faisant $\varphi\theta = x$, on aura, en vertu de ce qu'on a vu dans le §. III. du mémoire XII. pag. 157,

$$1) \qquad \varphi(2n+1)\theta = R,$$

où R est une fonction rationnelle de x, le numérateur étant du degré $(2n+1)^2$ et le dénominateur du degré $(2n+1)^2 - 1$. L'équation (1) est donc du degré $(2n+1)^2$ et ses racines peuvent être exprimées par la formule:

$$2) \qquad x = \varphi\left(\theta + \frac{2m\omega + 2\mu\varpi i}{2n+1}\right),$$

en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ incl.

Soit pour abréger

$$3) \qquad \frac{2\omega}{2n+1} = \alpha, \; \frac{2\varpi i}{2n+1} = \beta,$$

l'expression des racines sera:

$$4) \qquad x = \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta).$$

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème I. Soit $\psi\theta$ une fonction *entière* quelconque de la quantité $\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$ qui reste la même en changeant θ en $\theta + \alpha$ et en $\theta + \beta$. Soit ν le plus grand exposant de la quantité $\varphi\theta$ dans la fonction $\psi\theta$ on aura toujours

$$5) \qquad \psi\theta = p + q \, . f(2n+1)\theta \, . F(2n+1)\theta$$

où p et q sont deux fonctions *entières* de $\varphi(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$

Démonstration. En vertu de la formule (10) pag. 145. on a

$$\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \frac{\varphi\theta . f(m\alpha + \mu\beta) . F(m\alpha + \mu\beta) + \varphi(m\alpha + \mu\beta) . f\theta . F\theta}{1 + e^2c^2 . \varphi^2(m\alpha + \mu\beta) . \varphi^2\theta}.$$

Cela fait voir que $\psi\theta$ pourra s'exprimer rationnellement en $\varphi\theta$ et $f\theta.F\theta$. Or le carré de $f\theta.F\theta$ est rationnel en $\varphi\theta$, savoir

$$(f\theta.F\theta)^2 = (1-c^2\varphi^2\theta)(1+e^2\varphi^2\theta),$$

donc on pourra faire en sorte que l'expression de $\psi\theta$ ne contienne la quantité $f\theta.F\theta$ qu'à la première puissance. On pourra donc faire

$$7) \qquad \psi\theta = \psi_1(\varphi\theta) + \psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta,$$

où $\psi_1(\varphi\theta)$ et $\psi_2(\varphi\theta)$ sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$.

Si l'on met $\omega-\theta$ à la place de θ, on aura, en remarquant que $\varphi(\omega-\theta) = \varphi\theta$, $f(\omega-\theta) = -f\theta$, $F(\omega-\theta) = F\theta$:

$$8) \qquad \psi(\omega-\theta) = \psi_1(\varphi\theta) - \psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta.$$

Des équations (7 et 8) on tire:

$$9) \qquad \psi_1(\varphi\theta) = \tfrac{1}{2}.(\psi\theta + \psi(\omega-\theta)),$$

$$10) \qquad \psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta = \tfrac{1}{2}.(\psi\theta - \psi(\omega-\theta)).$$

Considérons d'abord la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$. En y mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra:

$$\psi_1(\varphi(\theta+\alpha)) = \tfrac{1}{2}.(\psi(\theta+\alpha) + \psi(\omega-\alpha-\theta));$$

or on a $\psi(\theta+\alpha) = \psi\theta$, et par conséquent aussi, en mettant $\omega-\alpha-\theta$ au lieu de θ:

$$\psi(\omega-\theta) = \psi(\omega-\alpha-\theta);$$

donc

$$\psi_1(\varphi(\theta+\alpha)) = \tfrac{1}{2}(\psi\theta + \psi(\omega-\theta)),$$

c'est-à-dire

$$\psi_1(\varphi(\theta+\alpha)) = \psi_1(\varphi\theta).$$

On aura de la même manière:

$$\psi_1(\varphi(\theta+\beta)) = \psi_1(\varphi\theta).$$

La première de ces équations donne, en mettant successivement $\theta+\alpha$, $\theta+2\alpha$, … … au lieu de θ:

$$11) \qquad \psi_1(\varphi(\theta+m\alpha)) = \psi_1(\varphi\theta),$$

où m est un nombre entier quelconque.

La seconde équation donne également

$$\psi_1(\varphi(\theta+\mu\beta)) = \psi_1(\varphi\theta),$$

d'où, en mettant $\theta+m\alpha$ au lieu de θ, et ayant égard à l'équation (11) on tire:

$$12) \qquad \psi_1(\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)) = \psi_1(\varphi\theta).$$

Donc la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$ reste la même, en y substituant au lieu de $\varphi\theta$ une autre racine quelconque de l'équation (1). En attribuant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ et puis ajoutant, la formule (12) donne:

$$13)\qquad \psi_1(\varphi\theta) = \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot\sum_0^{2n}{}_m\sum_0^{2n}{}_\mu \psi_1.(\varphi(\theta+m\alpha+\mu\beta)).$$

Le second membre de cette équation est une fonction *rationnelle* et *symétrique* des racines de l'équation (1), donc on pourra l'exprimer rationnellement par les coefficiens de cette équation, c'est-à-dire en $\varphi(2n+1)\theta$. Soit

$$\psi_1(\varphi\theta) = p,$$

la quantité p sera une fonction rationnelle de $\varphi(2n+1)\theta$. Or je dis que p sera toujours entier. En effet soit $\varphi(2n+1)\theta = y$ et $p = \frac{p'}{q'}$, où p' et q' sont des fonctions entières de y sans diviseur commun. Soit $y = \varphi(2n+1)\delta$ une racine de l'équation $q' = 0$: la quantité $p = \frac{1}{2}(\psi\theta + \psi(\omega-\theta))$ sera infinie en faisant $\theta = \delta$, donc on aura $\psi\delta + \psi(\omega-\delta) = \frac{1}{0}$; maintenant il est évident par la forme de la fonction $\psi\theta$, que cette équation ne peut subsister à moins qu'une quantité de la forme

$$\varphi(\delta+m\alpha+\mu\beta) \text{ ou } \varphi(\omega-\delta+m\alpha+\mu\beta)$$

n'ait une valeur infinie. Soit donc $\varphi(\delta+m\alpha+\mu\beta) = \frac{1}{0}$, on aura en vertu de l'équation (30) pag. 153:

$$\delta = (m'+\tfrac{1}{2})\omega + (n'+\tfrac{1}{2})\varpi i - m\alpha - \mu\beta,$$

où m' et n' sont des nombres entiers; or cette valeur de δ donne:

$$\varphi(2n+1)\delta = \varphi\Big(((2n+1)m'+n-2m)\omega + ((2n+1)n'+n-2\mu)\varpi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi}{2}i\Big),$$

c'est-à-dire (26. pag. 151.):

$$\varphi(2n+1)\delta = \tfrac{1}{0}.$$

Mais cela est impossible, car une racine quelconque de l'équation $q' = 0$ doit être finie. On trouvera également que $\varphi(\omega-\delta+m\alpha+\mu\beta) = \frac{1}{0}$ donne $\varphi(2n+1)\delta = \frac{1}{0}$. La quantité p est donc une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$.

Considérons maintenant l'équation (10). En divisant les deux membres par $f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta$, on aura:

$$\frac{\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}.$$

En vertu de ce qu'on a vu (45) pag. 157, on aura $f(2n+1)\theta = f\theta.u$, $F(2n+1)\theta = F\theta.v$, où u et v sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$; donc le second membre de l'équation précédente sera une fonction rationnelle de $\varphi\theta$. En la désignant par $\chi(\varphi\theta)$, on aura:

$$\chi(\varphi\theta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\psi\theta-\psi(\omega-\theta)}{f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta}.$$

En mettant $\theta+\alpha$ au lieu de θ, il viendra $\psi(\theta+\alpha)=\psi\theta$, $\psi(\omega-(\theta+\alpha))=\psi(\omega-\theta)$,

$$f(2n+1)(\theta+\alpha)=f((2n+1)\theta+2m\omega+2\mu\varpi i)=f(2n+1)\theta,$$
$$F(2n+1)(\theta+\alpha)=F((2n+1)\theta+2m\omega+2\mu\varpi i)=F(2n+1)\theta,$$

donc on aura

$$\chi(\varphi(\theta+\alpha))=\chi(\varphi\theta).$$

De la même manière on trouvera

$$\chi(\varphi(\theta+\beta))=\chi(\varphi\theta).$$

On en tire, comme plus haut, à l'égard de la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$, que $\chi(\varphi\theta)$ peut être exprimé par une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc

$$\chi(\varphi\theta)=q,$$

on aura:

$$\psi_1(\varphi\theta).f\theta.F\theta=q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

et enfin:

$$14)\qquad \psi\theta=p+q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$.

Pour trouver les degrés de ces fonctions, soit $(\varphi\theta)^\nu.\chi\theta$ le terme de $\psi\theta$, dans lequel $\varphi\theta$ est élevé à la plus haute puissance, on aura, en supposant $\varphi\theta$ infini:

$$\psi\theta=A.(\varphi\theta)^\nu,$$

où A est une constante. De même on aura

$$\psi(\omega-\theta)=A'.(\varphi\theta)^\nu,$$

et par suite:

$$p=\tfrac{1}{2}(A+A').(\varphi\theta)^\nu;$$

mais pour $\varphi\theta$ infini, on a $\varphi(2n+1)\theta=B.\varphi\theta$, où B est une constante. Il suit de là que p sera du degré ν par rapport à $\varphi(2n+1)\theta$. On démontrera de la même manière que la fonction q sera du degré $\nu-2$, tout au plus.

Voilà démontré notre théorème.

Dans le cas où la quantité $\varphi\theta$ ne monte qu'à la première puissance dans $\psi\theta$, on a $\nu=1$; par conséquent q sera du degré -1, c'est-à-dire $q=0$. Donc on a dans ce cas

$$15)\qquad \psi\theta=A+B.\varphi(2n+1)\theta,$$

où A et B sont des quantités constantes, qu'on trouvera facilement en faisant $\theta=0$ et $\varphi\theta=\frac{1}{0}$.

Soit par exemple $\pi\theta$ le produit d'un nombre quelconque des racines de l'équation (1), et faisons

$$\psi\theta = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta),$$

il est clair qu'on aura $\psi(\theta) = \psi(\theta+\alpha) = \psi(\theta+\beta)$ en remarquant que

$$\pi(\theta + (2n+1)\alpha + \mu\beta) = \pi(\theta + \mu\beta)$$

et

$$\pi(\theta + (2n+1)\beta + m\alpha) = \pi(\theta + m\alpha).$$

Donc

$$16)\qquad \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = A + B.\varphi(2n+1)\theta.$$

Il faut remarquer que l'une des quantités A et B est toujours égale à zéro. On a $A = 0$, si le nombre des facteurs de $\pi\theta$ est un nombre impair, et $B = 0$, si ce nombre est pair. Donc la quantité $\psi\theta$ est indépendante de la valeur de θ. Dans ce dernier cas, par conséquent, en faisant, $\theta = 0$ on a:

$$17)\qquad \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \pi(m\alpha + \mu\beta).$$

Donc en faisant

$$\pi\theta = \varphi\theta.\varphi(\theta + k\alpha + k'\beta),$$

on a

$$18)\left\{\begin{aligned} &\sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta).\varphi(\theta + (m+k)\alpha + (\mu+k')\beta) \\ &= \sum_0^{2n}{}_m \sum_0^{2n}{}_\mu \varphi(m\alpha + \mu\beta).\varphi((m+k)\alpha + (\mu+k')\beta), \end{aligned}\right.$$

où k et k' sont des nombres entiers quelconques, moindres que $2n+1$. Cependant on ne peut pas supposer à la fois $k=0$, $k'=0$. Car cela donne $\pi\theta = (\varphi\theta)^2$ et par suite $\nu = 2$, tandis qu'on doit avoir

$$\nu = 1.$$

De la même manière que nous avons démontré le théorème précédent on pourra encore établir les deux suivants:

Théorème II. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $f(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi\theta = \psi(\theta+\alpha) = \psi(\theta+\beta),$$

on aura:

$$\psi\theta = p + q.\varphi(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $f(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $f\theta$ dans $\psi\theta$.

Théorème III. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $F(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi(\theta) = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta),$$

on aura

$$\psi\theta = p + q \cdot \varphi(2n+1)\theta \cdot f(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $F(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $F\theta$ dans $\psi\theta$.

En vertu du premier théorème on voit sans difficulté que la valeur de $\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right)$, exprimée en fonction de $\varphi\theta$, sera:

$$\varphi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\sum_{0}^{4n^2+4n}{}_m \sqrt[2n+1]{(p_m + q_m \cdot F\theta \cdot f\theta)}\right),$$

où p_m et q_m sont deux fonctions entières de $\varphi\theta$, la première impaire et du degré $2n+1$, la seconde paire et du degré $2n-2$. D'ailleurs ces fonctions sont déterminées par l'équation

$$p^2_m - q^2_m (f\theta)^2 \cdot (F\theta)^2 = (\varphi^2\theta - a^2_m)^{2n+1},$$

où a_m est une constante.

Christiania le 27. Août 1828.

XX.

Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes.

Théorème. Soit y une fonction de x qui satisfait à une équation quelconque irréductible de la forme:

$$1) \qquad 0 = p_0 + p_1 \cdot y + p_2 \cdot y^2 + \cdots + p_{n-1} \cdot y^{n-1} + y^n$$

où $p_0, p_1, p_2, \dots p_{n-1}$ sont des fonctions entières de la variable x. Soit

$$2) \qquad 0 = q_0 + q_1 \cdot y + q_2 \cdot y^2 + \cdots q_{n-1} \cdot y^{n-1},$$

une équation semblable, $q_0, q_1, q_2, \dots q_{n-1}$ étant également des fonctions entières de x, et supposons variables les coefficiens des diverses puissances de x dans ces fonctions. Nous désignerons ces coefficiens par $a, a', a'', \dots$ En vertu des deux équations (1) et (2) x sera fonction de $a, a', a'', \dots$ et on en déterminera les valeurs en éliminant la quantité y. Désignons par:

$$3) \qquad \varrho = 0$$

le résultat de l'élimination, en sorte que ϱ ne contiendra que les variables $x, a, a', a'', \dots$ Soit μ le degré de cette équation par rapport à x, et désignons par

$$4) \qquad x_1, x_2, x_3, \dots x_\mu$$

ses μ racines, qui seront autant de fonctions de $a, a', a'', \dots$ Cela posé, si l'on fait

$$5) \qquad \psi x = \int f(x, y) . dx$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction *rationnelle* quelconque de x et de y, je dis, que la fonction transcendante ψx jouira de la propriété générale exprimée par l'équation suivante:

$$6) \quad \psi x_1 + \psi x_2 + \dots + \psi x_\mu = u + k_1 \log v_1 + k_2 \log v_2 + \dots + k_n \log v_n,$$

$u, v_1, v_2, \dots v_n$ étant des fonctions rationnelles de $a, a', a'', \dots$, et $k_1, k_2, \dots k_n$ des constantes.

Démonstration. Pour prouver ce théorème il suffit d'exprimer la différentielle du premier membre de l'équation (6) en fonction de $a, a', a'', \dots$; car

il se réduira par là à une différentielle rationnelle, comme on le verra. D'abord les deux équations (1) et (2) donneront y en fonction rationnelle de x, a, a', a'', ... De même l'équation (3): $\varrho = 0$ donnera pour dx une expression de la forme

$$dx = \alpha . da + \alpha' . da' + \alpha'' . da'' + \dots,$$

où α, α', α'', ... sont des fonctions rationnelles de x, a, a', a'', ... De là il suit que la différentielle $f(x, y) . dx$ pourra être mise sous la forme;

$$f(x, y) dx = \varphi x . da + \varphi_1 x . da' + \varphi_2 x . da'' + \dots,$$

où φx, $\varphi_1 x$, ... sont des fonctions rationnelles de x, a, a', a'', ... En intégrant, il viendra:

$$\psi x = \int (\varphi x . da + \varphi_1 x . da' + \dots)$$

et de là on tire, en remarquant que cette équation aura lieu en mettant pour x les μ valeurs de cette quantité:

$$7) \qquad \psi x_1 + \psi x_2 + . \psi x_\mu$$
$$= \int ((\varphi x_1 + \varphi x_2 + \dots + \varphi x_\mu) da + (\varphi_1 x_1 + \varphi_1 x_2 + \dots + \varphi_1 x_\mu) da' + \dots).$$

Dans cette équation les coefficiens des différentielles da, da', ... sont des fonctions rationnelles de a, a', a'', ... et de x_1, x_2, ... x_μ, mais d'ailleurs ils sont symétriques par rapport à x_1, x_2, ... x_μ; donc, en vertu d'un théorème connu, on pourra exprimer ces fonctions rationnellement par a, a', a'', ... et par les coefficiens de l'équation $\varrho = 0$; mais ceux-ci sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des variables a, a', a'', ..., donc enfin les coefficiens de da, da', da'', ... de l'équation (7) le seront également. Donc, en intégrant, on aura une équation de la forme (6).

Je me propose de développer dans une autre occasion de nombreuses applications de ce théorème, qui jetteront un grand jour sur la nature des fonctions transcendantes dont il s'agit.

Christiania le 6. Janvier 1829.

XXI.

Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.

Introduction.

La théorie des fonctions elliptiques, créée par *Mr. Legendre,* forme une des parties les plus intéressantes de l'analyse. Ayant essayé de donner de nouveaux développemens à cette théorie, je suis, si je ne me trompe, parvenu à plusieurs résultats qui me paraissent mériter quelque attention. Surtout j'ai cherché à donner de la généralité à mes recherches, en me proposant des problèmes d'une vaste étendue. Si je n'ai été assez heureux de les résoudre complètement, au moins j'ai proposé les moyens pour y parvenir. L'ensemble de mes recherches sur cet objet formera un ouvrage de quelque étendue, mais que les circonstances ne me permettent pas encore de publier. C'est pourquoi je vais donner ici un Précis de la méthode que j'ai suivie, avec les résultats généraux, auxquelles elle m'a conduit. Ce mémoire sera divisé en deux parties.

Dans *la première* je considère les fonctions elliptiques comme intégrales indéfinies, sans rien y ajouter sur la nature des quantités réelles ou imaginaires, qui les composent. Je me servirai des notations suivantes:

$$\Delta(x,c) = \pm \sqrt{((1-x^2)(1-c^2x^2))},$$

$$\varpi(x,c) = \int \frac{dx}{\Delta(x,c)},$$

$$\varpi_0(x,c) = \int \frac{x^2 dx}{\Delta(x,c)},$$

$$\Pi(x,c,a) = \int \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta(x,c)},$$

en sorte que

$$\varpi(x,c),\ \varpi_0(x,c),\ \Pi(x,c,a)$$

désignent respectivement les fonctions de première, de seconde et de troisième espèce.

Puis je me suis proposé ce problème général: "Trouver tous les cas possibles dans lesquels on peut satisfaire à une équation de la forme:

$$a)\begin{cases} \alpha_1.\varpi(x_1,c_1)+\alpha_2.\varpi(x_2,c_2)+\ldots+\alpha_n.\varpi(x_n,c_n) \\ +\alpha'_1.\varpi_0(x'_1,c'_1)+\alpha'_2.\varpi_0(x'_2,c'_2)+\ldots+\alpha'_m.\varpi_0(x'_m,c'_m) \\ +\alpha''_1.\Pi(x''_1,c''_1,a_1)+\alpha''_2.\Pi(x''_2,c''_2,a_2)+\ldots+\alpha''_\mu\Pi(x''_\mu,c''_\mu a_\mu) \\ =u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\ldots+A_\nu\log v_\nu, \end{cases}$$

où

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\alpha_n;\ \alpha'_1,\ \alpha'_2,\ldots\alpha'_m;$$
$$\alpha''_1,\ \alpha''_2,\ldots\alpha''_\mu;\ A_1,\ A_2,\ldots A_\nu$$

sont des quantités constantes, $x_1,\ x_2,\ldots x_n;\ x'_1,\ x'_2,\ldots x'_m;\ x''_1,\ x''_2,\ldots x''_\mu$ des *variables* liées entre elles par des équations *algébriques*, et $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$ des fonctions *algébriques* de ces variables."

J'établie d'abord les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques, ou ce qui concerne leur sommation, en faisant usage d'une méthode particulière, qui en même temps est applicable avec la même facilité à une infinité d'autres transcendantes plus compliquées. En m'appuiant sur ces propriétés fondamentales, je considère ensuite l'équation dans toute sa généralité et je fais le premier pas à mon but en démontrant un théorème général sur la forme qu'on pourra donner à l'intégrale d'une fonction algébrique quelconque, en supposant cette intégrale exprimable par des fonctions *algébriques, logarithmiques* et *elliptiques*, théorème qui est d'un grand usage dans tout le calcul intégral, à cause de sa grande généralité.

J'en tire, comme corollaire, le théorème suivant:

"Si $\int\frac{rdx}{\Delta(x,c)}$, où r est une fonction rationnelle quelconque de x, est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques et par les fonctions elliptiques $\psi,\ \psi_1,\ \psi_2,\ldots$, on pourra toujours supposer

$$b)\ \int\frac{rdx}{\Delta(x,c)}=p\Delta(x,c)+\alpha.\psi(y)+\alpha'\psi_1(y_1)+\alpha''.\psi_2(y_2)+\ldots$$
$$\ldots+A_1\log\left(\frac{q_1+q'_1.\Delta(x,c)}{q_1-q'_1.\Delta(x,c)}\right)+A_2\log\left(\frac{q_2+q'_2.\Delta(x,c)}{q_2-q'_2.\Delta(x,c)}\right)+\ldots$$

où toutes les quantités $p,\ q_1,\ q_2,\ldots q'_1,\ q'_2,\ldots y,\ y_1,\ y_2,\ldots$ sont des *fonctions rationnelles* de x *)."

---

*) Ce théorème a également lieu, si $\Delta(x,c)$ est la racine carrée d'une fonction entière d'un degré *quelconque*.

De ce théorème je tire ensuite celui-ci:

"Si une équation quelconque de la forme (a) a lieu, et qu'on désigne par c un quelconque des modules qui y entrent, il y en aura parmi les autres au moins un module c' tel, qu'on puisse satisfaire à l'équation différentielle:

$$\frac{dy}{\Delta(y,c')} = \varepsilon \cdot \frac{dx}{\Delta(x,c)},$$

en mettant pour y une fonction *rationnelle* de x, et vice versa."

Ces théorèmes sont très importants dans la théorie des fonctions elliptiques. Ils réduisent la solution du problème général à celle de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$\frac{dy}{\Delta(y,c')} = \varepsilon \cdot \frac{dx}{\Delta(x,c)},$$

où à la transformation des fonctions de première espèce. Je donne la solution complète de ce problème, et j'en tire ensuite la transformation générale des fonctions de première espèce. Je fais voir que les modules doivent nécessairement être liés entre eux par une équation algébrique. On peut se contenter de considérer le cas, où le degré de la fonction y est un nombre premier, en y comprenant l'unité. Si ce degré est désigné par μ, c' pourra avoir $6(\mu+1)$ valeurs différentes, excepté pour $\mu=1$, où ce nombre se réduit à 6.

La seconde partie traite les fonctions à modules réels et moindres que l'unité. Au lieu des fonctions $\varpi(x,c)$, $\varpi_0(x,c)$, $\Pi(x,c,a)$ j'en introduis trois autres, savoir d'abord la fonction $\lambda(\theta)$, déterminée par l'équation

$$\theta = \int_0^{\lambda\theta} \frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

C'est la fonction inverse de la première espèce. En mettant $x = \lambda\theta$ dans les expressions de $\varpi_0(x,c)$, $\Pi(x,c,a)$, elles deviendront de la forme:

$$\varpi_0(x,c) = \int(\lambda\theta)^2 \, . \, d\theta;$$

$$\Pi(x,c,a) = \int \frac{d\theta}{1 - \frac{\lambda^2\theta}{a^2}}.$$

Mises sous cette forme, les fonctions elliptiques offrent des propriétés très remarquables, et sont beaucoup plus traitables. C'est surtout la fonction $\lambda\theta$, qui mérite une attention particulière. Cette fonction a été l'objet, du mémoire XII. où j'ai démontré le premier quelques-unes de ses propriétés fondamentales. On en trouvera d'avantage dans ce mémoire. Je vais indiquer rapidement quelques-uns des résultats auxquels je suis parvenu:

1. La fonction $\lambda\theta$ jouit de la propriété remarquable d'être périodique de deux manières différentes, savoir non seulement pour des valeurs réelles de la variable, mais encore pour des valeurs imaginaires. En effet si l'on fait pour abréger

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x,c)}, \quad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\Delta(x,b)},$$

où $b = \sqrt{(1-c^2)}$ et $\sqrt{-1} = i$, on aura:

$$\lambda(\theta + 2\varpi) = \lambda\theta; \ \lambda(\theta + \omega i) = \lambda\theta.$$

2. La fonction $\lambda\theta$ devient égale à zéro et à l'infini, pour une infinité de valeurs réelles et imaginaires de θ, savoir

$$\lambda(m\varpi + n\omega i) = 0, \ \lambda\left(m\varpi + (n + \tfrac{1}{2})\omega i\right) = \tfrac{1}{0},$$

où m et n sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. De même on a

$$\lambda\theta' = \lambda\theta,$$

si $\theta' = (-1)^m\theta + m\varpi + n\omega i$; mais cette relation est nécessaire.

3. La propriété fondamentale de $\lambda\theta$ est exprimée par l'équation

$$\lambda(\theta' + \theta) . \lambda(\theta' - \theta) = \frac{(\lambda\theta')^2 - (\lambda\theta)^2}{1 - c^2(\lambda\theta)^2(\lambda\theta')^2},$$

où θ' et θ sont des variables quelconques, réelles ou imaginaires.

4. La fonction $\lambda\theta$ pourra se développer en facteurs et en fractions de beaucoup de manières; par exemple si l'on fait pour abréger

$$q = e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}, \quad p = e^{-\frac{\varpi}{\omega}\pi},$$

on a:

$$\lambda(\theta\varpi) = \frac{2}{\sqrt{c}}\sqrt[4]{q} . \sin(\pi\theta) \frac{[1-2q^2.\cos(2\theta\pi)+q^4][1-2q^4.\cos(2\theta\pi)+q^8][1-2q^6.\cos(2\theta\pi)+q^{12}]\ldots}{[1-2q\ .\cos(2\theta\pi)+q^2][1-2q^3.\cos(2\theta\pi)+q^6][1-2q^5.\cos(2\theta\pi)+q^{10}]\ldots}$$

$$= \frac{4\sqrt{q}}{c} . \frac{\pi}{\varpi} . \left(\frac{1}{1-q} . \sin(\theta\pi) + \frac{q}{1-q^3} . \sin(3\theta\pi) + \frac{q^2}{1-q^5} . \sin(5\theta\pi) + \ldots\right),$$

$$\lambda\left(\frac{\varpi}{2} - \theta\omega\right) = \frac{1}{\sqrt{c}} . \frac{(1-p . e^{-2\pi\theta})(1-p . e^{2\pi\theta})(1-p^3 . e^{-2\pi\theta})(1-p^3 . e^{2\pi\theta})\ldots}{(1+p . e^{-2\pi\theta})(1+p . e^{2\pi\theta})(1+p^3 . e^{-2\pi\theta})(1+p^3 . e^{2\pi\theta})\ldots}.$$

On pourra exprimer d'une manière analogue la fonction de seconde et troisième espèce.

5. Une des propriétés les plus fécondes de la fonction $\lambda\theta$ est la suivante:

[On a fait pour abréger: $\Delta\theta = \pm\sqrt{((1-\lambda^2\theta)(1-c^2\lambda^2\theta))}$]

"Si l'équation

$$(\lambda\theta)^{2n} + a_{n-1}(\lambda\theta)^{2n-2} + \ldots + a_1(\lambda\theta)^2 + a_0 = (b_0\lambda\theta + b_1(\lambda\theta)^3 + \ldots + b_{n-2}(\lambda\theta)^{2n-3})\Delta\theta$$

est satisfaite, en mettant pour θ, $2n$ quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{2n}$, telles, que $(\lambda\theta_1)^2$, $(\lambda\theta_2)^2, \ldots (\lambda\theta_{2n})^2$ soient différentes entre elles, on aura toujours:

$$\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \ldots \theta_{2n}) = 0,$$

$$-\lambda(\theta_{2n}) = +\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{2n-1}) = \frac{a_0}{\lambda\theta_1 . \lambda\theta_2 \ldots \lambda\theta_{2n-1}};$$

les coefficiens $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ pourront être quelconques, et il est facile de voir qu'on pourra les déterminer de sorte que $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{2n-1}$ sont donnés."

Voilà une autre propriété plus générale:

"Si l'on fait

$$p^2 - q^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = A(x-\lambda\theta_1)(x-\lambda\theta_2)\ldots(x-\lambda\theta_\mu),$$

où p et q sont des fonctions entières quelconques de la quantité *indéterminée* x, on pourra toujours supposer les quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\mu$ de la sorte que l'expression

$$\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_\mu)$$

soit égale à zéro ou à l'infini."

Ainsi p. ex., si

$$p^2 - q^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = A(x^2 - \lambda^2\theta)^\mu,$$

où l'une des fonctions p et q est paire et l'autre impaire; on aura

1) si p est pair:

$$\lambda(\mu\theta) = 0, \text{ si } \mu \text{ est pair et}$$
$$\lambda(\mu\theta) = \tfrac{1}{0}, \text{ si } \mu \text{ est impair;}$$

2) si p est impair:

$$\lambda(\mu\theta) = 0, \text{ si } \mu \text{ est impair et}$$
$$\lambda(\mu\theta) = \tfrac{1}{0}, \text{ si } \mu \text{ est pair.}$$

De là il suit encore que, si l'équation ci-dessus a lieu, on aura toujours:

$$\lambda\theta = \lambda\left(\frac{m\varpi + \frac{1}{2}n\omega i}{\mu}\right),$$

où m et n sont entiers et moindres que μ.

6. Il existe entre les quantités $\lambda\left(\frac{m\varpi + n\omega i}{2\mu+1}\right)$ et les racines $(2\mu+1)^{\text{mes}}$ de l'unité des relations bien remarquables, savoir si l'on fait pour abréger:

$$\delta = \cos\frac{2\pi}{2\mu+1} + \sqrt{-1} \,.\, \sin\frac{2\pi}{2\mu+1},$$

on aura, quels que soient les nombres entiers m et μ:

$$0=\lambda\left(\frac{2m\varpi+\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi+2\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{2k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi+3\omega i}{2\mu+1}\right)+\dots$$
$$\dots+\delta^{2\mu k}.\lambda\left(\frac{2m\varpi+2\mu\omega i}{2\mu+1}\right),$$
$$0=\lambda\left(\frac{\varpi+m\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{k'}.\lambda\left(\frac{2\varpi+m\omega i}{2\mu+1}\right)+\delta^{2k'}.\lambda\left(\frac{3\varpi+m\omega i}{2\mu+1}\right)+\dots$$
$$\dots+\delta^{2\mu k'}.\lambda\left(\frac{2\mu\varpi+m\omega i}{2\mu+1}\right).$$

D'ailleurs toutes les quantités $\lambda\left(\frac{m\varpi+n\omega i}{2\mu+1}\right)\dots$ sont les racines d'une même équation du degré $(2\mu+1)^2$ et dont les coefficiens sont des fonctions rationnelles de c^2.

7. Si la fonction

$$\int\frac{dx}{\Delta(x,c)},$$

dont le module c est réel et moindre que l'unité, peut être transformée dans une autre:

$$\varepsilon\int\frac{dy}{\Delta(x,c')},$$

dont le module c' est réel ou imaginaire, en mettant pour y une fonction algébrique quelconque de x, il faut nécessairement que le module c' soit déterminé par l'une des deux équations:

$$\sqrt[4]{c'}=\sqrt{2}.\sqrt[8]{q_1}.\frac{(1+q_1^2)(1+q_1^4)(1+q_1^6)\dots}{(1+q_1)(1+q_1^3)(1+q_1^5)\dots},$$
$$\sqrt[4]{c'}=\frac{1-q_1}{1+q_1}.\frac{1-q_1^3}{1+q_1^3}.\frac{1-q_1^5}{1+q_1^5}\dots$$

où $q_1=q^{\mu}$, μ étant rationnel; ou ce qui revient au même:

$$q_1=e^{\left(\mu\frac{\omega}{\varpi}+\mu' i\right)\pi},$$

μ et μ' étant des nombres rationnels quelconques.

8. La théorie de la transformation devient très facile à l'aide des propriétés les plus simples de la fonction $\lambda\theta$. Pour en donner un exemple, soit proposé le problème: satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$\frac{dy}{\Delta(y,c')}=\varepsilon.\frac{dx}{\Delta(x,c)},$$

en supposant c et c' moindres que l'unité et y fonction rationnelle, réelle ou imaginaire de x.

Soit $x=\lambda\theta$, $y=\lambda'\theta'$, en désignant par λ' la fonction qui répond au module c'. L'équation différentielle se changera dans ce cas en $d\theta'=\varepsilon d\theta$, d'où

$$\theta'=\varepsilon\theta+a,$$

a étant une constante. Cela posé, soit

$$y = \frac{\varphi x}{f x},$$

on aura

$$\lambda'(\varepsilon\theta + a) = \frac{\varphi(\lambda\theta)}{f(\lambda\theta)}.$$

En mettant $\theta + 2\varpi$, $\theta + \omega i$ au lieu de θ, $\lambda\theta$ ne change pas de valeur et par conséquent on doit avoir:

$$\lambda'(\varepsilon\theta + 2\varepsilon\varpi + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a),$$
$$\lambda'(\varepsilon\theta + \varepsilon\omega i + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a).$$

Donc, si l'on désigne par ϖ' et ω' les valeurs de ϖ et ω qui répondent au module c', on aura en vertu de (2):

$$2\varepsilon\varpi = 2m\varpi' + n\omega' i,$$
$$\varepsilon\omega i = 2m'\varpi' + n'\omega' i,$$

ce qui donne

$$\varepsilon = m \cdot \frac{\varpi'}{\varpi} + \frac{n}{2} \cdot \frac{\omega'}{\varpi} i = n' \frac{\omega'}{\omega} - 2m' \frac{\varpi'}{\omega} i,$$

donc:

$$m \frac{\varpi'}{\varpi} = n' \frac{\omega'}{\omega}, \quad \frac{n}{2} \cdot \frac{\omega'}{\varpi} = -2m' \frac{\varpi'}{\omega},$$

ou bien:

$$\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega} = -\frac{n}{4m'} \cdot \frac{\omega}{\varpi}.$$

Maintenant, si c est indéterminé, cette équation ne pourra subsister à moins qu'on n'ait ou $n = 0$, $m' = 0$, ou $n' = 0$, $m = 0$. Dans le premier cas ε est réel et

$$= m \frac{\varpi'}{\varpi} = n' \cdot \frac{\omega'}{\omega},$$

et dans le second cas ε est imaginaire et

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{\varpi'}{\varpi} i = -2m' \frac{\varpi'}{\omega} i.$$

Supposons ε réel. Alors on aura ce théorème:

"Si deux fonctions réelles peuvent être transformées l'une en l'autre il faut qu'on ait entre les fonctions complètes ϖ, ω, ϖ', ω' cette relation.

$$\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega},$$

où n' et m sont des nombres entiers."

On pourra démontrer que si cette condition est remplie, on pourra effectivement satisfaire à l'équation

$$\int \frac{dy}{\Delta(x, c')} = m \cdot \frac{\varpi'}{\varpi} \cdot \int \frac{dx}{\Delta(x, c)}.$$

Rien n'est plus simple que de trouver l'expression de y. Il suffit pour cela de chercher les racines des deux équations $\varphi x = 0$, $fx = 0$.

Désignons par $\lambda\delta$ et $\lambda\delta'$ une racine quelconque de ces deux équations, on aura, pour déterminer δ et δ', ces deux équations:

$$\lambda'(\varepsilon\delta + a) = 0, \quad \lambda'(\varepsilon\delta' + a) = \tfrac{1}{0},$$

ce qui donne:

$$\delta = -a + \frac{k}{\varepsilon}\varpi' + \frac{k'}{\varepsilon}\omega' i; \quad \delta' = -a + \frac{k}{\varepsilon}\varpi' + (k' + \tfrac{1}{2})\frac{\omega'}{\varepsilon} i,$$

c'est-à-dire:

$$\delta = -a + \frac{k}{m}\varpi + \frac{k'}{n'}\omega i; \quad \delta' = -a + \frac{k}{m}\varpi + (k' + \tfrac{1}{2})\frac{\omega}{n'} i,$$

k et k' étant des nombres entiers. Pour trouver a, il suffit de remarquer que $\lambda\theta$ ne change pas de valeur en mettant $\varpi - \theta$ au lieu de θ. On aura donc

$$\lambda'(\varepsilon\varpi - \varepsilon\theta + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a),$$

ce qui donne

$$a = \tfrac{1}{2}((2\mu + 1 - m)\varpi' + \mu'\omega' i)$$

Dans le cas où m est impair, on pourra toujours faire $a = 0$.

Connaissant les valeurs de δ et δ', on aura immédiatement les racines des deux équations $\varphi x = 0$, $fx = 0$, et par suite l'expression des fonctions φx et fx en factorielles Les formules les plus simples répondent aux cas de $m = 1$ ou $n' = 1$, et elles sont les seules dont il s'agit, comme il est aisé de voir par l'équation $\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega}$. On pourra aussi se servir des expressions de la fonction $\lambda\theta$ en produits infinis rapportées plus haut. J'ai fait voir cela dans les mémoires XIII et XIV.

9. Le cas où un des modules c peut être transformé en son complément $\sqrt{(1-c^2)} = b$, mérite une attention particulière. En vertu de l'équation $\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega}$, on aura dans ce cas

$$\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)} \text{ et } \frac{dy}{\Delta(y,b)} = \sqrt{(m.n)} \cdot \frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

Le module c sera déterminé par une équation algébrique qui parait être résoluble par les radicaux; au moins cela aura lieu effectivement si $\frac{m}{n}$ est un carré parfait. Dans tous les cas il est facile d'exprimer c par des produits infinis. En effet, si $\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}$, on a:

$$\sqrt[4]{c}=\sqrt{2}.e^{-\frac{1}{8}\pi\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}}.\frac{\left(1+e^{-2\pi\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}}\right)\left(1+e^{-4\pi\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}}\right)\ldots}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}}\right)\left(1+e^{-3\pi\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}}\right)\ldots}$$

$$=\frac{\left(1-e^{-\pi\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)}}\right)\left(1-e^{-3\pi\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)}}\right)\ldots}{\left(1+e^{-\pi\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)}}\right)\left(1+e^{-3\pi\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)}}\right)\ldots}.$$

Si deux modules c' et c peuvent être transformés l'un dans l'autre, ils auront entre eux une relation algébrique. Mais généralement il parait impossible d'en tirer la valeur de c' en c à l'aide de radicaux *), mais il est remarquable, que cela a toujours lieu si c peut être transformé en son complément. Par exemple si $c^2=\frac{1}{2}$.

Les équations modulaires jouissent d'ailleurs de la propriété remarquable, que toutes leurs racines peuvent être exprimées *rationnellement* par deux entre elles. De même on pourra exprimer toutes les racines par l'une d'elles à l'aide de radicaux.

10. On pourra développer la fonction $\lambda\theta$ de la manière suivante:

$$\lambda\theta=\frac{\theta+a\theta^3+a'\theta^5+\ldots}{1+b'\theta^4+b''\theta^6+\ldots},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des séries toujours convergentes. En faisant

$$\varphi\theta=\theta+a\theta^3+a'\theta^5+\ldots$$
$$f\theta=1+b'\theta^4+b''\theta^6+\ldots$$

ces deux fonctions auront la propriété exprimée par les deux équations:

$$\varphi(\theta'+\theta).\varphi(\theta'-\theta)=(\varphi\theta.f\theta')^2-(\varphi\theta'.f\theta)^2,$$
$$f(\theta'+\theta).f(\theta'-\theta)=(f\theta.f\theta')^2-c^2(\varphi\theta.\varphi\theta')^2,$$

---

*) Dans le cas par ex. où y est de la forme:

$$\sqrt{\frac{c^5}{c'}}.\frac{x(a^2-x^2)(a_1^2-x^2)}{(1-a^2x^2)(1-a_1^2x^2)}=y,$$

l'équation entre c' et c est du sixième degré. Or je suis parvenu à démontrer rigoureusement, que si une équation du sixième degré est résoluble à l'aide de *radicaux*, cette équation sera décomposable ou en deux autres du troisième degré, dont les coefficiens dépendent d'une équation du second degré, ou elle sera décomposable en trois équations du second degré, dont les coefficiens sont déterminés par une équation du troisième degré. L'équation entre c' et c ne parait guère être décomposable de cette sorte.

où θ' et θ sont deux variables indépendantes. Ainsi p. ex. si l'on fait $\theta'=\theta$, on a

$$f(2\theta)=(f\theta)^4-c^2(\varphi\theta)^4.$$

Ces fonctions jouissent de beaucoup de propriétés remarquables.

11. Les formules presentées dans ce qui précède ont lieu avec quelques restrictions, le module c étant quelconque, réel ou imaginaire.

Première partie.

Des fonctions elliptiques en général.

Chapitre I.

Propriétés générales des fonctions elliptiques.

Les fonctions elliptiques jouissent comme on sait de cette propriété remarquable, que la somme d'un nombre quelconque de ces fonctions peut être exprimée par une seule fonction de la même espèce, en y ajoutant une certaine expression *algébrique* et *logarithmique*. La découverte de cette propriété est dûe à *M. Legendre*. La démonstration que cet illustre géomètre en a donné, est fondée sur l'intégration algébrique de l'équation différentielle:

$$\frac{dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4)}}=\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}.$$

L'objet de ce chapitre sera de démontrer cette propriété des fonctions elliptiques, mais en s'appuyant sur des considérations différentes de celles de *Mr. Legendre*.

§. 1.

Démonstration d'un théorème fondamental.

Nous commencerons par établir un théorème général qui servira de fondement de tout ce qui va être exposé dans ce mémoire et qui en même temps exprime une propriété très remarquable des fonctions elliptiques.

Théorème I. Soient fx et φx deux fonctions quelconques *entières* de x, l'une paire, l'autre impaire, et dont les coefficiens soient supposés variables. Cela posé, si l'on décompose la fonction entière paire

$$(fx)^2-(\varphi x)^2(\Delta x)^2$$

en facteurs de la forme $x^2-x_1^2$, en sorte que

$$1)\quad (fx)^2-(\varphi x)^2(\Delta x)^2=A.(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3^2)\dots(x^2-x_\mu^2)$$

où A est indépendant de l'indéterminée x, je dis qu'on aura:

$$2)\quad \Pi x_1+\Pi x_2+\Pi x_3+\dots+\Pi x_\mu=C-\frac{a}{2\Delta a}.\log\left(\frac{fa+\varphi a.\Delta a}{fa-\varphi a.\Delta a}\right),$$

où a désigne le paramètre de la fonction Πx, en sorte que

3) $$\Pi x = \int \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x}.$$

La quantité C est la constante d'intégration.

Démonstration. Supposons d'abord que tous les coefficiens des diverses puissances de x dans fx et φx soient des quantités variables indépendantes. Dans ce cas toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ seront évidemment inégales entre elles et fonctions de ces variables. En désignant par x l'une quelconque entre elles, l'équation (1) donnera

4) $$(fx)^2 - (\varphi x)^2 . (\Delta x)^2 = 0,$$

et de là:

5) $$fx + \varphi x . \Delta x = 0.$$

Cela posé, faisons pour abréger

$$\psi x = (fx)^2 - (\varphi x)^2 (\Delta x)^2,$$

et désignons par $\psi' x$ la dérivée de cette fonction par rapport à x seul. De même désignons par la caractéristique δ la différentiation qui se rapporte aux seules variables indépendantes. Puis en différentiant, on tire de l'équation (4):

$$\psi' x . dx + 2fx . \delta fx - 2\varphi x . \delta\varphi x . (\Delta x)^2 = 0;$$

mais en vertu de (5) on a:

$$fx = -\varphi x . \Delta x,$$
$$\varphi x (\Delta x)^2 = -fx . \Delta x,$$

donc en substituant:

$$\psi' x . dx - 2\Delta x(\varphi x . \delta fx - fx . \delta\varphi x) = 0.$$

De là, en divisant par $\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) . \Delta x$, on tire:

$$\frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x} = \frac{2(\varphi x . \delta fx - fx . \delta\varphi x)}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) . \psi' x},$$

et en intégrant:

$$\Pi x = \int \frac{2(\varphi x . \delta fx - fx . \delta\varphi x)}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) . \psi' x}.$$

Maintenant en faisant $x = x_1, x_2, \ldots x_\mu$, ajoutant les résultats et faisant pour abréger:

$$2(\varphi x . \delta fx - fx . \delta\varphi x) = \theta x,$$

on obtiendra:

$$6) \qquad \Pi x_1 + \Pi x_2 + \ldots + \Pi x_\mu$$

$$= \int \left(\frac{\theta x_1}{\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right) \psi' x_1} + \frac{\theta x_2}{\left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right) \psi' x_2} + \ldots + \frac{\theta x_\mu}{\left(1 - \frac{x_\mu^2}{a^2}\right) \psi' x_\mu} \right).$$

Mais θx étant une fonction entière de x^2 dont le degré est évidemment inférieur à celui de la fonction ψx, le second membre, suivant un théorème connu sur la décomposition des fonctions fractionnaires, se réduira à

$$\int \frac{a\theta a}{2\psi a},$$

c'est-à-dire en substituant la valeur de θa et celle de ψa, à:

$$a \int \frac{\varphi a . \delta fa - fa . \delta \varphi a}{(fa)^2 - (\varphi a)^2 (\Delta a)^2}.$$

Cette intégrale se trouvera facilement; en effet Δa étant constant, on aura en intégrant d'après les règles connues:

$$C - \frac{a}{2\Delta a} \log \left(\frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a} \right),$$

où C est la constante d'intégration. Cette fonction étant mise à la place du second membre de l'équation (6) donnera précisément la formule (2) qu'il s'agissait de démontrer.

La propriété de la fonction $\Pi(x)$, exprimée par la formule (2), est d'autant plus remarquable, quelle aura lieu en supposant la fonction Δx racine carrée d'une fonction quelconque entière et paire de x. En effet la démonstration précédente est fondée sur cette seule propriété de la fonction Δx. Donc on a de cette sorte une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes *).

La formule (2) étant démontrée pour le cas, où les quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ sont inégales entre elles, il est évident qu'elle aura lieu encore en attribuant aux variables indépendantes des relations quelconques qui pourront aussi rendre plusieurs des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ égales entre elles.

Il y a à observer, que les signes des radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_\mu$ ne sont pas arbitraires. Ils doivent être pris tels qu'ils satisfassent aux équations

$$7) \quad fx_1 + \varphi x_1 . \Delta x_1 = 0, \; fx_2 + \varphi x_2 . \Delta x_2 = 0, \ldots fx_\mu + \varphi x_\mu . \Delta x_\mu = 0,$$

qu'on tire de l'équation (5), en mettant pour x les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_\mu$.

*) Voyez les mémoires XV et XX.

La formule (2) exprime une propriété de la fonction de la troisième espèce. $\Pi(x)$. Or rien n'est plus facile que d'en déduire des propriétés semblables des fonctions:

$$8) \qquad \varpi x = \int \frac{dx}{\Delta x} \text{ et } \varpi_0 x = \int \frac{x^2 dx}{\Delta x}.$$

D'abord si l'on fait a infini, on a $\Pi x = \varpi x$; mais il est clair, que la partie logarithmique de la formule (2) s'évanouira dans ce cas; le second membre se réduira donc à une constante, et par conséquent on aura:

$$9) \qquad \varpi x_1 + \varpi x_2 + \ldots + \varpi x_\mu = C.$$

Egalement si l'on développe les deux membres de l'équation (2) suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$, on aura, en comparant les coefficiens de $\frac{1}{a^2}$ dans les deux membres:

$$10) \qquad \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \ldots + \varpi_0 x_\mu = C - p,$$

où p est une fonction *algébrique* des variables, savoir le coefficient de $\frac{1}{a^2}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{a}{2\Delta a} \log.\left(\frac{fa + \varphi a.\Delta a}{fa - \varphi a.\Delta a}\right)$$

suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$.

En vertu des formules (2. 9. 10) il est clair, qu'en désignant par ψx une fonction quelconque de la forme:

$$11) \begin{cases} \psi x = \int \left\{ A + B.x^2 + \dfrac{\alpha}{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \dfrac{\alpha_1}{1 - \frac{x^2}{a_1^2}} + \ldots + \dfrac{\alpha_\nu}{1 - \frac{x^2}{a_\nu^2}} \right\} . \dfrac{dx}{\Delta x} \\ \text{on aura:} \\ \psi x_1 + \psi x_2 + \ldots + \psi x_\mu = C - B.p - \dfrac{\alpha.a}{2\Delta a} \log\left(\dfrac{fa + \varphi a \Delta a}{fa - \varphi a \Delta a}\right) \\ \quad - \dfrac{\alpha_1 a_1}{2\Delta a_1} \log\left(\dfrac{fa_1 + \varphi a_1 \Delta a_1}{fa_1 - \varphi a_1 \Delta a_1}\right) \ldots - \dfrac{\alpha_\nu . a_\nu}{2\Delta a_\nu} \log\left(\dfrac{fa_\nu + \varphi a_\nu \Delta a_\nu}{fa_\nu - \varphi a_\nu \Delta a_\nu}\right). \end{cases}$$

On voit que cette équation a lieu quelle que soit la constante A.

§. 2.

Propriété fondamentale des fonctions elliptiques, tirée des formules précédentes.

Dans ce qui précède les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ sont regardées comme fonctions des coefficiens variables dans fx et φx. Supposons maintenant qu'on détermine ces coefficiens de manière qu'un certain nombre des quantités x_1, $x_2, \ldots x_\mu$ prend des valeurs données mais variables.

Soient $$x_1,\ x_2, \ldots x_m$$
des variables indépendantes. Alors les coefficiens dans fx, φx deviendront des fonctions de ces quantités. En les substituant dans l'équation
$$(fx)^2-(\varphi x)^2(\Delta x)^2=0,$$
le premier membre sera divisible par le produit
$$(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\ldots x^2-x^2_m),$$
et le quotient, égalé à zéro, donnera une équation du degré $\mu-m$ par rapport à x^2, dont les racines seront les $\mu-m$ quantités:
$$x^2_{m+1},\ x^2_{m+2}, \ldots x_\mu^2,$$
qui par suite sont des fonctions algébriques de x_1, $x_2, \ldots x_m$.

Le cas le plus simple et le plus important est celui, où le nombre $\mu-m$ a la moindre valeur possible. Pour avoir ce minimum, il faut donner aux fonctions fx et φx la forme la plus générale pour laquelle le degré de l'équation $(fx)^2-(\varphi x)^2(\Delta x)^2=0$ est égal à μ.

Il est facile de voir que le plus grand nombre de coefficiens possible à introduire dans fx et φx, est μ. Mais, puisqu'en vertu de la forme des équations (7) on peut supposer un de ces coefficiens égal à l'unité, sans diminuer la généralité, on n'aura réellement qu'un nombre de $\mu-1$ indéterminées. On pourra donc faire $m=\mu-1$, en sorte que toutes les quantités x_1, $x_2, \ldots x_\mu$, excepté une seule, seront des variables indépendantes. Par là on aura immédiatement la propriété fondamentale des fonctions elliptiques dont il a été question au commencement du chapitre.

Il y a deux cas différents à considérer, savoir μ pair ou impair.

Cas I. *μ étant pair et* $=2n$.

A. Si la fonction fx est paire et φx impaire, il est clair que fx doit être du degré $2n$, et φx du degré $2n-3$. Faisons donc:

$$12)\quad \begin{cases} fx=a_0+a_1x^2+a_2x^4+\ldots+a_{n-1}x^{2n-2}+x^{2n}, \\ \varphi x=(b_0+b_1x^2+b_2x^4+\ldots+b_{n-2}x^{2n-4})x \end{cases}$$

et

$$13)\quad (fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2)=(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\ldots(x^2-x^2_{2n-1}(x^2-y^2),$$

où nous avons mis y au lieu de x_{2n}, qui sera une fonction des variables x_1, $x_2, \ldots x_{2n-1}$.

Les coefficiens a_0, a_1, $a_2, \ldots a_{n-1}$, b_0, $b_1, \ldots b_{n-2}$ seront exprimés en fonctions de x_1, $x_2, \ldots$ à l'aide des $\mu-1$ équations (7), savoir:

$$13')\quad fx_1+\varphi x_1.\Delta x_1=0,\ fx_2+\varphi x_2.\Delta x_2=0, \ldots fx_{2n-1}+\varphi x_{2n-1}.\Delta x_{2n-1}=0.$$

Ces équations, étant linéaires par rapport aux inconnues, donneront celles-ci en fonctions *rationnelles* des quantités:

$$x_1,\ x_2, \dots x_{2n-1},\ \Delta x_1,\ \Delta x_2, \dots \Delta x_{2n-1}.$$

Il est clair qu'on pourra donner aux radicaux Δx_1, $\Delta x_2, \dots \Delta x_{2n-1}$ des signes arbitraires.

Pour avoir la valeur de y, faisons dans l'équation (13) $x=0$. Cela donne

$$a_0^2 = x_1^2 x_2^2 \dots x_{2n-1}^2 . y^2,$$

d'où l'on tire:

$$14)\qquad y = -\frac{a_0}{x_1 . x_2 \dots x_{2n-1}}.$$

La quantité y est donc une fonction rationnelle des variables x_1, $x_2, \dots$ et des radicaux correspondants.

Si maintenant y a cette valeur et qu'on fait

$$\Delta x_{2n} = -\Delta y,$$

les formules (2. 9. 10) donneront:

$$15)\quad \begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 + \dots + \varpi x_{2n-1} = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \dots + \varpi_0 x_{2n-1} = \varpi_0 y - b_{n-2} + C, \\ \Pi x_1 + \Pi x_2 + \dots + \Pi x_{2n-1} = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a} \log\left(\frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a}\right) + C. \end{cases}$$

Quant aux fonctions ϖy, $\varpi_0 y$, Πy, il faut bien observer que le signe du radical Δy n'est pas toujours le même. Il sera dans tous les cas déterminé par la dernière des équations (7) qui, en mettant pour x_{2n} et Δx_{2n} leurs valeurs y et $-\Delta y$, deviendra:

$$fy - \varphi y . \Delta y = 0.$$

On en tire

$$16)\qquad \Delta y = \frac{fy}{\varphi y},$$

et cela fait voir que le radical Δy, comme y, est une fonction *rationnelle* des quantités x_1, $x_2, \dots \Delta x_1$, $\Delta x_2 \dots$

La fonction y a la propriété d'être zéro en même temps que les variables x_1, $x_2, \dots x_{2n-1}$. En effet si l'on fait

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{2n-1} = 0$$

l'équation (13) ne pourra subsister à moins que tous les coefficiens a_0, $a_1, \dots a_{n-1}$ b_0, $b_1, \dots b_{n-2}$ ne soient égaux à zéro, donc cette équation se réduit à:

$$x^{4n} = x^{4n-2}(x^2 - y^2),$$

donc on aura $y=0$.

On pourrait donner le signe contraire au second membre de l'équation (14). Celui que nous avons choisi est tel que le radical Δy se réduit à $+1$, en supposant $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots x_{2n-1} = 0$, et en même temps $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots \Delta x_{2n-1} = +1$. Pour démontrer cela, supposons $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ infiniment petits, on aura dans ce cas:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots \Delta x_{2n-1} = 1,$$

et les équations (13') font voir que $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ satisfont à l'équation:

$$17)\quad x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} + b_{n-2}x^{2n-3} + \ldots + b_0 x + a_0 = 0.$$

Cette équation étant du degré $2n$, doit avoir encore une racine. En la désignant par z, on aura:

$$a_0 = z . x_1 . x_2 \ldots x_{2n-1},$$

donc en vertu de l'équation (14)):

$$z = -y$$

L'équation est donc satisfaite en faisant $x = -y$. Or cela donne

$$y^{2n} + a_{n-1}y^{2n-2} + \ldots + a_1 y^2 + a_0 = (b_0 + b_1 y^2 + \ldots + b_{n-2}y^{2n-4})y,$$

donc en vertu de (16):

$$18)\qquad \Delta y = +1.$$

On pourra encore remarquer que y se réduit pour des valeurs infiniment petites de $x_1, x_2, \ldots x_{2n-1}$ à $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n-1}$. Cela fait voir l'équation (17), qui, n'ayant pas de second terme, donnera la somme des racines égale à zéro, c'est-à-dire:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n-1} - y = 0,$$

donc:

$$19)\qquad y = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n-1}.$$

B. Si fx est impair et φx pair, fx doit être du degré $2n-1$ et φx du degré $2n-2$. Donc on aura dans ce cas un nombre de $2n-1$ coefficiens indéterminés, et on parviendra à des formules semblables aux (15); mais la fonction y aura une valeur différente. On démontrera aisément quelle sera égale à $\frac{1}{cy}$ la valeur de y étant déterminée par l'équation (14).

Cas II. *Si μ est un nombre impair et $= 2n+1$.*

A. Si fx est impair et φx pair, on aura:

$$20)\quad \begin{aligned} fx &= (a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_{n-1}x^{2n-2} + x^{2n})x, \\ \varphi x &= b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots + b_{n-1}x^{2n-2}, \end{aligned}$$

$$21)\quad (fx)^2 - (\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ldots(x^2 - x_{2n}^2)(x^2 - y^2).$$

Les coefficiens $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ sont déterminés par les $2n$ équations linéaires:

$$22)\ fx_1 + \varphi x_1 . \Delta x_1 = 0,\ fx_2 + \varphi x_2 . \Delta x_2 = 0, \ldots fx_{2n} + \varphi x_{2n} . \Delta x_{2n} = 0.$$

La fonction y le sera par l'équation:

$$23) \qquad y = \frac{b_0}{x_1 . x_2 \ldots x_{2n}},$$

qu'on obtiendra, en faisant dans (21) $x = 0$.

Enfin de radical Δy est déterminé par

$$24) \qquad \Delta y = \frac{fy}{\varphi y}.$$

Cela posé on aura:

$$25) \begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 + \ldots + \varpi x_{2n} = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \ldots + \varpi_0 x_{2n} = \varpi_0 y - b_{n-1} + C, \\ \Pi x_1 + \Pi x_2 + \ldots + \Pi x_{2n} = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a} \log\left(\frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a}\right) + C. \end{cases}$$

Les fonctions y et Δy sont, comme dans le cas précédent, des fonctions rationnelles des variables $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$ et des radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_{2n}$, et on démontrera de la même manière, qu'on aura pour des valeurs infiniment petites de $x_1, \ldots x_{2n}$,

$$26) \qquad y = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n},\ \Delta y = +1;$$

si l'on suppose en même temps que les radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_{2n}$ se réduisent à $+1$, y s'évanouira simultanément avec les variables.

Les formules (25) pourront d'ailleurs être déduites sur le champ de celles du premier cas, en y faisant $x_{2n-1} = 0$, et changeant ensuite n en $n+1$.

B. Si fx est pair et φx impair, on parviendra à des formules semblables. La valeur qui en résultera pour la fonction y, sera égale à $\frac{1}{cy}$, où y est déterminé par la formule (23).

On voit donc par les formules (15. 25), qu'on pourra toujours exprimer la somme d'un nombre donné de fonctions par une seule fonction de la même espèce, en y ajoutant, pour les fonctions de la première espèce, une *constante*, pour celles de la seconde espèce une certaine fonction *algébrique*, et pour celles de la troisième espèce une fonction *logarithmique*.

En faisant attention qu'une intégrale quelconque de la forme

$$\int \frac{\theta x . dx}{\Delta x},$$

peut être réduite aux fonctions ϖx et $\varpi_0 x$ et à un certain nombre de fonctions de la troisième espèce, en y ajoutant une expression algébrique et logarithmique, il est clair qu'en faisant

$$\psi x = \int \frac{\theta x . dx}{\Delta x},$$

on aura

$$27) \qquad \psi x_1 + \psi x_2 + \psi x_3 \ldots = \psi y + v + C,$$

où v est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques.

En vertu des formules (15. 25) il est clair que la fonction v ne change pas de valeur, si l'on ajoute à la fonction rationnelle θx une quantité constante quelconque, de sorte qu'on peut supposer également

$$\psi x = \int (A + \theta x) . \frac{dx}{\Delta x}.$$

Je dis maintenant que la fonction ψ est la seule qui puisse satisfaire à l'équation (27). En effet si l'on différentie cette équation par rapport à l'une des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots$, par exemple à x_1, on aura:

$$\psi' x_1 . dx_1 = \psi' y . \left(\frac{dy}{dx_1}\right) . dx_1 + \left(\frac{dv}{dx_1}\right) . dx_1 .$$

Cela posé, si l'on suppose toutes les quantités $x_2, x_3, \ldots y$ égales à des constantes déterminées, on aura, en mettant x pour x_1, et faisant

$$\psi' y = A, \frac{dv}{dx_1} = p, \frac{dy}{dx_1} = q:$$

$$\psi' x . dx = A . q dx + p dx,$$

d'où l'on tire:

$$\psi x = \int (Aq + p) dx.$$

La fonction ψx ne pourra donc renfermer qu'une seule constante indéterminée A, et par conséquent:

$$\psi x = \int (A + \theta x) \frac{dx}{\Delta x}$$

est son expression générale.

Les propriétés exprimées par les formules de ce paragraphe appartiennent donc exclusivement aux fonctions elliptiques C'est pourquoi je les ai nommées *fondamentales*.

Dans les formules que nous avons données, y a une valeur unique, mais on pourra satisfaire aux mêmes formules, en mettant au lieu de y une expression algébrique contenant une constante arbitraire. En effet, pour avoir une telle expression, il suffit de supposer une des varibles $x_1, x_2, x_3, \ldots$ égale à une constante arbitraire, et la valeur de y qu'on obtiendra par là, sera la plus

générale possible, comme on sait par la théorie de l'intégration des équations différentielles du premier ordre, dont l'intégrale complète ne contient qu'une seule constante arbitraire.

A l'aide des formules (15. 25) on pourra exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions par une seule fonction. Il est facile d'en tirer les formules suivantes:

$$28)\begin{cases}\frac{\mu_1}{\mu}\varpi x_1+\frac{\mu_2}{\mu}\varpi x_2+\dots+\frac{\mu_n}{\mu}\varpi x_n=C+\varpi y,\\ \frac{\mu_1}{\mu}\varpi_0 x_1+\frac{\mu_2}{\mu}\varpi_0 x_2+\dots+\frac{\mu_n}{\mu}\varpi_0 x_n=\varpi_0 y-p+C,\\ \frac{\mu_1}{\mu}\Pi x_1+\frac{\mu_2}{\mu}\Pi x_2+\dots+\frac{\mu_n}{\mu}\Pi x_n=\Pi y-\frac{a}{2\Delta a}\log\left(\frac{fa+\varphi a\Delta a}{fa-\varphi a\Delta a}\right)+C,\end{cases}$$

où $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n, \mu$ désignent des nombres entiers quelconques, et y est une fonction *algébrique* des variables $x_1, x_2, \dots x_n$, de même que les coefficiens dans fa et φa. Pour avoir ces formules, il suffit de supposer dans (13) et (21) un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \dots y$ égales entre elles.

Pour déterminer y, fx, φx, on aura cette équation:

$$29)\qquad (fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2)$$
$$=(x^2-x_1^2)^{\mu_1}(x^2-x_2^2)^{\mu_2}\dots(x^2-x_n^2)^{\mu_n}(x^2-y^2)^{\mu},$$

qui doit avoir lieu pour une valeur quelconque de x.

§. 3.

Application au cas, où deux fonctions sont données.

Pour réduire deux fonctions à une seule, il suffit de supposer dans les formules (25):

$$n=1.$$

Cela donne

$$fx=a_0x+x^3,\quad \varphi x=b_0,$$

et pour déterminer les deux constantes a_0 et b_0, on aura les deux équations:

$$a_0x_1+x_1^3+b_0\Delta x_1=0,\quad a_0x_2+x_2^3+b_0\Delta x_2=0.$$

qui donnent:

$$a_0=\frac{x_2^3\Delta x_1-x_1^3\Delta x_2}{x_1\Delta x_2-x_2\Delta x_1},\qquad b_0=\frac{x_2x_1^3-x_1x_2^3}{x_1\Delta x_2-x_2\Delta x_1}.$$

Connaisant b_0, on aura la valeur de y par la formule (23), savoir pour $n=1$:

$$y=\frac{b_0}{x_1x_2},$$

donc:

$$30)\qquad y=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1\Delta x_2-x_2\Delta x_1},$$

ou bien en multipliant en haut et en bas par $x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1$:

31) $$y = \frac{x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1}{1 - c^2x_1^2x_2^2}.$$

Si l'on exprime a_0 et b_0 en x_1, x_2, y, on aura ces expressions très simples:

32) $$b_0 = x_1 \cdot x_2 \cdot y,\ a_0 = \tfrac{1}{2}(c^2x_1^2x_2^2y^2 - x_1^2 - x_2^2 - y^2).$$

L'expression de a_0 se tire de l'équation

$$(a_0x + x^3)^2 - b_0^2(1 - x^2)(1 - c^2x^2) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - y^2),$$

en égalant entre eux les coefficiens de x^4 dans les deux membres.

Les fonctions a_0 et y étant déterminées comme on vient de voir, les formules (25) donneront, en faisant $n = 1$:

33) $$\begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 = \varpi_0 y - x_1x_2y + C, \\ \Pi x_1 + \Pi x_2 = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a}\log\left(\frac{a_0a + a^3 + x_1x_2 \cdot y\Delta a}{a_0a + a^3 - x_1x_2 \cdot y\Delta a}\right) + C. \end{cases}$$

Quant à la valeur du radical Δy, elle est donnée par l'équation (24):

$$\Delta y = \frac{fy}{\varphi y} = \frac{a_0y + y^3}{b_0},$$

c'est-à-dire:

34) $$\Delta y = \frac{a_0 + y^2}{x_1x_2}.$$

Pour réduire la différence de deux fonctions à une seule, il suffit de changer le signe de x_2 dans les formules précédentes. La valeur de y deviendra par là:

35) $$y = \frac{x_1\Delta x_2 - x_2\Delta x_1}{1 - c^2x_1^2x_2^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1\Delta x_2 + x_2\Delta x_1}.$$

Si dans les formules (33) on fait x_2 égal à une constante arbitraire, on aura la condition qui doit avoir lieu entre les variables de deux fonctions si elles doivent être réductibles l'une à l'autre. En faisant $x_2 = e$, $x_1 = x$, on aura:

36) $$y = \frac{x\Delta e + e\Delta x}{1 - c^2e^2x^2} \text{ et } \varpi x = \varpi y + C.$$

En différentiant, il viendra

37) $$\frac{dy}{\Delta y} = \frac{dx}{\Delta x}.$$

L'intégrale complète de cette équation est donc exprimée par l'équation algébrique (36), e étant la constante arbitraire. Parmi les intégrales particulières il y a à remarquer les suivantes:

1) $y = x$, qui répond à $e = 0$, $\Delta y = \Delta x$,

2) $y = \pm\frac{1}{cx}$, qui répond à $e = \frac{1}{0}$, $\Delta y = \mp\frac{\Delta x}{cx^2}$,

3) $y=\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-c^2x^2}\right)}$, qui répond à $e=1$, $\Delta y=\frac{(c^2-1)x}{1-c^2x^2}$ et

4) $y=\frac{1}{c}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}\right)}$, qui répond à $e=\frac{1}{c}$; $\Delta y=\frac{(1-c^2)x}{(1-x^2)c}$.

§ 4.

Application au cas, où toutes les fonctions données sont égales.

Si l'on fait dans les formules (15. 25).

$$x_1=x_2=x_3=\ldots=x,\ \Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=\ldots=\Delta x,$$

on aura celles-ci:

$$38)\quad\begin{cases}\mu\varpi x=\varpi y+C,\\ \mu\varpi_0 x=\varpi_0 y-p+C,\\ \mu\Pi x=\Pi y-\frac{a}{2\Delta a}\log\left(\frac{fa+\varphi a.\Delta a}{fa-\varphi a.\Delta a}\right)+C,\end{cases}$$

où

$$39)\quad (fz)^2-(\varphi z)^2(1-z^2)(1-c^2z^2)=(z^2-x^2)^\mu(z^2-y^2),$$

z étant l'indéterminée.

La fonction y est déterminée par les équations (14. 23):

$$40)\qquad y=-\frac{a_0}{x^\mu},\quad y=\frac{b_0}{x^\mu}.$$

La première a lieu si $\mu=2n-1$, la seconde si $\mu=2n$. Les équations (13. 22) qui doivent déterminer les coefficiens $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$ se réduiront dans le cas que nous considérons à une seule, savoir

$$fx+\varphi x.\Delta x=0,$$

mais en vertu des principes du calcul différentiel, cette équation doit avoir encore lieu, en la différentiant par rapport à x seule un nombre quelconque de fois moindre que μ. On aura donc en totalité μ équations linéaires entre les μ inconnus, d'où l'on tire leurs valeurs en fonctions rationnelles de la variable x et du radical Δx. Connaisant $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$, on aura la valeur de Δy à l'aide de l'équation:

$$\Delta y=\frac{fy}{\varphi y}.$$

On pourrait déterminer de cette sorte toutes les quantités nécessaires, mais pour mieux approfondir les propriétés de la fonction y, nous allons entamer le problème d'une autre manière, qui conduira successivement aux valeurs de y, correspondentes aux valeurs 1, 2, 3 etc. de μ.

Désignons par x_μ la valeur de y qui répond à μ. On aura

$$\varpi x_\mu=C+\mu\varpi x,$$

donc:
$$\varpi(x_{\mu+m}) = C + \varpi x_\mu + \varpi x_m.$$
mais si l'on fait
$$y = \frac{x_m \Delta x_\mu + x_\mu \Delta x_m}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2},$$
on aura, en vertu de (25):
$$\varpi x_m + \varpi x_\mu = \varpi y,$$
donc:

41) $$\varpi x_{\mu+m} = C + \varpi y.$$

La valeur la plus générale de $x_{\mu+m}$, qui satisfera à cette équation est:

41') $$x_{\mu+m} = \frac{y \Delta e + e \Delta y}{1 - c^2 e^2 y^2},$$

où e est une constante. Pour la déterminer, soit x infiniment petit; on aura
$$x_m = mx,\ x_\mu = \mu x,\ x_{\mu+m} = (m+\mu)x,\ \Delta x_m = \Delta x_\mu = 1;$$
donc:
$$y = (m+\mu)x,\ \Delta y = 1$$
L'équation (41') donnera:
$$(m+\mu)x = (m+\mu)x.\Delta e + e,$$
donc $e = 0$, $\Delta e = 1$ et par suite $x_{m+\mu} = y$, c'est-à-dire:

42) $$x_{\mu+m} = \frac{x_\mu \Delta x_m + x_m \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2}.$$

On aura de la même manière:

43) $$x_{\mu-m} = \frac{x_\mu \Delta x_m - x_m \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2}.$$

La première de ces formules servira à trouver $x_{\mu+m}$, lorsqu'on connait x_m et x_μ; on pourra donc former successivement les fonctions
$$x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, \ldots,$$
en remarquant que $x_1 = x$, $\Delta x_1 = \Delta x$.

Si $m = 1$, on trouvera:

44) $$x_{\mu+1} = -x_{\mu-1} + \frac{2 x_\mu \Delta x}{1 - c^2 x^2 x_\mu^2}.$$

En remarquant que
$$x_0 = 0,\ x_1 = x,$$
cette formule fait voir que x_μ est une fonction rationnelle de x, si μ est un nombre impair, et que x_μ est de la forme $p.\Delta x$, où p est rationnel, si μ est un nombre pair. Dans le premier cas $\frac{\Delta x_\mu}{\Delta x}$ est rationnel, et Δx_μ l'est dans le second. On voit également que x_μ s'évanouira en même temps que Δx, si μ est un nombre pair. Les quantités

$$x_{2\mu+1}, \frac{\Delta x_{2\mu+1}}{\Delta x}, \quad \frac{x_{2\mu}}{\Delta x}, \quad \Delta x_{2\mu}$$

sont donc des fonctions rationnelles de x.

Si l'on multiplie entré elles les deux formules (42, 43) il viendra:

44') $$x_{\mu+m} \cdot x_{\mu-m} = \frac{x_\mu^2 - x_m^2}{1 - c^2 x_\mu^2 x_m^2},$$

équation qui parait exprimer la plus simple relation qui puisse être établie entre les fonctions x_μ.

En y faisant $m = \mu - 1$, on aura:

45) $$x_{2\mu-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x_\mu^2 - x_{\mu-1}^2}{1 - c^2 x_\mu^2 x_{\mu-1}^2}.$$

De même si l'on fait $m = \mu$, on aura:

46) $$x_{2\mu} = \frac{2x_\mu \cdot \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_\mu^4}.$$

Ces deux formules semblent être les plus commodes pour le calcul des fonctions x_2, x_3, x_4, ...

Pour trouver les expressions les plus simples de x_μ, supposons:

47) $$x_\mu = \frac{p_\mu}{q_\mu}, \quad \Delta x_\mu = \frac{r_\mu}{q_\mu^2},$$

où p_μ^2, q_μ sont des fonctions entières de x, n'ayant pas de diviseur commun. En mettant ces valeurs dans l'équation (46), on aura:

$$\frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}} = \frac{2p_\mu q_\mu \cdot r_\mu}{q_\mu^4 - c^2 p_\mu^4}.$$

Or il est évident que la fraction du second membre est réduite à sa plus simple expression; donc on aura séparement:

48) $$p_{2\mu} = 2p_\mu q_\mu r_\mu, \quad q_{2\mu} = q_\mu^4 - c^2 p_\mu^4.$$

En faisant les mêmes substitutions dans l'équation (45), on obtiendra

49) $$\frac{x \cdot p_{2\mu-1}}{q_{2\mu-1}} = \frac{p_\mu^2 \cdot q_{\mu-1}^2 - q_\mu^2 \cdot p_{\mu-1}^2}{q_\mu^2 \cdot q_{\mu-1}^2 - c^2 p_\mu^2 \cdot p_{\mu-1}^2}.$$

Or je dis que la fraction du second membre est réduite à sa plus simple expression. En effet si l'on avait pour une même valeur de x:

$$p_\mu^2 q_{\mu-1}^2 - q_\mu^2 p_{\mu-1}^2 = 0, \; q_\mu^2 q_{\mu-1}^2 - c^2 p_\mu^2 \cdot p_{\mu-1}^2 = 0,$$

on aurait encore:

$$x_\mu^2 = x_{\mu-1}^2, \quad 1 - c^2 x_\mu^2 \cdot x_{\mu-1}^2 = 0.$$

Mais on a en général

$$x_{2\mu-1} = \frac{x_\mu \cdot \Delta x_{\mu-1} + x_{\mu-1} \cdot \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_\mu^2 \cdot x_{\mu-1}^2} = \frac{x_\mu^2 - x_{\mu-1}^2}{x_\mu \Delta x_{\mu-1} - x_{\mu-1} \Delta x_\mu},$$

donc aussi:

$$x_\mu \Delta x_{\mu-1} = x_{\mu-1} \Delta x_\mu = 0,$$

ou bien:

$$x_\mu^2 (1 - x_{\mu-1}^2)(1 - c^2 x_{\mu-1}^2) = 0 = x_{\mu-1}^2 (1 - x_\mu^2)(1 - c^2 x_\mu^2),$$

ce qui est impossible, car on doit avoir:

$$x_\mu^2 = \pm \frac{1}{c}.$$

Cela posé, l'équation (49) donnera:

$$50) \quad p_{2\mu-1} = \frac{1}{x} \cdot (p_\mu^2 \cdot q_{\mu-1}^2 - q_\mu^2 \cdot p_{\mu-1}^2), \; q_{2\mu-1} = q_\mu^2 q_{\mu-1}^2 - c^2 p_\mu^2 \cdot p_{\mu-1}^2.$$

Si donc on détermine successivement les fonctions

$$p_2, \; q_2, \; p_3, \; q_3, \; p_4, \; q_4, \ldots$$

par les équations (48. 50), $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ sera toujours réduit à sa plus simple expression.

On pourra faire $p_1 = x$, $q_1 = 1$. D'après la forme des expressions (48. 50), il est clair que

1) $p_{2\mu-1}$ est une fonction entière et impaire de x du degré $(2\mu - 1)^2$,

2) $p_{2\mu} = p' . \Delta x$, où p' est une fonction entière et impaire du degré $(2\mu)^2 - 3$,

3) q_μ est une fonction entière et paire du degré $\mu^2 - 1$ ou μ^2, selon que μ est impair ou pair.

Les fonctions $x_{2\mu-1}$ et $x_{2\mu}$ auront donc la forme suivante:

$$51) \quad x_{2\mu-1} = \frac{x \cdot (A_0 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + \ldots + A_{(2\mu-1)^2-1} \cdot x^{(2\mu-1)^2-1})}{1 + A^1_2 \cdot x^2 + A^1_4 \cdot x^4 + \ldots + A^1_{(2\mu-1)^2-1} \cdot x^{(2\mu-1)^2-1}},$$

$$52) \quad x_{2\mu} = \frac{x \cdot \Delta x \cdot (B_0 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + \ldots + B_{4\mu^2-4} \cdot x^{(2\mu)^2-4})}{1 + B^1_2 \cdot x^2 + B^1_4 \cdot x^4 + \ldots + B^1_{4\mu^2} \cdot x^{(2\mu)^2}}.$$

On aura par exemple:

$$53) \quad x_2 = \frac{2x\Delta x}{1 - c^2 x^4}, \; x_3 = x \cdot \frac{3 - 4(1 + c^2)x^2 + 6c^2 x^4 - c^4 x^8}{1 - 6c^2 x^4 + 4c^2 (1 + c^2) x^6 - 3c^4 x^8}.$$

Il est facile de voir que les coefficiens A_0, $A_2, \ldots A^1_2$, $A^1_4, \ldots B_0$, B_2, $\ldots B^1_2$, $B^1_4, \ldots$ seront des fonctions entières de c^2. On a toujours

$$A_0 = 2\mu - 1, \; B_0 = 2\mu \text{ et } A^1_2 = B^1_2 = 0.$$

La fonction $x_{2\mu}$ est, comme on voit, irrationnelle; or on peut facilement trouver une fonction rationnelle y qui satisfasse à l'équation

$$\frac{dy}{\Delta y} = 2\mu \cdot \frac{dx}{\Delta x}.$$

Une fonction de cette sorte est la suivante:

$$54)\qquad y=\sqrt{\left(\frac{1-x_{2\mu}^2}{1-c^2x_{2\mu}^2}\right)}=\frac{\Delta x_{2\mu}}{1-c^2x_{2\mu}^2},$$

car on a en vertu (37):

$$\frac{dy}{\Delta y}=\frac{dx_{2\mu}}{\Delta x_{2\mu}}$$

et y est rationnelle, puisque les fonctions $\Delta x_{2\mu}$ et $x_{2\mu}^2$ le sont. On verra aisément que cette fonction y aura la forme:

$$55)\qquad y=\frac{1+\alpha.x^2+\ldots+\beta.x^{(2\mu)^2}}{1+\alpha'.x^2+\ldots+\beta'.x^{(2\mu)^2}}.$$

Pour $\mu=1$, on aura:

$$56)\qquad y=\frac{1-2x^2+c^2x^4}{1-2c^2x^2+c^2x^4}.$$

Nous verrons dans la suite, comment les fonctions x_μ et y peuvent être décomposées en facteurs et en fractions partielles.

Nous ferons voir aussi que les équations précédentes sont toujours résolubles *algébriquement* par rapport à x, en sorte qu'on puisse exprimer x en x_μ à l'aide de *radicaux*.

Chapitre II.

Sur la relation la plus générale qui existe entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques.

Après avoir établi dans le chapitre précédent les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques, nous allons maintenant en faire d'applications au problème général, que nous nous sommes proposé. Nous ferons voir qu'on pourra en ramener la solution à celle de quelques autres plus simples.

§ 1.

Sur la forme dont l'intégrale d'une différentielle quelconque algébrique est susceptible, en supposant cette intégrale exprimable par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques.

Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu$ un nombre quelconque de variables, liées entre elles par des équations algébriques dont le nombre est moindre que celui des variables. Soient $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ des fonctions algébriques quelconques de ces variables et supposons que la différentielle

$$y_1.dx_1+y_2.dx_2+\ldots+y_\mu.dx_\mu$$

soit complète et que son intégrale soit exprimable à l'aide de fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques, en sorte que l'on ait:

57) $$\int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \ldots + y_\mu dx_\mu)$$
$$= u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots + A_\nu \log v_\nu$$
$$+ \alpha_1 \psi_1(t_1) + \alpha_2 \psi_2(t_2) + \ldots + \alpha_n \psi_n(t_n),$$
où $A_1, A_2, \ldots A_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sont des quantités constantes, $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu$, $t_1, t_2, \ldots t_n$ des fonctions *algébriques* des variables $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, et $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \psi_n$ des fonctions elliptiques quelconques des trois espèces avec des *modules et des paramètres quelconques*. Désignons respectivement par c_1, $c_2, \ldots c_n$ les modules de ces fonctions, et faisons pour abréger:

58) $$\pm\sqrt{((1-x^2)(1-c_m^2 x^2))} = \Delta_m x,$$
en sorte qu'on ait en général:

59) $$\psi_m x = \int \frac{\theta' . dx}{\Delta_m x},$$
où θ' est une fonction rationnelle de x^2 de l'une des trois formes:
$$1,\ x^2,\ \frac{1}{1-\frac{x^2}{a^2}},$$
selon que $\psi_m x$ est une fonction de la première de la seconde ou de la troisième espèce. Nous pourrons même supposer que θ' soit une fonction rationnelle quelconque de x.

On pourra regarder un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ comme variables indépendantes. Supposons que les m premières

60) $$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots x_m,$$
le soient: dans ce cas toutes les quantités:

61) $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_\mu, t_1, t_2, \ldots t_n, u, v_1, v_2, \ldots v_\nu; y_1, y_2, \ldots y_\mu$
seront des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots x_m$.

Cela posé, imaginons une fonction algébrique θ telle qu'on puisse exprimer toutes les fonctions:

62) $u, v_1, v_2, \ldots v_\nu; t_1, t_2, \ldots t_n, \Delta_1(t_1), \Delta_2(t_2), \ldots \Delta_n(t_n)$
rationnellement en

63) $\theta, x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu, y_1, y_2, y_3, \ldots y_\mu$.
Il existera une infinité de fonctions θ qui jouiront de cette propriété. Une telle fonction sera p. ex. la somme de toutes les fonctions (62), multipliées chacune par un coefficient indéterminé et constant. Cela est facile de démontrer par la théorie des équations algébriques. La quantité θ, étant une fonction algébrique des variables $x_1, x_2, \ldots$, pourra donc satisfaire à une équation algébrique, dans laquelle tous les coefficiens sont des fonctions *rationnelles* de

$x_1, x_2, \ldots$ Or au lieu de supposer ces coefficiens rationnels en $x_1, x_2, \ldots$, nous les supposerons rationnels en

64) $$x_1, x_2, x_3, \ldots x_\mu, y_1, y_2, y_3, \ldots y_\mu.$$

Cette supposition admise, on simplifiera beaucoup le raisonnement. Soit donc

65) $$V = 0$$

l'équation en θ, désignons son degré par δ et supposons, ce qui est permis, qu'il soit impossible, que la fonction θ puisse être racine d'une autre équation de la même forme, mais dont le degré est moindre que δ.

Imaginons maintenant qu'on différentie l'équation (57) par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots x_m$. Il est facile de voir, que la différentielle qu'on trouve sera de la forme

66) $$p_1 . dx_1 + p_2 . dx_2 + \ldots + p_m . dx_m = 0,$$

où $p_1, p_2, \ldots p_m$ seront des fonctions *rationnelles* des quantités

$$x_1, x_2, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_\mu, y_1, y_2 \ldots y_\mu, u, v_1, v_2, v_3, \ldots v_\nu,$$
$$t_1, t_2, \ldots t_3, \ldots t_n, \Delta_1(t_1), \Delta_2(t_2), \ldots \Delta_n(t_n).$$

Donc en introduisant la fonction θ; $p_1, p_2, \ldots p_m$ deviendront des fonctions rationnelles de

67) $$\theta, x_1, x_2, \ldots x_\mu, y_1, y_2, \ldots y_\mu.$$

Cela posé, l'équation (66) donnera séparement

68) $$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0, \ldots p_m = 0,$$

et il est clair que si ces équations sont satisfaites, l'équation proposée (57) le sera également. Maintenant les équations (68) sont autant d'équations en θ de la même forme que $V = 0$, ou pourront aisément être réduites à cette forme; mais suivant l'hypothèse $V = 0$ est une équation irréductible en θ, donc il suit d'un théorème connu, que toutes les équations (68) seront encore satisfaites, en mettant au lieu de θ une quelconque des racines de l'équation $V = 0$. Donc l'équation (57) aura lieu quelle que soit la valeur de θ, pourvu qu'elle satisfasse à $V = 0$.

Désignons par

69) $$\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\delta$$

les racines de l'équation $V = 0$ et par

70) $$u', u'', \ldots u^{(\delta)}; v'_m, v''_m, \ldots v_m^{(\delta)}; t'_m, t''_m, \ldots t_m^{(\delta)}$$

les valeurs correspondantes des fonctions u, v_m, t_m. L'équation (57), en substituant dans le second membre les expressions des quantités $u, v_1, v_2, \ldots$

t_1, t_2, ..., donnera $\Delta(t_1)$, $\Delta(t_2)$, ... en fonctions rationnelles de θ, x_1, x_2, ... x_μ, y_1, y_2, ... y_μ; substituant ensuite au lieu de θ successivement les δ valeurs θ_1, θ_2, ... θ_δ, l'équation (57) donnera, dis-je, δ équations semblables qui, ajoutées ensemble, conduiront à celle-ci:

$$71)\ \begin{cases} \delta.\int(y_1dx_1+y_2dx_2+\ldots+y_\mu dx_\mu)=u'+u''+\ldots+u^{(\delta)} \\ +A_1.(\log v'_1+\log v''_1+\ldots+\log v_1^{(\delta)})+\ldots+A_\nu.(\log v'_\nu+\log v''_\nu+\ldots+\log v_\nu^{(\delta)}) \\ +\alpha_1.(\psi_1(t'_1)+\psi_1(t''_1)+\ldots+\psi_1(t_1^{(\delta)}))+\ldots+\alpha_n.(\psi_n(t'_n)+\psi_n(t''_n)+\ldots+\psi_n(t_n^{(\delta)})) \end{cases}$$

Le second membre de cette équation pourra encore être réduit à une forme beaucoup plus simple. Considérons d'abord sa partie algébrique

$$72)\qquad u'+u''+\ldots+u^{(\delta)}=U.$$

Cette fonction est exprimée *rationnellement* en

$$x_1,\ x_2,\ldots x_\mu,\ y_1,\ y_2,\ldots y_\mu,\ \theta_1,\ \theta_2,\ldots\theta_\delta,$$

mais elle est en même temps symétrique par rapport à θ_1, θ_2, ... θ_δ, donc en vertu d'un théorème connu des fonctions symétriques et rationnelles, on pourra exprimer la fonction U *rationnellement* en

$$73)\qquad x_1,\ x_2,\ldots x_\mu,\ y_1,\ y_2,\ldots y_\mu$$

et par les coefficiens de l'équation $V=0$; mais ceux-ci sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des quantités (73), donc la fonction U le sera également.

Soit maintenant

$$74)\qquad \log V_m=\log v'_m+\log v''_m+\ldots+\log v_m^{(\delta)},$$

on aura

$$V_m=v'_m.v''_m\ldots v_m^{(\delta)},$$

donc la fonction V_m est aussi une fonction rationnelle des quantités (73. 69) et symétrique par rapport à θ_1, θ_2, ... θ_δ; donc on démontrera de la même manière, que V_m pourra s'exprimer rationnellement par les quantités (73) seules.

Il reste à considérer la partie elliptique de l'équation (71); or d'après les formules du chapitre précédent, on pourra toujours faire

$$75)\ \begin{cases} \psi_m(t'_m)+\psi_m(t''_m)+\ldots+\psi_m(t_m^{(\delta)}) \\ =\psi_m(T_m)+p+B_1\log q_1+B_2\log q_2+\ldots+B_\nu\log q_\nu \end{cases}$$

où toutes les quantités

$$76)\qquad T_m,\ \Delta_m(T_m),\ p,\ q_1,\ q_2,\ldots q_\nu$$

sont des fonctions rationnelles des fonctions

$$t'_m,\ t''_m,\ldots t_m^{(\delta)},\ \Delta_m(t'_m),\ \Delta_m(t''_m),\ldots\Delta_m(t_m^{(\delta)});$$

or celles-ci sont des fonctions rationnelles des quantités (69. 73), et il est

clair qu'elles seront symétriques par rapport à $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_3$, donc enfin on pourra exprimer les fonctions (76) rationnellement par les quantités $x_1, x_2, \dots x_\mu; y_1, y_2, \dots y_\mu$.

En vertu de ce que nous venons de voir, on pourra donc mettre le second membre de l'équation (71) sous la forme:

$$r + A' \log \varrho' + A'' \log \varrho'' + \dots + A^{(k)} \log \varrho^{(k)}$$
$$+ \alpha_1 . \psi_1(T_1) + \alpha_2 . \psi_2(T_2) + \dots + \alpha_n \psi_n(T_n).$$

Donc nous sommes parvenus à ce théorème général:

Théorème II. Si une intégrale quelconque de la forme

$$\int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \dots + y_\mu dx_\mu),$$

où $y_1, y_2, \dots y_\mu$ sont des fonctions *algébriques* de $x_1, x_2, \dots x_\mu$, liées entre elles par un nombre quelconque d'équations *algébriques*, peut être exprimée par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques de sorte qu'on ait:

$$\int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \dots + y_\mu dx_\mu) = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu$$
$$+ \alpha_1 \psi_1(t_1) + \alpha_2 \psi_2(t_2) + \dots + \alpha_n \psi_n(t_n),$$

où $A_1, A_2, \dots \alpha_1, \alpha_2, \dots$ sont des constantes; $u, v_1, v_2, \dots t_1, t_2, \dots$ des fonctions *algébriques* de $x_1, x_2, \dots$ et $\psi_1, \psi_2, \dots$ des fonctions elliptiques quelconques; on pourra toujours exprimer cette intégrale de la manière suivante:

$$\delta . \int (y_1 . dx_1 + y_2 . dx_2 + \dots + y_\mu . dx_\mu) = r + A' \log \varrho' + A'' \log \varrho'' + \dots + A^{(k)} \log \varrho^{(k)}$$
$$+ \alpha_1 . \psi_1(\theta_1) + \alpha_2 . \psi_2(\theta_2) + \dots + \alpha_n . \psi_n(\theta_n),$$

δ étant un nombre entier; $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ les mêmes que dans l'équation (57); $A', A'', \dots$ des constantes, et

$$\theta_1, \Delta_1(\theta_1), \theta_2, \Delta_2(\theta_2), \dots \theta_n, \Delta_n(\theta_n), r, \varrho', \varrho'', \dots \varrho^{(k)}$$

des fonctions *rationnelles* des quantités:

$$x_1, x_2, \dots x_\mu; y_1, y_2, \dots y_\mu.$$

Ce théorème a non seulement beaucoup d'importance dans la solution de notre problème général, mais il est encore le fondement de tout ce qui concerne l'application des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques à la théorie de l'intégration des formules différentielles *algébriques*. J'en ai tiré un grand nombre de résultats nouveaux et généraux que je sousmettrai au jugement des géomètres dans une autre occasion.

Comme corollaire de ce théorème il y a à remarquer le suivant:

Théorème III. Si une intégrale de la forme

$$\int (y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \dots + y_\mu dx_\mu)$$

peut être exprimée par une fonction algébrique et logarithmique de la forme

$$u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots + A_\nu \log v_\nu,$$

on pourra toujours supposer que u, v_1, v_2, ... v_ν soient des fonctions *rationnelles* de x_1, x_2, ... x_μ, y_1, y_2, ... y_μ. Si donc on a l'intégrale $\int y dx$, où y est liée à x par une équation algébrique quelconque, on pourra supposer que u, v_1, v_2 etc. soient des fonctions rationnelles de y et x*).

§. 2.

Application du théorème du paragraphe précédent à la relation générale qui existe entre des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques.

On peut tirer immédiatement du théorème général démontré dans le paragraphe précédent, plusieurs propositions importantes, relatives à la théorie des fonctions elliptiques.

Soit

77) $\alpha_1.\psi_1(x_1) + \alpha_2.\psi_2(x_2) + \ldots + \alpha_\mu.\psi_\mu(x_\mu) = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots + A_\nu \log v_\nu$,

une relation quelconque entre les fonctions elliptiques

$$\psi_1 x_1, \ \psi_2 x_2, \ldots \psi_\mu x_\mu,$$

dont les modules sont respectivement c_1, c_2, ... c_μ. Si pour abréger on fait $\pm\sqrt{((1-x^2)(1-c_m^2 x^2))} = \Delta_m x$, le premier membre sera la même chose que

$$\int\left(\frac{\alpha_1 . r_1}{\Delta_1 x_1}.dx_1 + \frac{\alpha_2 . r_2}{\Delta_2 x_2}.dx_2 + \ldots + \frac{\alpha_\mu . r_\mu}{\Delta_\mu x_\mu}.dx_\mu\right),$$

où r_1, r_2, ... r_μ seront respectivement des fonctions rationnelles de x_1, x_2, ... x_μ. Donc en vertu du théorème III. on pourra énoncer le suivant:

Théorème IV. Si l'équation (77) a lieu en supposant que u, v_1, v_2, ... v_ν soient des fonctions *algébriques* des quantités x_1, x_2, ... x_μ: on pourra toujours, sans diminuer la généralité, supposer, que u, v_1, v_1, ... v_ν soient exprimées rationnellement

$$\text{en } x_1, \ x_2, \ldots x_\mu, \ \Delta_1 x_1, \ \Delta_2 x_2, \ldots \Delta_\mu x_\mu.$$

En écrivant l'équation générale (77) de cette manière:

---

*) J'ai fondé sur ce théorème une nouvelle théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques, que je n'ai pu encore publier jusqu'à présent. Cette théorie franchit beaucoup les résultats connus, et son but est d'opérer *toutes les réductions possibles* des intégrales des formules algébriques, à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques. On parvient par là à réduire au plus petit nombre possible les intégrales qui représentent sous une forme finie toutes les intégrale d'une même classe.

$$78)\qquad \int\left(\frac{\alpha_1 r_1 dx_1}{\Delta_1 x_1}+\frac{\alpha_2 r_2 dx_2}{\Delta_2 x_2}+\ldots+\frac{\alpha_m r_m dx_m}{\Delta_m x_m}\right)$$

$$=u+A_1\log v_1+A_2\log v_2+\ldots+A_\nu\log v_\nu-\alpha_{m+1}\psi_{m+1}x_{m+1}-\ldots-\alpha_\mu\psi_\mu x_\mu,$$

on aura en vertu du théorème II. le suivant:

Théorème V. Si l'équation (77) a lieu, on en pourra toujours tirer une autre de la forme:

$$79)\quad \delta\alpha_1\psi_1 x_1+\delta\alpha_2\psi_2 x_2+\ldots+\delta\alpha_m\psi_m x_m+\alpha_{m+1}\psi_{m+1}\theta_1+\ldots+\alpha_\mu\psi_\mu\theta_{\mu-m}$$
$$=r+A'\log\varrho'+A''\log\varrho''+\ldots+A^{(k)}\log\varrho^{(k)},$$

δ étant un nombre entier et les quantités

$$\theta_1,\ \Delta_{m+1}\theta_1,\ \theta_2,\ \Delta_{m+2}\theta_2,\ldots\theta_{\mu-m},\ \Delta_\mu\theta_{\mu-m},$$
$$r,\ \varrho',\ \varrho'',\ldots\varrho^{(k)}$$

des fonctions *rationnelles* de

$$x_1,\ x_2,\ldots x_m,\ \Delta_1 x_1,\ \Delta_2 x_2,\ \Delta_m x_m.$$

On aura encore comme corollaire:

Théorème VI. Si une relation quelconque entre les fonctions elliptiques $\psi_1 x_1,\ \psi_2 x_2,\ldots\psi_\mu x_\mu$ des trois espèces a la forme exprimée par l'équation (77), on en tirera une autre de la forme:

$$80)\quad \delta\alpha_m.\psi_m x=-\alpha_1.\psi_1\theta_1-\alpha_2.\psi_2\theta_2-\ldots-\alpha_{m-1}.\psi_{m-1}\theta_{m-1}$$
$$-\alpha_{m+1}.\psi_{m+1}\theta_{m+1}-\ldots-\alpha_\mu.\psi_\mu\theta_\mu$$
$$+r+A'\log\varrho'+A''\log\varrho''+\ldots+A^{(k)}\log\varrho^{(k)},$$

δ étant un nombre entier et toutes les quantités

$$\theta_1,\ \Delta_1\theta_1,\ \theta_2,\ \Delta_2\theta_2,\ldots r,\ \varrho',\ \varrho'',\ldots$$

des fonctions rationnelles de la variable x et du radical correspondant $\Delta_m x$. Toutes ces fonctions pourront donc se mettre sous la forme:

$$p+q.\Delta_m x,$$

où p et q sont des fonctions *rationnelles* de x seul.

Voilà le théorème qui nous conduira, comme nous le verrons plus bas, à la solution de notre problème.

Si l'on suppose toutes les variables $x_1,\ x_2,\ldots x_\mu$ égales entre elles et à x, et les fonctions $\psi_1,\ \psi_2,\ldots\psi_\mu$ ayant le même module, que nous désignerons par c, le premier membre de l'équation (77) sera la même chose que $\int\frac{r\,dx}{\Delta x}$, où r est une fonction rationnelle de x; donc en vertu du théorème II. on pourra énoncer le suivant.

Théorème VII. Si entre les fonctions ϖx, $\varpi_0 x$, $\Pi_1 x$, $\Pi_2 x, \ldots \Pi_\mu x$, où $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_\mu$ désignent des fonctions de la troisième espèce, avec des paramètres quelconques, mais avec le même module c qu'ont les deux fonctions de la première et de la seconde espèce ϖx et $\varpi_0 x$, il existe une relation quelconque de la forme:

$$81)\quad \begin{cases} \alpha\varpi x + \alpha_0\varpi_0 x + \alpha_1\Pi_1 x + \alpha_2\Pi_2 x + \ldots + \alpha_\mu\Pi_\mu x \\ = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots + A_\nu \log v_\nu, \end{cases}$$

on pourra toujours supposer que les quantités

$$u,\ v_1,\ v_2, \ldots v_\nu$$

soient de la forme $p + q\Delta x$, où p et q sont des fonctions rationnelles de x seul.

Ce théorème est encore d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques. Nous en développerons dans le chapitre IV. des conséquences importantes pour notre objet.

§ 3.

Réduction du problème général.

Reprenons la formule du théorème VI. En la différentiant, le résultat sera de la forme:

$$P + Q\Delta_m x = 0$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x; donc on aura séparement $P=0$, $Q=0$, donc encore $P - Q.\Delta_m x = 0$, c. à. d. la formule (80) aura lieu en faisant varier le signe du radical $\Delta_m x$. Or en désignant par θ'_1, θ'_2, θ'_3 etc. les valeurs correspondantes de $\theta_1, \theta_2, \ldots$, cela donne

$$-\delta\alpha_m . \psi_m x = -\Sigma\alpha . \psi\theta' + v',$$

où pour abréger nous avons mis le signe de sommation Σ; v' étant la partie algébrique et logarithmique. En retranchant cette équation de (80), on trouvera

$$82)\qquad 2\delta\alpha_m . \psi_m x = \Sigma\alpha(\psi\theta' - \psi\theta) + v - v'.$$

Cela posé, désignons par c le module de la fonction ψ et par Δx la fonction $\pm\sqrt{((1-x^2)(1-c^2x^2))}$; on aura, selon ce qu'on a vu dans le chapitre I. (35):

$$\psi\theta' - \psi\theta = \psi y - v'',$$

en faisant

$$y = \frac{\theta'\Delta\theta - \theta\Delta\theta'}{1 - c^2\theta^2\theta'^2},$$

v'' étant une expression algébrique et logarithmique.

Soient maintenant

$$\theta = p + q\Delta_m x,\ \Delta\theta = r + \varrho\Delta_m x,$$

où p, q, r, ϱ sont des fonctions rationnelles de x. En changeant le signe du radical $\Delta_m x$, on aura les valeurs de θ' et $\Delta\theta'$, savoir

$$\theta' = p - q\Delta_m x, \; \Delta\theta' = r - \varrho\Delta_m x.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de y, il est clair que cette fonction prendra la forme:

$$83) \qquad y = t.\Delta_m x,$$

où t est rationnel en x. En vertu de la formule (34) on voit que Δy sera aussi rationnel en x.

Si maintenant on fait

$$z = \frac{y\Delta e + e\Delta y}{1 - c^2 e^2 y^2},$$

où e est constant, on aura encore:

$$\psi y = \psi z + v'',$$

donc:

$$\psi\theta' - \psi\theta = \psi z + v_1.$$

Or je dis qu'on pourra faire ensorte que z soit une fonction rationnelle de x. En effet il suffit pour cela, d'attribuer à la constante e une valeur qui fait $\Delta e = 0$.

Soit par exemple $e = 1$, on aura

$$84) \qquad z = \frac{\Delta y}{1 - c^2 y^2} \text{ et de là } \Delta z = \frac{c^2 - 1}{1 - c^2 y^2} \cdot y,$$

mais y^2 et Δy, comme nous venons de voir, sont des fonctions rationnelles de x, donc z le sera également.

La formule (82) prendra donc la forme suivante:

$$85) \qquad 2\delta\alpha_m \cdot \psi_m x = \Sigma\alpha\psi z + V,$$

où V est une fonction algébrique et logarithmique, qui en vertu du théorème II. pourra se mettre sous la forme:

$$u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots$$

toutes les quantités u, v_1, v_2,... étant de la forme $p + q.\Delta_m x$.

En développant le second membre de l'équation (85), on aura aussi la formule:

$$86) \begin{cases} 2\delta\alpha_m \cdot \psi_m x = \alpha_1 \cdot \psi_1 z_1 + \alpha_2 \cdot \psi_2 z_2 + \dots + \alpha_{m-1} \cdot \psi_{m-1} z_{m-1} \\ \qquad + \alpha_{m+1} \cdot \psi_{m+1} z_{m+1} + \dots + \alpha_\mu \cdot \psi_\mu z_\mu + V, \end{cases}$$

où en vertu des deux équations (84, 83) toutes les quantités

$$z_1, \; \frac{\Delta_1 z_1}{\Delta_m x}, \; z_2, \; \frac{\Delta_2 z_2}{\Delta_m x}, \; z_3, \; \frac{\Delta_3 z_3}{\Delta_m x}, \dots z_\mu, \; \frac{\Delta_\mu z_\mu}{\Delta_m x}$$

sont des fonctions rationnelles de la variables x. Cette formule est donc une suite nécessaire de la formule générale (77). Il faut faire attention que δ est

un nombre entier et que les coefficiens α_1, α_2, $..\alpha_\mu$ sont précisément les mêmes dans les deux formules. C'est une remarque essentielle.

A l'aide de la formule (86) on pourra maintenant réduire la formule générale (77) à une autre plus simple; En effet, en éliminant la fonction $\psi_m x$ entre ces deux équations, on trouvera une équation de la même forme que la proposée, mais qui contiendra un nombre moindre de fonctions elliptiques. Faisons $m = \mu$ et mettons x_μ pour x dans la formule (86). On aura:

$$2\delta\alpha_\mu . \psi_\mu x_\mu = \alpha_1 . \psi z_1 + \alpha_2 . \psi z_2 + \ldots + \alpha_{\mu-1} . \psi z_{\mu-1} + V.$$

En éliminant la fonction $\psi_\mu x_\mu$ entre les deux équations il viendra:

87) $$\alpha_1(2\delta\psi_1 x_1 - \psi_1 z_1) + \alpha_2(2\delta\psi_2 x_2 - \psi_2 z_2) + \ldots + \alpha_{\mu-1}(2\delta\psi_{\mu-1}x_{\mu-1} - \psi_{\mu-1}z_{\mu-1}) = V'.$$

Mais 2δ étant un nombre entier, on pourra, en vertu de ce que nous avons vu dans le chapitre précédent, trouver des fonctions algébriques x'_1, x'_2, $\ldots x'_{\mu-1}$ telles que

$$2\delta\psi_1 x_1 - \psi_1 z_1 = \psi_1 x'_1 + V_1,$$
$$2\delta\psi_2 x_2 - \psi_2 z_2 = \psi_2 x'_2 + V_2$$
etc.

donc la formule (87) donnera celle-ci:

88) $$\begin{cases} \alpha_1\psi_1 x'_1 + \alpha_2\psi_2 x'_2 + \ldots + \alpha_{\mu-1}\psi_{\mu-1}x'_{\mu-1} = \\ u' + A'_1 \log v'_1 + A'_2 \log v'_2 + \ldots + A'_\nu \log v'_\nu. \end{cases}$$

Cette équation a précisement la même forme que l'équation proposée; seulement elle ne contient la fonction ψ_μ. On pourra la traiter de la même manière et en chasser une des fonctions, par exemple $\psi_{\mu-1}$. En continuant ainsi, on parviendra enfin à une équation qui ne contiendra que des fonctions algébriques et logarithmiques, et qui ne présentera plus de difficulté. On voit donc que le problème général pourra être réduit à celui-ci:

Satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

89) $$\begin{cases} \psi x = \beta_1\psi_1 y_1 + \beta_2\psi_2 y_2 + \ldots + \beta_n\psi_n y_n \\ \quad + u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots + A_\nu \log v_\nu, \end{cases}$$

où ψ, ψ_1, ψ_2, $\ldots \psi_n$ désignent des fonctions elliptiques des trois espèces, et en supposant que

$$y_1, y_2, \ldots y_n$$

soient des fonctions rationnelles de x; et que $\Delta_1 y_1$, $\Delta_2 y_2$, $\ldots \Delta_n y_n$ soient de la forme $p . \Delta x$, où p est rationnelle en x, et Δx le radical dans la fonction ψx.

Soient

$$\Delta_1 y_1 = p_1 . \Delta x, \; \Delta_2 y_2 = p_2 . \Delta x, \ldots \Delta_n y_n = p_n . \Delta x.$$

Supposons que ces équations soient satisfaites, et soit

$$\psi x = \int \frac{\theta x dx}{\Delta x}, \quad \psi_1 x = \int \frac{\theta_1 x dx}{\Delta_1 x}, \ldots \psi_n x = \int \frac{\theta_n x . dx}{\Delta_n x},$$

où θx, $\theta_1 x, \ldots \theta_n x$ seront toujours des fonctions rationnelles suivant la nature des fonctions ψ, $\psi_1, \ldots \psi_n$, on aura:

$$\psi_m y_m = \int \frac{\theta_m y_m}{p_m} \cdot \frac{dy_m}{dx} \cdot \frac{dx}{\Delta x};$$

or $\frac{\theta_m y_m}{p_m} \cdot \frac{dy_m}{dx}$ est une fonction rationnelle de x, donc l'intégrale du second membre pourra être réduite à la forme:

$$\psi_m y_m = r + A\varpi x + A_0 \varpi_0 x + A' \Pi'(x, a') + A'' \Pi'(x, a'') + \ldots,$$

où r est une expression algébrique et logarithmique. En transformant toutes les fonctions ψx, $\psi_1 y_1$, $\psi_2 y_2, \ldots$ de cette manière, l'équation (87) prendra cette forme:

$$90) \begin{cases} \alpha\varpi x + \alpha_0 \varpi_0 x + \alpha_1 \Pi(x, a_1) + \alpha_2 \Pi(x, a_2) + \ldots + \alpha_\mu \Pi(x, a_\mu) \\ \qquad = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots \end{cases}$$

En vertu de ce que nous venons de voir il est clair que la solution du problème (89) pourra être réduite à celle des suivants:

Problème A. Trouver tous les cas possibles où l'on peut satisfaire à l'équation:

$$91) \qquad (1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = p^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2),$$

en supposant y et p fonctions rationnelles de l'indéterminée x, et c et c' étant des constantes.

Problème B. L'équation (91) étant satisfaite, réduire les trois fonctions:

$$\varpi(y, c'), \ \varpi_0(y, c'), \ \Pi(y, c', a)$$

à la forme:

$$r + A\varpi x + A_0 \varpi_0 x + A' \Pi(x, a') + A'' \Pi(x, a'') + \ldots$$

où r est une expression algébrique et logarithmique.

Problème C. Trouver la relation la plus générale entre les fonctions qui ont le même module et la même variable, c'est-à-dire: trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour exprimer une fonction de la forme:

$$\alpha\varpi x + \alpha_0 \varpi_0 x + \alpha_1 \Pi'(x, a_1) + \alpha_2 \Pi'(x, a_2) + \ldots,$$

par des fonctions algébriques et des logarithmes.

La solution complète de ces trois problèmes sera l'objet principal de nos recherches ultérieures. Nous allons commencer par le dernier qui est le plus simple.

Chapitre III.

Relation la plus générale entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques de la même variable et du même mudule; ou solution du problème C.

Soit comme précédemment

$$\Delta x = \pm \sqrt{((1-x^2)(1-c^2x^2))},$$

ϖx, $\varpi_0 x$ les fonctions elliptiques des deux premières espèces et $\Pi'\alpha_1$, $\Pi'\alpha_2$, $\dots \Pi'\alpha_\mu$ des fonctions de la troisième espèce, ayant pour paramètres α_1, α_2, $\dots \alpha_\mu$, ensorte que

$$\varpi x = \int \frac{dx}{\Delta x},\ \ \varpi_0 x = \int \frac{x^2 dx}{\Delta x},\ \ \Pi'\alpha_n = \int \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{\alpha_n^2}\right)\Delta x}.$$

Cela posé, il s'agit de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation:

$$\text{92)}\quad \begin{cases} \beta.\varpi x + \beta_0 \varpi_0 x + \beta_1 \Pi'\alpha_1 + \beta_2 \Pi'\alpha_2 + \dots + \beta_n \Pi'\alpha_n \\ \quad = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu. \end{cases}$$

En vertu du théorème VI. on peut supposer que u, v_1, v_2, $\dots v_\nu$ soient de la forme $p + q\Delta x$, où p et q sont rationnels en x.

Nous supposons, ce qui est permis, qu'il soit impossible de trouver une relation semblable, qui ne contenait toutes les fonctions:

$$\Pi'\alpha_1,\ \Pi'\alpha_2, \dots \Pi'\alpha_n.$$

Nous supposons encore qu'aucun des paramètres α_1, α_2, $\dots \alpha_n$ ne soit égal à ± 1 ou à $\pm \frac{1}{c^2}$; car dans le cas contraire on pourrait, comme on sait, réduire la fonction correspondante de la troisième espèce aux fonctions ϖx et $\varpi_0 x$.

Cela posé, désignons le premier membre de l'équation (92) par ψx et le second par $u + \Sigma A \log v$. On aura donc

$$\text{93)}\quad \psi x = u + \Sigma A \log v.$$

Il est clair, que cette équation aura lieu encore si le radical Δx change de signe. Donc en désignant par u' et v' les valeurs correspondantes de u et v, on aura:

$$-\psi x = u' + \Sigma A \log v'.$$

Cela donne

$$2\psi x = u - u' + \Sigma A \log\left(\frac{v}{v'}\right).$$

Mettons ici $-x$ au lieu de $+x$, on pourra supposer que Δx reste invariable; la fonction ψx changera de signe et par conséquent on aura, en désignant par u'', u''', v'', v''' les valeurs correspondantes de u, u', v, v':

$$-2\psi x = u'' - u''' + \Sigma A \log\left(\frac{v''}{v'''}\right).$$

De là on tire:

$$\psi x = \tfrac{1}{4}(u - u' - u'' + u''') + \tfrac{1}{4}\Sigma A \log\left(\frac{v.v'''}{v'.v''}\right).$$

Soit

$$v = p + qx + (p' + q'x)\Delta x,$$

où p, q, p', q' sont des fonctions paires, on aura:

$$\begin{aligned} v' &= p + qx - (p' + q'x)\Delta x,\\ v'' &= p - qx + (p' - q'x)\Delta x,\\ v''' &= p - qx - (p' - q'x)\Delta x, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} v.v''' &= p^2 - q^2x^2 - (p'^2 - q'^2x^2)\Delta^2 x + 2x(pq' - qp')\Delta x,\\ v'.v'' &= p^2 - q^2x^2 - (p'^2 - q'^2x^2)\Delta^2 x - 2x(pq' - qp')\Delta x, \end{aligned}$$

par conséquent on aura:

$$\frac{v.v'''}{v'.v''} = \frac{fx + \varphi x.\Delta x}{fx - \varphi x.\Delta x},$$

où fx et φx seront des fonctions entières, dont l'une est *paire* et l'autre *impaire*. Nous supposerons, ce qui est permis, qu'elles n'ont pas de diviseur commun.

La partie algébrique $\frac{1}{4}(u - u' + u''' - u'')$ est évidemment de la forme $r.\Delta x$, où r est une fonction impaire de x. En écrivant A au lieu de $\frac{1}{4}A$, l'expression de ψx prendra la forme suivante:

$$94)\qquad \psi x = r\Delta x + \Sigma A \log\left(\frac{fx + \varphi x.\Delta x}{fx - \varphi x.\Delta x}\right).$$

Quant aux coefficiens A_1, A_2, ... A_ν, nous pourrons supposer, qu'il soit impossible d'avoir entre eux une relation de cette forme:

$$95)\qquad m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots + m_\nu A_\nu = 0,$$

où m_1, m_2, ... m_ν sont des nombres entiers. En effet, si cette équation avait lieu, on aurait:

$$\Sigma A \log v = \frac{1}{m_\nu}\cdot\left\{A_1 \log\left(\frac{v_1^{m_\nu}}{v_\nu^{m_1}}\right) + A_2 \log\left(\frac{v_2^{m_\nu}}{v_\nu^{m_2}}\right) + \ldots + A_{\nu-1}\log\left(\frac{v_{\nu-1}^{m_\nu}}{v_\nu^{m_{\nu-1}}}\right)\right\},$$

c'est-à-dire:

$$\Sigma A \log v = A'_1.\log v'_1 + A'_2.\log v'_2 + \ldots + A'_{\nu-1}\log v'_{\nu-1},$$

où le second membre contient un nombre moindre de logarithmes que le premier. On pourra donc répéter cette réduction jusqu'à ce qu'une équation telle que (95) est impossible. Cela posé, il faut prendre la différentielle des deux membres et comparer entre elles les fonctions algébriques qui en résultent.

Considérons d'abord la partie logarithmique du second membre de la formule (94). Soit pour abréger:

$$96)\qquad \varrho = \log\left(\frac{fx + \varphi x.\Delta x}{fx - \varphi x.\Delta x}\right),$$

on aura, en différentiant, un résultat de la forme:

$$97)\qquad d\varrho = \frac{v.dx}{[(fx)^2 - (\varphi x)^2\Delta^2 x]\Delta x},$$

où v est une fonction paire et entière de x, savoir:

$$98)\quad v = 2.(fx.\varphi' x - \varphi x.f'x)\Delta^2 x - 2fx.\varphi x.((1+c^2)x - 2c^2x^3).$$

En faisant:

$$99)\qquad \theta x = (fx)^2 - (\varphi x)^2(\Delta x)^2,$$

on pourra aussi mettre v sous cette forme:

$$100))\qquad v\varphi x = 2f'x.\theta x - fx.\theta' x,$$

équation facile à vérifier.

Cela posé, décomposons la fonction entière θx en facteurs de la forme $(x^2 - a^2)^m$, et faisons en conséquence:

$$101)\ (fx)^2 - (\varphi x)^2.(\Delta x)^2 = (x^2 - a_1^2)^{m_1}(x^2 - a_2^2)^{m_2}\ldots(x^2 - a_\mu^2)^{m_\mu} = \theta x.$$

L'équation (100) fait voir que si θx a le facteur $(x^2 - a^2)^m$, v aura nécessairement celui $(x^2 - a^2)^{m-1}$; donc la fonction fractionnaire $\frac{v}{\theta x}$ pourra être décomposée de la manière suivante:

$$102)\qquad \frac{v}{\theta x} = t + \frac{\beta'_1}{a_1^2 - x^2} + \frac{\beta'_2}{a_2^2 - x^2} + \ldots + \frac{\beta'_\mu}{a_\mu^2 - x^2},$$

où t est la partie entière, $\beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_\mu$ des constantes. D'abord je dis que t est une constante. En effet l'expression (98) de v fait voir que le degré de cette fonction ne pourra jamais surpasser celui de θx. Pour trouver les coefficiens $\beta'_1, \beta'_2, \ldots$, soit β' l'un quelconque entre eux, correspondant au facteur $(a^2 - x^2)^m$ de θx. On aura:

$$\beta' = \frac{v(a^2 - x^2)}{\theta x}\ \text{pour}\ x = a,$$

mais si l'on fait

$$\theta x = R.(a^2 - x^2)^m,$$

on aura en vertu de (100):

$$\frac{v(a^2-x^2)}{\theta x}=\frac{2.f'x}{\varphi x}(a^2-x^2)-\frac{fx}{\varphi x}\cdot\frac{dR}{R.dx}(a^2-x^2)+2mx\cdot\frac{fx}{\varphi x},$$

donc en faisant $x=a$:

$$\beta'=2ma.\frac{fa}{\varphi a}.$$

Or on a

$$(fa)^2-(\varphi a)^2(\Delta a)^2=0,$$

donc:

$$fa+\varphi a.\Delta a=0,$$

et par suite:

$$\beta'=-2ma.\Delta a,$$

On a donc:

$$103)' \quad \frac{v}{\theta x}=k-\frac{2m_1a_1\Delta a_1}{a_1^2-x^2}-\frac{2m_2a_2\Delta a_2}{a_2^2-x^2}-\dots-\frac{2m_\mu a_\mu\Delta a_\mu}{a_\mu^2-x^2}.$$

En multipliant par $\frac{dx}{\Delta x}$ on aura la valeur de $d\varrho$. La formule (94) donnera donc, en différentiant:

$$\beta+\beta_0x^2+\frac{\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1^2-x^2}+\frac{\alpha_2^2\beta_2}{\alpha_2^2-x^2}+\dots+\frac{\alpha_n^2\beta_n}{\alpha_n^2-x^2}=\frac{dr}{dx}.\Delta^2x-r((1+c^2)x-2c^2x^3)$$
$$+A_1.\left(k_1-\frac{2m_1a_1\Delta a_1}{a_1^2-x^2}-\frac{2m_2a_2\Delta a_2}{a_2^2-x^2}-\dots\right)$$
$$+A_2.\left(k_2-\frac{2m'_1a'_1\Delta a'_1}{a'^2_1-x^2}-\frac{2m'_2a'_2\Delta a'_2}{a'^2_2-x^2}-\dots\right)$$
$$+\text{ etc.}$$

En substituant une fonction rationnelle quelconque de x au lieu de r, on voit sans peine qu'il sera impossible de satisfaire à cette équation, à moins que r ne soit égale à zéro. En se rapellant que nous avons supposé qu'il soit impossible de trouver une relation entre un nombre moindre des fonctions $\Pi'\alpha_1$, $\Pi'\alpha_2,\dots\Pi'\alpha_n$ et ayant égard à l'impossibilité d'une équation de la forme (95), on verra aisément que tous les coefficiens:

$$A_1,\ A_2,\dots A_\nu$$

doivent se réduire à zéro excepté un seul. Soit donc

$$A_2=A_3=\dots A_\nu=0 \text{ et } A_1=1,$$

on aura:

$$\beta+\beta_0x^2+\frac{\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1^2-x^2}+\frac{\alpha_2^2\beta_2}{\alpha_2^2-x^2}+\dots+\frac{\alpha_n^2\beta_n}{\alpha_n^2-x^2}$$
$$=k_1-\frac{2m_1a_1\Delta a_1}{a_1^2-x^2}-\frac{2m_2a_2\Delta a_2}{a_2^2-x^2}-\dots-\frac{2m_\mu a_\mu\Delta a_\mu}{a_\mu^2-x^2},$$

donc:

$$\beta = k_1,\ \beta_0 = 0,\ \alpha_1 = a_1,\ \alpha_2 = a_2, \dots$$
$$\beta_2 = -\frac{2m_1 \Delta a_1}{a_1},\ \beta_2 = -\frac{2m_2 \Delta a_2}{a_2}, \dots$$

Cela posé, la formule générale (94) prendra la forme:

$$104)\quad \beta . \varpi x - \frac{2m_1 \Delta\alpha_1}{\alpha_1} . \Pi'\alpha_1 - \frac{2m_2 \Delta\alpha_2}{\alpha_2} \Pi'\alpha_2 - \dots - \frac{2m_n \Delta\alpha_n}{\alpha_n} \Pi'\alpha_n = \log\left(\frac{fx + \varphi x . \Delta x}{fx - \varphi x . \Delta x}\right) + C,$$

où les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ doivent satisfaire à l'équation

$$105)\quad (fx)^2 - (\varphi x)^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) = (x^2 - \alpha_1^2)^{m_1} (x^2 - \alpha_2)^{m_2} \dots (x^2 - \alpha^2_n)^{m_n},$$

l'une des fonctions fx, φx étant paire et l'autre impaire.

Telle est donc la relation la plus générale entre des fonctions rapportées au même module et à la même variable.

Il est remarquable que la fonction de la seconde espèce n'entre point dans cette relation.

Quant à la quantité constante β qui multiplie la fonction de la première espèce ϖx, elle pourra sous certaines conditions se réduire à zéro.

L'équation (105) qui donne les relations nécessaires entre les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ est précisément de la même forme que celle que nous avons considéré dans le chapitre I. En regardant $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ comme des variables, elle donnera en vertu du théorème I.:

$$106)\quad \begin{cases} m_1 \Pi\alpha_1 + m_2 \Pi\alpha_2 + \dots + m_n \Pi\alpha_n = C - \frac{a}{2\Delta a} \log\left(\frac{fa + \varphi a . \Delta a}{fa - \varphi a . \Delta a}\right), \\ m_1 \varpi\alpha_1 + m_2 \varpi\alpha_2 + \dots + m_n \varpi\alpha_n = C \end{cases}$$

où $\Pi\alpha = \int \frac{d\alpha}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)\Delta\alpha}$.

Les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ satisfont donc à l'équation différentielle:

$$107)\quad \frac{m_1 d\alpha_1}{\Delta\alpha_1} + \frac{m_2 d\alpha_2}{\Delta\alpha} + \dots + \frac{m_n d\alpha_n}{\Delta\alpha_n} = 0.$$

Pour avoir toutes les fonctions de la troisième espèce qui seront réductibles indéfiniment à la première espèce, il faut faire $n = 1$. En posant $\alpha_1 = \alpha$, $m_1 = m$, on a:

$$108)\quad \Pi'\alpha = \frac{\beta\alpha}{2m\Delta\alpha} \varpi x - \frac{\alpha}{2m\Delta\alpha} . \log\left(\frac{fx + \varphi x . \Delta x}{fx - \varphi x . \Delta x}\right).$$

Pour trouver dans ce cas le paramètre α; on aura l'équation:

$$109\quad (fx)^2 - (\varphi x)^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) = (x^2 - \alpha^2)^m,$$

ce qui fait dépendre α d'une équation qui généralement est du degré m^2. Le cas le plus simple est celui où $m = 2$. On aura dans ce cas:

$$\varphi x = \frac{1}{c}\sqrt{-1},\ fx = ax,$$

donc:

$$(x^2-\alpha^2)^2 = x^4 - \left(\frac{1+c^2}{c^2} - a^2\right)x^2 + \frac{1}{c^2} = \left(x^2 \pm \frac{1}{c}\right)^2;$$

donc α pourra avoir les deux valeurs $\frac{1}{\sqrt{c}}$, $\frac{1}{\sqrt{-c}}$. Les valeurs correspondantes de a sont $1 - \frac{1}{c}$, $1 + \frac{1}{c}$. On aura:

$$\Pi'\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) = \int \frac{dx}{(1-cx^2)\Delta x} = k\varpi x + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{-1}}{(c-1)}\cdot\log\left(\frac{(c-1)x+\sqrt{-1}.\Delta x}{(c-1)x-\sqrt{-1}.\Delta x}\right),$$

où l'on pourra varier le signe de c.

Si $m = 3$, on aura dans le cas fx impair:

$$fx = x^3 + ax,\ \varphi x = b,$$

donc:

$$(x^3+ax)^2 - b^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha^2)^3.$$

De là on tire:

$$\alpha^3 = b,\ \alpha^3 + a\alpha + b\Delta\alpha = 0,\ 2a - c^2b^2 = -3\alpha^2,\ a^2 + (1+c^2)b^2 = 3\alpha^4,$$

donc en éliminant a et b, on trouvera:

$$a = \tfrac{1}{2}(c^2\alpha^6 - 3\alpha^2),$$
$$\Delta\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - c^2\alpha^4).$$

Si donc α est une racine de cette équation, on aura:

$$\Pi\alpha = \int \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\Delta x} = k.\varpi x - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{1-c^2\alpha^4}.\log\left(\frac{x^3+\frac{1}{2}(c^2\alpha^6-3\alpha^2)x+\alpha^3.\Delta x}{x^3+\frac{1}{2}(c^2\alpha^6-3\alpha^2)x-\alpha^3.\Delta x}\right),$$

Généralement la quantité α sera pour un m quelconque racine de l'une des deux équations:

110) $$x_m = 0;\ x_m = \tfrac{1}{0},$$

où x_m est la fonction de x que nous avons considéré dans le §. 4. du chapitre I., et qui est telle qu'on ait

$$\frac{dx_m}{\Delta x_m} = m.\frac{dx}{\Delta x},$$

et en même temps $x_m = 0$ pour $x = 0$.

Il y a encore à remarquer, que si l'on désigne par α une racine de $x_m = 0$, $\frac{1}{c\alpha}$ en sera une de l'équation $x_m = \frac{1}{0}$. Pour prouver que α satisfait à une des équations (110), il suffit de remarquer qu'on a (39):

111) $$p^2 - q^2(\Delta x)^2 = (x^2 - \alpha^2)^m (x^2 - \alpha^2_m),$$

où α_m désigne la même fonction de α, que x_m l'est de x En multipliant les deux équations (109. 111) membre par membre, il viendra:

111') $$(pfx \pm q\varphi x \Delta^2 x)^2 - (p\varphi x \pm qfx)^2(\Delta x)^2 = (x^2 - \alpha^2)^{2m}(x^2 - \alpha^2_m).$$

Or on tire des mêmes équations:

$$p^2(fx)^2 - q^2(\varphi x)^2(\Delta x)^4 = (x^2 - \alpha^2)^m . R,$$

où R est une fonction entière. De là on voit que l'une des deux fonctions

$$pfx + q\varphi x . \Delta^2 x, \; pfx - q\varphi x . \Delta^2 x$$

sera divisible par $(x^2 - \alpha^2)^m$; donc en divisant l'équation (111') par $(x^2 - \alpha^2)^{2m}$, le résultat sera de la forme:

$$r^2 - \varrho^2(\Delta x)^2 = x^2 - \alpha^2_m,$$

où l'une des fonctions r et ϱ sera paire et l'autre impaire. On doit donc avoir d'abord $\varrho = 0$, et ensuite $r^2 = x^2 - \alpha^2_m$, et de là $\alpha_m = 0$, ou $\alpha_m = \frac{1}{0}$. Réciproquement si l'une de ces équations a lieu, il est clair par la forme de (111) qu'on pourra satisfaire à l'équation (109). Il y a à remarquer que dans le cas que nous considérons, β ne pourra jamais être zéro. Donc il n'existe pas de fonction de la troisième espèce, exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques.

Le cas particulier le plus remarquable de la formule générale (104) est celui, où $n = 3$ et $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Dans ce cas, en faisant $\alpha_3 = \alpha$, $\Delta\alpha_3 = -\Delta\alpha$, on aura:

112) $$\frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1} . \Pi'\alpha_1 + \frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2} \Pi'\alpha_2 = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \Pi'\alpha + \beta . \varpi x - \frac{1}{2} \log\left(\frac{fx + \varphi x \Delta x}{fx - \varphi x \Delta x}\right),$$

où

113) $$\begin{cases} fx = x^3 + ax, \; \varphi x = b, \text{ ensorte que} \\ (x^3 + ax)^2 - b^2(1 - x^2)(1 - c^2x^2) = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \alpha_1^2)(x^2 - \alpha_2^2), \end{cases}$$

d'où l'on tire, comme dans le paragraphe 3. du chapitre I.:

114) $$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\alpha_1\Delta\alpha_2 + \alpha_2\Delta\alpha_1}{1 - c^2\alpha^2_1\alpha^2_2} \\ b = \alpha . \alpha_1 . \alpha_2; \; a = \frac{1}{2} . (c^2\alpha^2\alpha_1^2\alpha_2^2 - \alpha^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2), \\ \dfrac{\Delta\alpha}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2 + a}{\alpha . \alpha_1 . \alpha_2}; \; \beta = c^2\alpha . \alpha_1 . \alpha_2. \end{cases}$$

Les deux paramètres α_1, α_2 sont donc arbitraires.

Comme cas particulier on remarquera celui où α_2 est infini. On aura dans ce cas

$$\alpha = \pm \frac{1}{c\alpha_1}.$$

On pourra donc réduire l'une à l'autre deux fonctions, dont les paramètres sont respectivement a, $\frac{1}{ca}$. La formule correspondante pour effectuer cette réduction est:

$$115)\quad \Pi' a + \Pi'\left(\frac{1}{ca}\right) = \varpi x + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a}{\Delta a}\cdot\log\left(\frac{x\Delta a + a\Delta x}{x\Delta a - a\Delta x}\right).$$

Pour trouver toutes les fonctions réductibles l'une à l'autre, il suffit de faire dans la formule (104) $n=2$. Cela donne

$$116)\quad m_1\cdot\frac{\Delta a_1}{a_1}\Pi' a_1 + m_2\frac{\Delta a_2}{a_2}\Pi' a_2 = \beta.\varpi x - \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{fx + \varphi x\Delta x}{fx - \varphi x\Delta x}\right),$$

où les paramètres a_1 et a_2 sont liés entre eux par l'équation:

$$117)\quad (fx)^2 - (\varphi x)^2.(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2 - a_1^2)^{m_1}(x^2 - a_2^2)^{m_2}$$

et cela donnera une seule équation entre a_1 et a_2.

Chapitre IV.

De l'équation $(1-y^2)(1-c'^2y^2) = r^2(1-x^2)(1-c^2x^2)$.

Considérons maintenant le problème (A), savoir de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation:

$$118)\qquad (1-y^2)(1-c'^2y^2) = r^2(1-x^2)(1-c^2x^2),$$

y et r étant des fonctions rationnelles de x. La méthode qui s'offre d'abord de résoudre ce problème est celle des coefficiens indéterminés, mais cette méthode ne paraît guère applicable, si le degré de la fonction y est un peu élevé; au moins son application serait très pénible. Je vais présenter une autre plus simple et qui est, ce me semble, importante dans la théorie des fonctions elliptiques.

§ 1.

Réduction du problème à celui de satisfaire à l'équation:

$$\frac{dy}{\Delta(y,c')} = \varepsilon\cdot\frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

On voit d'abord que si l'équation dont il s'agit a lieu, on doit avoir nécessairement

$$r = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

où ε est constant

Il est facile de voir que les deux facteurs $1-y^2$, $1-c'^2y^2$ ne peuvent s'évanouir en même temps, car dans ce cas on aurait $c'^2=1$, et ce cas à été excepté. On doit donc avoir séparément:

$$119)\qquad 1-y^2=r_1^2.\varrho,\ 1-c'^2y^2=r_2^2.\varrho'$$

où r_1 et r_2 sont des fonctions rationnelles dont le produit est égal à r. Egalement on aura

$$\varrho.\varrho'=(1-x^2)(1-c^2x^2).$$

Or, différentiant les deux équations (119), on en tirera:

$$120)\qquad \begin{cases}-2y.dy=r_1.(r_1d\varrho+2\varrho\,dr_1),\\ -2c'^2y.dy=r_2.(r_2d\varrho'+2\varrho'dr_2).\end{cases}$$

Mais il est clair que y ne pourra avoir aucun facteur commun, ni avec r_1 ni avec r_2, donc il faut que le numérateur de la fraction rationnelle $\frac{dy}{dx}$ soit divisible par r_1 et par r_2; mais ces deux fonctions ne pourront s'évanouir en même temps, donc on doit avoir:

$$121)\qquad \frac{dy}{dx}=r_1.r_2.v=r.v,$$

où v est une fonction rationnelle de x, qui ne devient pas infini en attribuant à x une valeur qui donne $r=0$. Soit $y=\frac{p}{q}$, où p et q sont deux fonctions entières de x sans diviseur commun, on aura évidemment:

$$122)\qquad \begin{cases} r=\frac{\theta}{q^2},\\ \text{donc:}\\ q^2.\left(\frac{dy}{dx}\right)=\theta.v=\frac{qdp-pdq}{dx}.\end{cases}$$

Cela fait voir que v est une fonction entière. Or je dis que v se réduira à une constante. Désignons par m et n les degrés des fonctions p et q, et par μ et ν ceux de θ et v. Cela posé, il y a trois cas.

Cas I. $m>n$.

Dans ce cas l'équation

$$123)\qquad (q^2-p^2)(q^2-c'^2p^2)=\theta^2(1-x^2)(1-c^2x^2)$$

fait voir que

$$4m=2\mu+4;$$

mais comme on a

$$\theta.v=\frac{qdp-pdq}{dx},$$

on trouve

$$\mu+\nu=m+n-1,$$

donc:

$$\nu<2m-\mu-1,$$

c'est-à-dire, puisque $2m - \mu = 2$:

$$\nu < 1,$$

donc:

$$\nu = 0,$$

et par conséquent v constant.

Cas II. $n > m$.

On aura de la même manière:

$$4n = 2\mu + 4,\ 2n - \mu = 2,$$
$$\nu < 2n - \mu - 1,\ \nu < 1,\ \nu = 0,$$

donc aussi dans ce cas v sera égal à une constante.

Cas III. $n = m$.

Dans ce cas il peut arriver que le degré de l'une des fonctions

$$q - p,\ q + p,\ q - c'p,\ q + c'p$$

soit moindre que $n = m$. Soit donc par exemple

$$q - p = \varphi,$$

où le degré de φ, que nous désignerons par $m - k$, ne pourra surpasser m. On aura en vertu de (123):

$$4m - k = 2\mu + 4,$$

d'où

$$2m - \mu = 2 + \tfrac{1}{2}k,$$

maintenant si l'on substitue la valeur de $q = p + \varphi$, on aura:

$$\theta . v = \frac{pdq - qdp}{dx} = \frac{pd\varphi - \varphi dp}{dx},$$

donc:

$$\mu + \nu = m + m - k - 1 = 2m - k - 1, \text{ si } k > 0, \text{ et}$$
$$\mu + \nu = m + m - k - 2 = 2m - k - 2, \text{ si } k = 0.$$

Dans le premier cas on a

$$\nu = 2m - \mu - k - 1 = 1 - \tfrac{1}{2}k = 0,$$

et dans le second

$$\nu = 2m - \mu - k - 2 = 0.$$

Le degré de la fonction entière v est donc dans tous les cas égal à zéro, et par conséquent v se réduit à une constante. En la désignant par ε, on aura:

124) $$\varepsilon . r = \frac{dy}{dx}.$$

Cela posé, l'équation

$$(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 . \varepsilon^{-2} . (1 - x^2)(1 - c^2 x^2)$$

donnera celle-ci.

$$125)\qquad \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \frac{\varepsilon . dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

et le problème est ramené par là à celui de satisfaire de la manière la plus générale à cette équation en supposant y rationnel en x. En intégrant, on aura:

$$126)\qquad \varpi(y, c') = \varepsilon . \varpi(x, c) + C.$$

En comparant ce résultat à celui que nous avons démontré dans le chapitre II. on aura ce théorème:

Théorème VIII. "Si l'on a une relation quelconque entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques, et qu'on désigne par c le module de l'une d'elles prise à volonté, il se trouvera parmi les autres fonctions au moins une, dont le module est c', et qui est telle, qu'on ait entre *les fonctions de la première espèce,* correspondantes respectivement aux modules c' et c, cette relation très simple.

$$\varpi(y, c') = \varepsilon . \varpi(x, c) + C,$$

où y est une fonction rationnelle de x et ε une quantité constante."

Ce théorème est de la plus grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques.

Il s'agit maintenant de trouver toutes les valeurs de y et des modules c' et c propres à satisfaire à l'équation (125). Si la fonction y contient des puissances de x supérieures à la première, elle jouira d'une certaine propriété, qui conduira à son expression générale, en supposant connue la solution complète dans le cas où y ne contient que la première puissance de x. C'est pourquoi nous donnerons d'abord la solution dans ce cas.

§ 2.

Solution du problème dans le cas de $y = \frac{\alpha + \beta . x}{\alpha' + \beta' . x}$.

En substituant cette valeur de y dans l'équation:

$$\varepsilon^2(1-y^2)(1-c'^2y^2) = (1-x^2)(1-c^2x^2) . \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

rien n'est plus facile, que de trouver toutes les solutions possibles. Je ne ferai que les transcrire:

I. $c' = \pm c,\quad y = \pm x,\quad y = \pm \frac{1}{cx},\quad \varepsilon = \pm 1,$

II. $c' = \pm \frac{1}{c},\quad y = \pm cx,\quad y = \pm \frac{1}{x},\quad \varepsilon = \pm c,$

III. $c' = \pm\left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^2$, $y = \pm\left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right)\cdot\left(\frac{1\pm x\sqrt{c}}{1\mp x\sqrt{c}}\right)$, $\varepsilon = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}.(1+\sqrt{c})^2$,

IV. $c' = \pm\left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right)^2$, $y = \pm\left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)\cdot\left(\frac{1\pm x\sqrt{c}}{1\mp x\sqrt{c}}\right)$, $\varepsilon = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}.(1-\sqrt{c})^2$,

V. $c' = \pm\left(\frac{1-\sqrt{-c}}{1+\sqrt{-c}}\right)^2$, $y = \pm\frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}}\cdot\frac{1\pm x.\sqrt{-c}}{1\mp x.\sqrt{-c}}$, $\varepsilon = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}.(1+\sqrt{-c})^2$,

VI. $c' = \pm\left(\frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}}\right)^2$, $y = \pm\frac{1-\sqrt{-c}}{1+\sqrt{-c}}\cdot\frac{1\pm x.\sqrt{-c}}{1\mp x.\sqrt{-c}}$, $\varepsilon = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}.(1-\sqrt{-c})^2$.

On voit que le module c' a six valeurs différentes. La fonction y en aura douze, car à chaque valeur de c' répondent deux valeurs différentes de y. Ces formules nous seront utiles pour la solution du problème général.

§ 3.

Propriété générale de la fonction rationnelle y, qui satisfait à une équation de la forme:

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon\,.\frac{dx}{\Delta x}.$$

Soit pour abréger:

$$\sqrt{((1-y^2)(1-c'^2y^2))} = \Delta' y \text{ et } \sqrt{((1-x^2)(1-c^2x^2))} = \Delta x,$$

l'équation (125) qu'il s'agit de satisfaire, prendra la forme:

127) $$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon\,.\frac{dx}{\Delta x},$$

où y est supposée fonction *rationnelle* de x.

Soit

128) $$y = \psi x$$

la fonction cherchée. Si, en réduisant ψx à sa plus simple expression, les puissances de la variable x qui y entrent s'élèvent jusqu'a la μ^{me} inclusivement, nous dirons que ψx est une fonction rationnelle de x du degré μ. Sa forme générale sera donc:

129) $$\psi x = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_\mu . x^\mu}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_\mu . x^\mu},$$

le numérateur n'ayant de diviseur commun avec le dénominateur, et les deux coefficiens A_μ et B_μ n'étant nuls à la fois.

Cela posé, si l'on considére x comme fonction de y, l'équation $y = \psi x$ donnera μ valeurs différentes à x, nécessairement inégales, en supposant y variable. Il est évident que toutes ces valeurs de x satisferont également à l'équation différentielle:

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon\,.\frac{dx}{\Delta x}.$$

En désignant donc par x et x' deux de ces valeurs, on aura en même temps:

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{dx'}{\Delta x'}.$$

Donc, en égalant ces deux valeurs de $\frac{dy}{\Delta' y}$, on aura

$$\frac{dx'}{\Delta x'} = \frac{dx}{\Delta x}.$$

Cette relation aura toujours lieu entre deux racines quelconques de l'équation

$$y = \psi x.$$

Il est facile de tirer de là une équation algébrique entre x' et x. En effet l'intégrale complète de cette équation est en vertu de (36):

130) $$x' = \frac{x\Delta e + e\Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

où e est une constante. Maintenant x et x' étant tous deux racines de $y = \psi x$, on aura:

$$y = \psi x,\ y = \psi x',$$

donc:

131) $$\psi x' = \psi x,$$

et puisque y est variable, cette équation doit nécessairement avoir lieu pour une valeur quelconque de x. On aura donc immédiatement ce théorème:

Théorème IX. "Si une fonction rationnelle y de x, du degré μ, doit satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{dx}{\Delta x},$$

il faut que cette fonction reste la même, en mettent pour x, μ valeurs différentes de la forme:

$$\frac{x\Delta e + e\Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

e étant constant."

Ce théorème, nous conduira, comme nous verrons, de la manière la plus simple à l'expression générale de y. Il s'agit seulement de déterminer les valeurs convenables de la constante e; car celles-ci étant trouvées, rien n'est plus facile que de trouver ensuite toutes les autres conditions nécessaires. Occupons nous d'abord de la recherche de cette constante.

§ 4.

Recherche des racines de l'équation $y = \psi x$.

Soit pour abréger:

132) $$\theta x = \frac{x\Delta e + e\Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

nous aurons d'après ce que nous venons de voir (131):

133) $$\psi(\theta x) = \psi x,$$

où le signe du radical Δx est évidemment arbitraire. Je remarque que cette équation, ayant lieu pour une valeur quelconque de x, subsistera encore en mettant θx au lieu de x. On aura donc:

$$\psi(\theta(\theta x)) = \psi(\theta x) = \psi x.$$

En mettant de nouveau θx au lieu de x et ainsi de suite, on trouve

$$y = \psi x = \psi(\theta x) = \psi(\theta^2 x) = \psi(\theta^3 x) = \ldots = \psi(\theta^n x) = \text{etc.},$$

où l'on a écrit pour abréger:

$$\theta^2 x = \theta\theta x,\ \theta^3 x = \theta\theta^2 x, \ldots \text{etc. } \theta^n x = \theta\theta^{n-1} x.$$

Il suit de là que toutes les quantités de la série

134) $$x,\ \theta x,\ \theta^2 x, \ldots \theta^n x, \ldots$$

seront des racines de l'équation $y = \psi x$. Maintenant cette équation, n'ayant qu'un nombre limité de racines, savoir μ, il faut nécessairement que plusieurs quantités de la série (134) soient égales entre elles. Il s'agit de savoir si cela est possible. Pour cela il faut d'abord avoir l'expression générale de $\theta^n x$ en fonction de x et e. Supposons pour le moment e indépendamment variable. On aura en vertu de l'équation (132)

$$\theta^n x = \frac{\theta^{n-1} x . \Delta e + e\Delta(\theta^{n-1} x)}{1 - c^2 e^2 (\theta^{n-1} x)^2}.$$

$$\frac{d(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{d(\theta^{n-1} x)}{\Delta(\theta^{n-1} x)} + \frac{de}{\Delta e}.$$

En mettant dans cette équation successivement $n-1, n-2, \ldots 2, 1$ au lieu de n, et supposant, ce qui est permis, que les radicaux $\Delta(\theta^n x), \Delta(\theta^{n-1} x) \ldots \Delta(\theta x)$, Δx conservent leurs signes dans deux équations consécutives, on aura sur le champ:

$$\frac{d(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{dx}{\Delta x} + n . \frac{de}{\Delta e}.$$

Cela posé, cherchons suivant le paragraphe 4 du chapitre I. une fonction rationnelle e_n de e telle que

$$\frac{de_n}{\Delta e_n} = n\ \frac{de}{\Delta e},$$

on aura:

$$\frac{d(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{dx}{\Delta x} + \frac{de_n}{\Delta e_n}.$$

Mais si l'on fait

$$x' = \frac{x\Delta e_n + e_n \Delta x}{1 - c^2 e_n^2 x^2},$$

on a:

$$\frac{dx'}{\Delta x'} = \frac{dx}{\Delta x} + \frac{de_n}{\Delta e_n},$$

donc:

$$\frac{d(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{dx'}{\Delta x'}.$$

Cette dernière équation donne

$$\theta^n x = \frac{x'\Delta e' + e'\Delta x'}{1 - c^2 e'^2 x'^2},$$

où e' est une constante.

Pour trouver cette constante, faisons $e = 0$; on aura $e_n = 0$ et $\Delta e_n = 1$. Donc la valeur de x' deviendra $x' = x$, et par conséquent celle de $\theta^n x$:

$$\theta^n x = \frac{x\Delta e' + e'\Delta x}{1 - c^2 e'^2 x^2}.$$

Mais puisque $\theta x = x$, on aura encore $\theta^n x = x$, donc:

$$x = \frac{x\Delta e' + e'\Delta x}{1 - c^2 e'^2 x^2}.$$

Cette équation, devant avoir lieu pour une valeur quelconque de x, ne pourra subsister à moins qu'on n'ait séparement $e' = 0$, $\Delta e' = 1$; donc on aura:

$$\theta^n x = x',$$

c'est-à-dire:

135) $$\theta^n x = \frac{x\Delta e_n + e_n \Delta x}{1 - c^2 e_n^2 x^2}.$$

Telle sera l'expression de $\theta^n x$ pour une valeur quelconque du nombre entier n. Elle a en effet, comme on voit, la forme d'une racine quelconque de l'équation $y = \psi x$.

Cela posé, soient $\theta^m x$ et $\theta^{m+n} x$ deux quantités de la série (134), égales entre elles, dont il existera toujours suivant la remarque plus haut. On aura donc:

$$\theta^{m+n} x = \theta^m x,$$

mais $\theta^{m+n} x$ est évidemment la même chose que $\theta^n(\theta^m x)$, donc en mettant x pour $\theta^m x$, il viendra:

136) $$\theta^n x = x.$$

Une équation de cette forme doit donc toujours avoir lieu quel que soit x. Si elle a lieu effectivement, il est clair que la série (134) n'aura que n termes différents, car, $\theta^{n-1} x$, passé, les termes se reproduiront dans le même ordre, puisque $\theta^{n+1} x = \theta x$, $\theta^{n+2} x = \theta^2 x$ etc. Si l'on suppose, ce qui est permis, que n, dans l'équation $\theta^n x = x$, a la valeur la plus petite possible pour la même valeur de e, il est clair également que les n quantités

137) $$x,\ \theta x,\ \theta^2 x, \ldots \theta^n x$$
seront nécessairement différentes entre elles. Car si l'on avait par exemple
$$\theta^m x = \theta^{m+\mu} x,$$
il en résulterait $\theta^\mu x = x$, ce qui est contre l'hypothèse, attendu que μ est moindre que n.

Il s'agit maintenant de satisfaire à l'équation
$$\theta^n x = x.$$
En y substituant l'expression de $\theta^n x$, donnée par la formule (135), il viendra:
$$x = \frac{x\Delta e_n + e_n \Delta x}{1 - c^2 e_n^2 x^2}.$$
Or il est impossible de satisfaire à cette équation pour une valeur quelconque de x, à moins qu'on n'ait séparement les deux équations:

138) $$e_n = 0,\ \Delta e_n = 1;$$
et réciproquement: si ces équations subsistent, il en sera de même de l'équation $\theta^n x = x$. Or je dis qu'il sera toujours possible de satisfaire à ces deux équations à la fois.

D'abord si n est impair, les deux quantités e_n et $\frac{\Delta e_n}{\Delta e}$ seront des fonctions rationnelles de e, comme nous l'avons vu chapitre I. § 4. Si donc on désigne par e une racine quelconque de l'équation

139) $$e_n = 0,$$
il suffit, pour satisfaire à l'équation $\Delta e_n = 1$, de déterminer le radical Δe de la manière que:

140) $$\Delta e = \frac{\Delta e}{\Delta e_n},$$
après avoir mis le second membre sous la forme d'une fonction rationnelle en e. Ce-ci se fait voir, en remarquant, que si $e_n = 0$, la quantité $\Delta e_n = \pm \sqrt{((1 - e^2{}_n) 1 - c^2 e^2{}_n))}$ ne pourra avoir que l'une des deux valeurs $+1, -1$.

Si au contraire n est un nombre pair, on a vu que Δe_n sera une fonction *rationnelle* de e, de la même sorte que $\frac{\Delta e_n}{1 - c^2 e_n^2}$. En la désignant par ε_n, on doit avoir en vertu des équations (138):

141) $$\varepsilon_n = 1.$$
Or je dis que si e est une racine quelconque de cette équation, on aura à la fois $e_n = 0$, $\Delta e_n = 1$. En effet ayant

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta e_n}{1-c^2 e_n^2} = \frac{\sqrt{(1-e_n^2)}}{\sqrt{(1-c^2 e_n^2)}} = 1.$$

on en tire en quarrant,

$$1 - e^2_n = 1 - c^2 e^2_n,$$

et cela donne:

$$e_n = 0,$$

car c^2 est différent de l'unité. Or ayant $e_n = 0$ et $\varepsilon_n = 1$, on aura évidemment $\Delta e_n = 1$; donc etc.

On pourra donc satisfaire à la fois aux deux équations:

$$e_n = 0, \ \Delta e_n = 1,$$

et on aura toujours un nombre n^2 de valeurs différentes et convenables de e, car en vertu des formules (51. 55) les équations $e_n = 0$, $\varepsilon_n = 1$ seront du degré n^2 en e.

Il s'agit maintenant de choisir les valeurs de e qui rendent toutes les n quantités x, $\theta x, \ldots \theta^{n-1} x$ différentes entre elles, car cela est une seconde condition à laquelle doit satisfaire e.

Or pour cela il suffit de rejeter toutes les valeurs de e qui pourraient donner $\theta^\mu x = x$, où μ est moindre que n. On pourra toujours supposer μ facteur de n. En effet soit k le plus grand commun diviseur de μ et n, on pourra trouver deux nombres entiers μ' et n' tels que:

$$\mu'\mu = n'n + k.$$

Or l'équation $\theta^\mu x = x$ donne:

$$\theta^{\mu'\mu} x = x,$$

donc:

$$\theta^{n'n+k} x = x = \theta^k \theta^{n'n} x;$$

mais en vertu de $\theta^n x = x$ on a encore

$$\theta^{n'n} x = x,$$

donc enfin:

$$\theta^k x = x;$$

donc, si $\theta^\mu x = x$, on aura encore: $\theta^k x = x$, où k est diviseur de n. Donc il suffit, de rejeter toutes les valeurs de e, qui pourraient satisfaire en même temps à ces deux équations:

$$e_\mu = 0, \ \Delta e_\mu = 1,$$

où μ est un facteur de n; et il faut nécessairement les rejeter toutes, car si l'on a $\theta^\mu x = x$, on a nécessairement $\theta^n x = x$.

Ainsi on trouvera aisément une équation en e, dont toutes les racines donneront des valeurs convenables de cette constante. Si n est un nombre pre-

mier impair, on a $\mu = 1$; donc la seule racine qu'il faut rejeter de celles de l'équation

$$e_n = 0,$$

est celle-ci:

$$e = 0.$$

On aura donc un nombre $n^2 - 1$ de valeurs convenables de e. Car l'équation $e_n = 0$ est du degré n^2.

Il y a une remarque essentielle à faire sur les quantités

$$x, \theta x, \theta^2 x, \ldots \theta^{n-1} x.$$

Savoir, on aura toujours *en même temps:*

$$142) \quad \theta^m x = \frac{x\Delta e_m + e_m \Delta x}{1 - c^2 x^2 e_m^2}, \quad \theta^{n-m} x = \frac{x\Delta e_m - e_m \Delta x}{1 - c^2 x^2 e_m^2}.$$

En effet, on a (43):

$$e_{n-m} = \frac{e_n \Delta e_m - e_m \Delta e_n}{1 - c^2 e_n^2 e_m^2};$$

mais

$$e_n = 0, \; \Delta e_n = 1,$$

donc:

$$e_{n-m} = - e_m.$$

On aura également (42)

$$e_n = \frac{e_m \Delta e_{n-m} + e_{n-m} \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 e_{n-m}^2} = 0,$$

donc à cause de

$$e_{n-m} = - e_m,$$

on aura:

$$\Delta e_{n-m} = \Delta e_m.$$

En substituant ces valeurs de e_{n-m}, Δe_{n-m} dans l'équation

$$\theta^{n-m} x = \frac{x\Delta e_{n-m} + e_{n-m} \Delta x}{1 - c^2 e_{n-m}^2 x^2},$$

on aura précisément la seconde des équations (142).

Si l'on multiplie entre elles les valeurs de $\theta^m x$ et $\theta^{n-m} x$, le produit sera rationnel, et on trouvera

$$143) \quad \theta^m x . \theta^{n-m} x = \frac{x^2 - e_m^2}{1 - c^2 e_m^2 x^2}.$$

On aura de la même sorte:

$$144) \quad \theta^m x + \theta^{n-m} x = \frac{2x\Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 x^2}.$$

Ces formules nous seront utiles dans la suite.

D'après ce qui précède, les n quantités

$$x, \theta x, \theta^2 x, \ldots \theta^{n-1} x$$

sont différentes entre elles et racines de l'équation $y = \psi x$. Le degré μ de cette équation est donc égal à n, s'il ne surpasse ce nombre. Nous verrons plus bas, qu'il suffira de considérer le cas, où $\mu = n$. On pourra même supposer n premier.

§ 5.

Trouver toutes les valeurs de y qui pourront répondre aux valeurs des racines, lorsqu'on en connaît une seule.

Pour simplifier la solution du problème général, voyons si plusieurs valeurs différentes de la fonction y et du module c' pourront répondre aux mêmes racines de l'équation $y = \psi x$. Rien n'est plus facile que de trouver les valeurs de y et c'. En effet soit $\psi z = \frac{p}{q}$ où p et q sont des fonctions entières de z sans diviseur commun. En désignant par

$$x, x', x'' \dots x^{(\mu-1)}$$

toutes les racines de l'équation

$$y = \psi x,$$

on aura $$p - qy = (a - by)(z - x)(z - x')(z - x'') \dots (z - x^{(\mu-1)}),$$

où a et b sont des constantes. Soit maintenant y' une autre valeur de y qui satisfait aux mêmes valeurs de $x, x', x'' \dots$, on aura en désignant par p' et q' les valeurs correspondantes des fonctions p et q:

$$p' - q'y' = (a' - b'y)(z - x)(z - x')(z - x'') \dots z - x^{(\mu-1)}$$

donc:

$$\frac{p - qy}{p' - q'y'} = \frac{a - by}{a' - b'y'}.$$

En attribuant à z une valeur constante, il est clair que cette équation donnera pour y' une expression de la forme:

145) $$y' = \frac{\alpha + \beta \cdot y}{\alpha' + \beta' \cdot y},$$

où α, β, α', β' sont des constantes. En désignant maintenant par c'' le module qui répond à y', on aura en même temps:

$$\frac{dy'}{\sqrt{[(1 - y'^2)(1 - c''^2 y'^2)]}} = \varepsilon' . \frac{dx}{\Delta x}, \quad \frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon . \frac{dx}{\Delta x},$$

donc:

146) $$\frac{dy'}{\sqrt{[(1 - y'^2)(1 - c''^2 y'^2)]}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} . \frac{dy}{\sqrt{[(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2)]}}.$$

En y substituant l'expression de y' en y, on aura les équations nécessaires pour trouver y', c'', ε'. Ce problème est précisément le même que celui du paragraphe 2. On voit donc, qu'une seule solution de l'équation

$$\frac{dy}{\Delta y} = \varepsilon \cdot \frac{dx}{\Delta x}$$

donnera sur le champ cinq autres qui, généralement, seront différentes entre elles. La fonction y aura toujours deux valeurs correspondantes au même module c', savoir y et $\frac{1}{c'y}$.

§ 6.

Solution complète du problème dans le cas $\mu = n$.

Supposons maintenant que l'équation $y = \psi x$ n'ait d'autres racines que celles-ci:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x, \ldots \theta^{n-1} x,$$

ce qui à lieu toujours si μ est un nombre premier, comme nous le verrons plus bas. On aura alors, si p et q signifient la même chose qu'au paragraphe précédent:

$$147)\quad p - qy = (a - by)(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^2 x) \ldots (z - \theta^{n-1} x).$$

En attribuant à z une valeur particulière, on aura une expression de y, dans laquelle tout est déterminé, excepté trois quantités constantes. Nous allons voir qu'on pourra toujours trouver ces quantités de sorte que l'équation différentielle proposée soit satisfaite. Pour cela considérons deux cas: n impair et n pair.

Cas I. Si n est un nombre impair.

Soit dans ce cas $n = 2\mu + 1$ Alors l'équation (147) donne, en attribuant à z la valeur particulière zéro:

$$a' - b'y = -(a - by) x . \theta x . \theta^2 x \ldots \theta^{2\mu} x,$$

et de là:

$$148)\qquad y = \frac{a' + a . x . \theta x . \theta^2 x \ldots \theta^{2\mu} x}{b' + b . x . \theta x . \theta^2 x \ldots \theta^{2\mu} x}.$$

Remarquant maintenant qu'en vertu de (143):

$$\theta^m x . \theta^{2\mu+1-m} x = \frac{x^2 - e_m^2}{1 - c^2 e_m^2 x^2},$$

il est clair que l'expression précédente de y sera une fonction rationnelle de x du degré $2\mu + 1$; donc, puisque cette fonction ne varie pas, en mettant pour x les $2\mu + 1$ valeurs

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x \ldots \theta^{2\mu} x,$$

ce qui est évident à cause de $\theta^{2\mu+1} x = x$, on conclura que l'équation (147) a lieu en mettant au lieu de y cette fonction et pour p et q les valeurs correspondantes en z. Cette équation pourra s'écrire comme il suit:

149) $p-qy=(a-by)(z-x)(z-\theta x)(z-\theta^{2\mu}x)(z-\theta^2 x)(z-\theta^{2\mu-1}x)\ldots$
$\ldots(z-\theta^{\mu}x)(z-\theta^{\mu+1}x).$

Cela posé, faisons:

$$x=1,\ -1,\ \frac{1}{c},\ -\frac{1}{c},$$

et désignons les valeurs correspondantes de y par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta.$$

Puisqu'on a pour ces valeurs de x, $\Delta x=0$, il suit en vertu des deux équations (142) du paragraphe 4:

$$\theta^m x=\theta^{2\mu+1-m}x=\frac{x\Delta e_m}{1-c^2x^2e_m^2},$$

d'où l'on voit que les facteurs du second membre de l'équation (149) seront égaux deux à deux, en faisant abstraction du premier facteur $z-x$. On a donc:

150) $$\begin{cases} p-q\alpha=(a-b\alpha)(1-z).\rho^2, \\ p-q\beta=(a-b\beta)(1+z).\rho'^2, \\ p-q\gamma=(a-b\gamma)(1-cz).\rho''^2, \\ p-q\delta=(a-b\delta)(1+cz).\rho'''^2, \end{cases}$$

où ρ, ρ', ρ'', ρ''' seront des fonctions entières de z du degré μ. Mais puisque

151) $$(q^2-p^2)(q^2-c'^2p^2)=r^2(1-z^2)(1-c^2z^2),$$

les équations précédentes font voir que les quatre constantes α, β, γ, δ égalent celles-ci:

$$+1,\ -1,\ +\frac{1}{c'},\ -\frac{1}{c'},$$

et si cette condition a lieu, les quatre équations (150) donneront évidemment une de la forme (151), et par suite on aura

152) $$\frac{dy}{\Delta' y}=\varepsilon.\frac{dx}{\Delta x},$$

en vertu de ce qu'on a vu dans le paragraphe 1 de ce chapitre.

Puisqu'il suffit de connaître une seule valeur de y, nous pourrons faire par exemple:

153) $$\alpha=1,\ \beta=-1,\ \gamma=\frac{1}{c'},\ \delta=-\frac{1}{c'}.$$

Cela posé, il reste à satisfaire à ces équations. Or si l'on fait pour un moment:

154) $$\varphi x=x.\theta x.\theta^2 x\ldots\theta^{2\mu}x=\frac{x(x^2-e^2)(x^2-e_2^2)\ldots(x^2-e_\mu^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2x^2)},$$

l'expression de y deviendra:

155) $$y=\frac{a'+a.\varphi x}{b'+b.\varphi x},$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\varphi(-x) = -\varphi x$, et faisant $x = 1, -1, \frac{1}{c'}, \frac{1}{c}$:

$$\alpha = \frac{a' + a.\varphi(1)}{b' + b.\varphi(1)},\ \beta = \frac{a' - a.\varphi(1)}{b' - b.\varphi(1)},\ \gamma = \frac{a' + a.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}{b' + b.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)},\ \delta = \frac{a' - a.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}{b' - b.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)},$$

donc en vertu des équations (153), on aura:

$$a' - b' + (a - b)\varphi(1) = 0,\ a' + b' - (a + b)\varphi(1) = 0,$$
$$a' - \frac{b'}{c'} + \left(a - \frac{b}{c'}\right)\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = 0,\ a' + \frac{b'}{c'} - \left(a + \frac{b}{c'}\right)\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = 0,$$

Il est impossible de satisfaire à ces équations à moins que l'une des quantités a', b' ne soit zéro. Faisons donc $a' = 0$, on aura en même temps $b = 0$. Donc deux des équation précédentes donneront:

$$\frac{b'}{a} = \varphi(1) = c'.\varphi\left(\frac{1}{c}\right),$$

d'où l'on tire la valeur de c', savoir:

$$c' = \frac{\varphi(1)}{\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}$$

La valeur de y deviendra:

$$y = \frac{a}{b'}.\varphi x = \frac{\varphi x}{\varphi(1)}.$$

Quant aux valeurs de $\varphi(1)$ et $\varphi\left(\frac{1}{c}\right)$, on aura en vertu de l'expression de φx:

$$\varphi(1) = \frac{1 - e^2}{1 - c^2 e^2}.\frac{1 - e_2^2}{1 - c^2 e_2^2}\cdots\frac{1 - e_\mu^2}{1 - c^2 e_\mu^2},$$
$$\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c^{2\mu+1}}.\frac{1 - c^2 e^2}{1 - e^2}.\frac{1 - c^2 e_2^2}{1 - e_2^2}\cdots\frac{1 - c^2 e_\mu^2}{1 - e_\mu^2},$$

donc:

$$\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c^{2\mu+1}.\varphi(1)}$$

et

$$c' = c^{2\mu+1}.(\varphi(1))^2,\ \varphi(1) = \frac{\sqrt{c'}}{c^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Enfin, pour avoir la valeur du coefficient ε, il suffit de faire $x = 0$, après avoir différentié l'expression de y. On aura:

$$\frac{dy}{dx} = \pm e^2.e_2^2.e_3^2\ldots e_\mu^2.\frac{1}{\varphi(1)}.$$

Mais comme on a

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon.\frac{\Delta' y}{\Delta x},$$

il en résulte, en faisant $x = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \pm \varepsilon,$$

donc ou pourra faire:

$$\varepsilon = e^2 . e_2^2 . e_3^2 \ldots e_\mu^2 . \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} .$$

En vertu de ce qui précède on pourra énoncer le théorème suivant:

Théorème X. "Soit e une racine quelconque de l'équation $e_{2\mu+1} = 0$, mais qui ne puisse être racine d'une autre équation de la même forme $e_{2m+1} = 0$, où $2m+1$ est diviseur de $2\mu+1$. Cela posé, si l'on détermine la fonction y, le module c', et le coefficient ε, en vertu des formules:

156)
$$\begin{cases} y = \dfrac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} . \dfrac{x(e^2-x^2)(e_2^2-x^2)(e_3^2-x^2)\ldots(e_\mu^2-x^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)(1-c^2e_3^2x^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2x^2)}, \\ c' = c^{2\mu+1} . \left(\dfrac{(1-e^2)(1-e_2^2)(1-e_3^2)\ldots(1-e_\mu^2)}{(1-c^2e^2)(1-c^2e_2^2)(1-c^2e_3^2)\ldots(1-c^2e_\mu^2)}\right)^2, \\ \varepsilon = \dfrac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} . e^2 . e_2^2 . e_3^2 \ldots e_\mu^2, \\ \text{on aura toujours:} \\ \dfrac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \pm \varepsilon . \dfrac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}, \end{cases}$$

en déterminant convenablement le signe du second membre.

Ayant trouvé de cette sorte un système de valeurs de y, c', ε, on en aura, d'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent, cinq autres à l'aide des formules du paragraphe 1. Il répond six systèmes de valeurs de y, c', ε à chaque valeur de e. On trouvera même douze valeurs de y, car à chaque valeur de c' répondent deux valeurs différentes de cette fonction. Nous reviendrons plus bas au problème de trouver le nombre total des solutions qui répondent à la même valeur de μ.

Pour donner un exemple des formules ci-dessus, soit $\mu = 1$. Puisque dans ce cas $2\mu + 1 = 3$ est un nombre premier, on pourra, en vertu de ce qu'on a vu plus haut, prendre pour e une racine quelconque de l'équation $e_3 = 0$, excepté la racine zéro. Cette équation, en vertu de la formule qui donne l'expression de x_3, est du huitième degré, savoir:

$$0 = 3 - 4(1 + c^2)e^2 + 6c^2e^4 - c^4e^8.$$

La quantité e étant une racine quelconque de cette équation, on aura:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \pm \varepsilon . \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

$$c' = c^3.\left(\frac{1-e^2}{1-c^2e^2}\right)^2,\quad e = c.\sqrt{\left(\frac{c}{c'}\right)}.e^2,\quad y = \frac{e\sqrt{c}}{\sqrt{c'}}.\frac{z(e^2-z^2)}{1-c^2e^2z^2}.$$

Puisque e^2 est exprimé en c par une équation du quatrième degré, le module c' le pourra être également. Cette équation est:

$$(c'-c)^2 = 4\sqrt{cc'}.(1-\sqrt{cc'})^2.$$

L'expression générale de y, donnée plus haut, est exprimée en forme des produits. On décomposera aisément cette fraction en fractions partielles. En effet, puisque les racines de l'équation

$$0 = \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}.z(z^2-e^2)(z^2-e_2^2)\dots(z^2-e_\mu^2)+y(1-c^2e^2z^2)\dots(1-c^2e_\mu^2z^2)$$

sont les $2\mu+1$ quantités suivantes

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x\dots\theta^{2\mu}x,$$

la somme de ces quantités sera égale au coefficient de $z^{2\mu}$, divisé par celui de $z^{2\mu+1}$ et pris avec le signe -1, donc:

$$x+\theta x+\theta^2 x+\dots+\theta^{2\mu}x = \frac{(-1)^{\mu+1}.c^{2\mu}.e^2.e_2^2\dots e_\mu^2}{c^{\mu+\frac{1}{2}}.c'^{-\frac{1}{2}}}.y;$$

donc, en vertu de l'équation

$$\theta^m x+\theta^{2\mu+1-m}x = \frac{2\Delta e_m.x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

on aura l'expression suivante de y:

157) $$y = \left(x+\frac{2\Delta e.x}{1-c^2e^2x^2}+\frac{2\Delta e_2.x}{1-c^2e_2^2x^2}+\dots+\frac{2\Delta e_\mu x}{1-c^2e_\mu^2x^2}\right).\frac{\sqrt{c}}{c^\mu\sqrt{c'}}.\frac{(-1)^{\mu+1}}{e^2.e_2^2\dots e_\mu^2}.$$

Cas II. Si n est un nombre pair.

Faisons $n=2\mu$. Puisqu'on a

$$\theta^m x = \frac{x\Delta e_m+e_m\Delta x}{1-c^2e_m^2x^2},\quad \theta^{2\mu-m}x = \frac{x\Delta e_m-e_m\Delta x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

on aura, en faisant $m=\mu$:

$$\theta^\mu x = \frac{x\Delta e_\mu+e_\mu\Delta x}{1-c^2e_\mu^2x^2} = \frac{x\Delta e_\mu-e_\mu\Delta x}{1-c^2e_\mu^2x^2}.$$

Cette égalité ne peut subsister à moins que e_μ n'ait une des deux valeurs: zéro ou l'infini. Cela donne lieu à considérer séparement ces deux cas:

A. **si $e_\mu = \frac{1}{0}$.**

On aura: $$\theta^\mu x = \pm\frac{1}{cx}.$$

En y substituant $\theta^m x$ au lieu de x, on aura:

$$\theta^{\mu+m}x = \pm\frac{1}{c\theta^m x}.$$

Les racines de l'équation $y = \psi x$ deviendront donc:

$$x, \pm\frac{1}{cx}, \theta x, \theta^2 x, \ldots \theta^{\mu-1}x, \theta^{\mu+1}x, \theta^{\mu+2}x, \ldots \theta^{2\mu-1}x,$$

par conséquent on aura:

158) $p - qy = (a - by)(z - x)\left(z \mp \frac{1}{cx}\right)(z - \theta x)(z - \theta^{2\mu-1}x)\ldots(z - \theta^{\mu-1}x)(z - \theta^{\mu+1}x)$.

En désignant par a' et b' les coefficiens de $z^{2\mu-1}$ dans les deux fonctions entières p et q, on aura:

$$a' - b'y = -(a - by).\left(x \pm \frac{1}{cx} + \theta x + \theta^{2\mu-1}x + \ldots + \theta^{\mu-1}x + \theta^{\mu+1}x\right)$$

$$= (by - a)\left(x \pm \frac{1}{cx} + \frac{2\Delta e x}{1 - c^2e^2x^2} + \frac{2\Delta e_2 x}{1 - c^2e_2^2x^2} + \ldots + \frac{2\Delta e_{\mu-1}x}{1 - c^2e_{\mu-1}^2x^2}\right).$$

L'expression qu'on en tire pour y sera évidemment une fonction rationnelle de x du degré 2μ, et puisqu'elle reste invariable, en mettant pour x les 2μ quantités*)

$$x, \theta x, \theta^2 x, \ldots \theta^{2\mu-1}x,$$

l'équation (158) aura lieu en mettant pour y cette valeur et pour p et q les valeurs correspondantes en z.

Nous allons voir qu'on aura une valeur convenable de y en faisant

$$a = b' = 0.$$

Cela donne

$$y = \frac{a'}{b}\cdot\frac{1}{x \pm \frac{1}{cx} + \frac{2\Delta e . x}{1 - c^2e^2x^2} + \ldots + \frac{2\Delta e_{\mu-1} . x}{1 - c^2e_{\mu-1}^2x^2}},$$

expression qui est évidemment de la forme:

159) $y = A . \frac{x(1 - c^2e^2x^2)(1 - c^2e_2^2x^2)\ldots(1 - c^2e_{\mu-1}^2x^2)}{1 + a_1x^2 + a_2x^4 + \ldots + a_\mu . x^{2\mu}} = A.\varphi x.$

Pour trouver la valeur de A, remarquons que si l'on fait $x = 1$, y doit avoir une des valeurs: ± 1, $\pm\frac{1}{c}$. Soit par exemple $y = 1$, pour $x = 1$, on aura:

160 $$A = \frac{1}{\varphi(1)}.$$

Cela posé, faisons dans l'équation (158): $x = 1$. En remarquant que $a = 0$, on aura

$$q - p = (1 - z)(1 \mp cz).\rho^2,$$

*) On a

$$y = \frac{a' + a(x + \theta x + \theta^2 x \ldots + \theta^{2\mu-1}x)}{b' + b(x + \theta x + \theta^2 x \ldots + \theta^{2\mu-1}x)} \text{ et } \theta^{2\mu}x = x.$$

où ϱ est une fonction entière de z, car pour $x=1$ on aura:

$$\theta^m x = \theta^{2\mu-m} x = \frac{\Delta e_m}{1-c^2 e_m^2}.$$

En changeant le signe de z dans l'équation précédente, on aura, en remarquant que q est une fonction paire et p une fonction impaire:

$$q+p=(1+z)(1\pm cz).\varrho'^2.$$

Cela donne:

$$q^2-p^2=(1-z^2)(1-c^2z^2)(\varrho\varrho')^2.$$

Maintenant, puisque

$$161)\qquad (q^2-p^2)(q^2-c'^2p^2)=(1-z^2)(1-c^2z^2)r^2,$$

cela fait voir que la fonction $q^2-c'^2p^2$ doit être un carré parfait. Or on pourra toujours déterminer c' de la manière que cette condition soit remplie. Faisons dans l'équation (158)

$$x=\frac{1}{\sqrt{\pm c}},$$

on aura:

$$\theta^{\mu+m}x=\theta^m(\theta^\mu x)=\theta^m\left(\pm\frac{1}{cx}\right)=\theta^m\left(\frac{1}{\sqrt{\pm c}}\right),$$

donc:

$$\theta^{\mu+m}x=\theta^m x.$$

Si donc on désigne par α la valeur de y qui réponde à $x=\frac{1}{\sqrt{\pm c}}$, les racines de l'équation

$$p-\alpha q=0,$$

c'est-à-dire les facteurs de $p-\alpha q$, seront égaux entre eux deux à deux; donc $p-\alpha q$ sera un carré parfait. En changeant le signe de z, on aura $p+\alpha q$, qui par conséquent sera également un carré; donc en multipliant, on aura:

$$p^2-\alpha^2q^2=t^2,$$

où t est une fonction entière de z. En faisant donc

$$c'=\frac{1}{\alpha},$$

l'équation (161) aura lieu, et par suite on aura:

$$\frac{dv}{\Delta' v}=\varepsilon.\frac{dz}{\Delta z},\quad \text{où } \frac{p}{q}=v,$$

c'est-à-dire, en changeant z en x:

$$\frac{dy}{\Delta' y}=\varepsilon.\frac{dx}{\Delta x}.$$

Pour déterminer le coefficient ε, on aura d'abord, en vertu de la dernière équation:

$$\varepsilon = \frac{dy}{dx}, \text{ pour } x = 0.$$

Mais l'expression de y donnera:

$$\frac{dy}{dx} = A = \frac{1}{\varphi(1)},$$

donc:

$$\varepsilon = \frac{1}{\varphi(1)}.$$

Le numérateur de la fraction qui exprime la valeur de y sera décomposé en facteurs; savoir si l'on fait $y = \frac{p'}{q'}$, on aura:

$$p' = \frac{1}{\varphi(1)} . x(1 - c^2 e^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \;..(1 - c^2 e_{\mu-1}^2 x^2).$$

On pourra facilement décomposer de la même manière le dénominateur q', comme on va le voir.

En divisant les membres de la formule (147) par y, il viendra à cause de $a = 0$:

$$\frac{p}{y} - q = - b(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^2 x) \ldots (z - \theta^{2\mu-1} x).$$

Cela posé, soit δ une valeur de x, qui rend y infini, c'est-à-dire une des racines de l'équation $q' = 0$. On aura

$$q = b(z - \delta)(z - \theta\delta)(z - \theta^2\delta) \ldots (z - \theta^{2\mu-1}\delta).$$

Il suffit donc de connaître une valeur de δ. Or une telle valeur est $\frac{1}{\sqrt{(\pm c)}}$

En effet puisqu'on doit avoir $y = \frac{1}{0}$, et remarquant que

$$y = \frac{a'}{b} \cdot \frac{1}{x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{2\mu-1} x},$$

on aura

$$r = x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{2\mu-1} x = 0.$$

Soit pour une valeur quelconque de x:

$$p_m = \theta^m x + \theta^{2\mu-m} x + \theta^{\mu+m} x + \theta^{\mu-m} x,$$

on aura évidemment, en remarquant que $\theta^{2\mu} x = x$:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{2\mu-1} = 4 . r.$$

Or je dis que si l'on fait

$$x = \frac{1}{\sqrt{(\mp c)}},$$

on aura:
$$p_m = 0,$$

pour une valeur quelconque de m. En effet on a d'abord:

$$\theta^m . x + \theta^{2\mu-m} x = \frac{2x . \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 x^2},$$

donc en mettant $\theta^\mu x$ au lieu de x, et remarquant que $\theta^\mu x = \pm \frac{1}{cx}$:

$$\theta^{m+\mu}x + \theta^{2\mu-m}x = \frac{\pm 2.\Delta e_m}{cx(1-c^2e_m^2x^{-2})}.$$

En faisant maintenant

$$x = \frac{1}{\sqrt{(\mp c)}},$$

on aura:

$$\theta^m x + \theta^{2\mu-m}x = \frac{2\Delta e_m}{\sqrt{(\mp c)}.(1 \pm c.e_m^2)} = -(\theta^{m+\mu}x + \theta^{2\mu-m}x),$$

donc en effet:

$$r_m = 0.$$

On pourra donc faire

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{(\mp c)}}.$$

En remarquant que $q' = 1$, pour $x = 0$, on aura, en mettant dans l'expression de q, x au lieu de z;

$$q' = \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)\left(1 - \frac{x}{\theta\delta}\right)\left(1 - \frac{x}{\theta^2\delta}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\theta^{2\mu-1}\delta}\right).$$

D'après ce qui précède on pourra énoncer ce théorème:

Théorème XI. "Soit e une racine quelconque de l'équation $e_\mu = \frac{1}{0}$, mais qui ne satisfait pas en même temps à deux équations de la forme $e_m = 0$, $\Delta e_m = 1$, où m est facteur de 2μ. Cela posé, si l'on détermine les trois quantités y, c', ε en vertu des formules:

$$162)\left\{\begin{array}{l} \pm \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{1}{y} = x \pm \frac{1}{cx} + \frac{2\Delta e.x}{1-c^2e^2x_2} + \frac{2\Delta e_2.x}{1-c^2e_2^2x^2} + \cdots + \frac{2\Delta e_{\mu-1}.x}{1-c^2e_{\mu-1}^2x^2} \\ \pm \varepsilon = c\left(1 \pm \frac{1}{c} + \frac{2\Delta e}{1-c^2e^2} + \frac{2\Delta e_2}{1-c^2e_2^2} + \cdots + \frac{2\Delta e_{\mu-1}}{1-c^2e_{\mu-1}^2}\right) \\ \text{on aura toujours:} \\ \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \frac{\varepsilon.dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}. \end{array}\right.$$

Le cas le plus simple de cette formule est celui où $\mu = 1$. On aura:

$$163)\left\{\begin{array}{l} \varepsilon = -c\left(1 \pm \frac{1}{c}\right) = 1 \pm c, \\ y = (1 \pm c)\frac{x}{1 \pm cx^2}, \quad c' = \frac{2\sqrt{\pm c}}{1 \pm c}, \\ \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = (1 \pm c).\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}. \end{array}\right.$$

Après avoir déterminé en vertu du théorème précèdent un système de valeurs pour y, c', ε, on aura cinq autres solutions à l'aide des formules du paragraphe 2 de ce chapitre.

B. Si $e_\mu = 0$.

Si $e_\mu = 0$, le radical Δe_μ ne pourra avoir que l'une des deux valeurs $+1$ ou -1; mais il faut ici supposer $\Delta e_\mu = -1$, car si l'on avait en même temps $e_\mu = 0$, $\Delta e_\mu = 1$, il en résulterait $\theta^\mu x = x$, ce qui n'a pas lieu. Mais

$$\theta^\mu x = \frac{x\Delta e_\mu + e_\mu \Delta x}{1 - c^2 e_\mu^2 x^2};$$

cela donne

$$\theta^\mu x = -x,$$

et, en mettant $\theta^m x$ au lieu de x:

$$\theta^{\mu+m} x = -\theta^m x.$$

Les racines de l'équation $y = \psi x$ seront égales dans ce cas deux à deux, mais de signe contraire, et par conséquent ψx sera une fonction paire de x. En faisant

$$\psi z = \frac{p}{q},$$

on aura:

164) $$p - qy = (a - by)(z^2 - x^2)(z^2 - (\theta x)^2)(z^2 - (\theta^2 x)^2) \ldots (z^2 - (\theta^{\mu-1} x)^2).$$

Si l'on fait $z = 0$, et qu'on désigne les valeurs correspondantes de p et q par a' et b', on aura:

$$a' - b'y = \pm (a - by)(x \,.\, \theta x \,.\, \theta^2 x \ldots \theta^{\mu-1} x)^2.$$

Cela donne pour y une expression rationnelle du degré 2μ. Comme dans les deux premiers cas on démontrera aisément qu'il sera toujours possible de déterminer les constantes a, b, a', b' de la sorte que l'équation:

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \,.\, \frac{dx}{\Delta x}$$

sera satisfaite, en attribuant au module c' et au coefficient ε des valeurs convenables. Je vais considérer seulement le cas le plus simple, où $\mu = 1$. On aura dans ce cas

$$a' - b'y = (-a + by)x^2$$

et par suite:

$$y = \frac{a' + ax^2}{b' + bx^2}.$$

En mettant cette valeur dans l'équation:

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \,.\, \frac{dx}{\Delta x},$$

on trouvera facilement une solution, savoir:

165) $$y = \frac{1 + cx^2}{1 - cx^2}, \quad c' = \frac{1 - c}{1 + c}, \quad \varepsilon = (1 + c)\sqrt{-1}.$$

Connaissant ainsi une solution, on en déduira, en vertu des formules du § 2, les cinq autres, de sorte que l'équation

$$\frac{dy}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{dx}{\Delta x}$$

pourra être satisfaite des six manières suivantes:

$$166) \qquad c' = \frac{1 \pm c}{1 \mp c}, \quad \frac{1 \pm \sqrt{(1-c^2)}}{1 \mp \sqrt{(1-c^2)}}, \quad \frac{c \pm \sqrt{(c^2-1)}}{c \mp \sqrt{(c^2-1)}}.$$

§ 7.

Réduction du problème général au cas où le degré de la fonction rationnelle y est un nombre premier.

Soit maintenant $y = \psi x$ une fonction rationnelle quelconque qui satisfait à l'équation différentielle:

$$\frac{dy}{\Delta y} = \varepsilon \cdot \frac{dx}{\Delta x}.$$

Comme on a vu dans le paragraphe 3, l'équation

$$y = \psi x$$

aura toujours n racines de la forme:

$$167) \qquad x, \ \theta x, \ \theta^2 x, \ldots \theta^{n-1}, \text{ où } \theta^n x = x.$$

Cela posé, désignons par x' une nouvelle racine, différente de celles-ci, en sorte que:

$$\psi x' = \psi x = y.$$

On a

$$\psi(\theta^m x) = \psi x,$$

donc aussi

$$\psi(\theta^m x') = \psi x' = y.$$

Il suit de là que les n quantités

$$168) \qquad x', \ \theta x', \ \theta^2 x', \ldots \theta^{n-1} x'$$

qui sont différentes entre elles, seront racines de l'équation dont il sagit. Or toutes ces n racines seront différentes des racines (167). En effet si l'on avait $\theta^m x' = \theta^\mu x$, il en résulterait:

$$\theta^{n-m} \theta^m x' = \theta^{n-m+\mu} x,$$

c'est-à-dire:

$$x' = \theta^{n-m+\mu} x,$$

ce qui est contre l'hypothèse. Le degré μ de l'équation $y = \psi x$ est donc égal à $2n$, ou plus grand que ce nombre. Dans le dernier cas, si l'on désigne par x'' une racine différente des $2n$ racines précédentes, on aura en même temps celles-ci:

$$x'', \theta x'', \theta^2 x'' \dots \theta^{n-1} x'',$$

qui seront différentes entre elles et des racines (167. 168). Donc μ sera égal à $3n$ ou plus grand que ce nombre. En continuant jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les racines, on voit que μ doit être un multiple de n, et si l'on fait en conséquence:

$$\mu = m.n,$$

les μ racines se rangeront en m groupes, de n termes chacun, savoir:

$$169)\quad \begin{cases} x, \ \theta x, \ \theta^2 x \dots \theta^{n-1} x, \\ x', \ \theta x', \ \theta^2 x' \dots \theta^{n-1} x', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{(m-1)}, \ \theta x^{(m-1)}, \ \theta^2 x^{(m-1)} \dots \theta^{n-1} x^{(m-1)}. \end{cases}$$

Cela posé, soit

$$\psi z = \frac{p}{q},$$

où p et q sont des fonctions entières de z, sans diviseur commun. On aura:

$$\begin{aligned} 170)\quad p - qy = (a - by).(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^2 x) \dots (z - \theta^{n-1} x) \\ \times (z - x')(z - \theta x')(z - \theta^2 x') \dots (z - \theta^{n-1} x') \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \times (z - x^{(m-1)})(z - \theta x^{(m-1)})(z - \theta^2 x^{(m-1)}) \dots (z - \theta^{n-1} x^{(m-1)}), \end{aligned}$$

et d'après ce qui a été exposé dans le paragraphe précédent, on pourra trouver une fonction rationnelle: $y_1 = \psi_1(x)$, telle que les racines de l'équation

$$y_1 = \psi_1 x$$

soient égales à ces n quantités:

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{n-1} x,$$

et que y_1 satisfasse a une équation différentielle de la forme:

$$171)\quad \frac{dy_1}{\sqrt{[(1 - y_1^2)(1 - c_1^2 y_1^2)]}} = \varepsilon_1 . \frac{dx}{\sqrt{[(1 - x^2)(1 - c^2 x^2)]}}.$$

Faisons

$$\psi_1 z = \frac{p'}{q'},$$

où p' et q' sont des fonctions entières du degré n. On aura:

$$172)\quad p' - q' y_1 = (a' - b' y_1)(z - x)(z - \theta x) \dots (z - \theta^{n-1} x),$$

où a' et b' sont des constantes.

En y mettant au lieu de x successivement les m valeurs:

$$x, x', x'', \dots x^{(m-1)}$$

et puis multipliant entre elles les équations qui en résultent, on trouvera, en ayant égard à l'équation (170):

$$173)\qquad \frac{p-qy}{a-by}=\frac{p'-q'y_1}{a'-b'y_1}\cdot\frac{p'-q'y_2}{a'-b'y_2}\cdots\frac{p'-q'y_m}{a'-b'y_m},$$

où

$$y_2,\ y_3,\ldots y_m$$

sont les valeurs de la fonction y_1, qui répondent aux valeurs

$$x',\ x'',\ldots x^{(m-1)}$$

de x.

Puis, attribuant à x deux valeurs particulières α, β, telles que

$$\psi\alpha=0,\ \psi\beta=\tfrac{1}{0},$$

et désignant par

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\alpha_m,\ \beta_1,\ \beta_2,\ldots\beta_m$$

les valeurs de $y_1, y_2, \ldots y_m$, respectivement correspondantes aux valeurs α et β de x, l'équation ci-dessus donnera:

$$174)\quad \begin{cases} p=A'(p'-\alpha_1.q')(p'-\alpha_2 q')\ldots(p'-\alpha_m.q'), \\ q=A''(p'-\beta_1.q')(p'-\beta_2 q')\ldots(p'-\beta_m.q'), \end{cases}$$

où A' et A'' sont deux constantes. En divisant p par q, on voit que $\frac{p}{q}=\psi z$ sera fonction rationnelle de $\frac{p'}{q'}=\psi_1 z$. En mettant x au lieu de z, on aura

$$\frac{p}{q}=y,\quad \frac{p'}{q'}=y_1,$$

donc:

$$175)\qquad y=A,\frac{(y_1-\alpha_1)(y_1-\alpha_2)(y_1-\alpha_3)\ldots(y_1-\alpha_m)}{(y_1-\beta_1)(y_1-\beta_2)(y_1-\beta_3)\ldots(y_1-\beta_m)},$$

où $A=\frac{A'}{A''}$ est constant.

On voit donc que y pourra être exprimé par une fonction rationnelle de y_1 du degré m.

En combinant maintenant l'équation (171) avec celle-ci:

$$\frac{dy}{\Delta' y}=\varepsilon.\frac{dx}{\Delta x}$$

qui doit avoir lieu, on aura:

$$176)\qquad \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\cdot\frac{dy_1}{\sqrt{[(1-y^2_1)(1-c^2_1 y^2_1)]}};$$

donc la fonction y, rationnelle en y_1 et du degré m, doit satisfaire à cette équation. Réciproquement, si cette équation a lieu, l'équation

$$\frac{dy}{\Delta' y}=\varepsilon.\frac{dx}{\Delta x}$$

subsistera également, car la fonction y_1 est déterminée en x de la manière à satisfaire à la formule (171).. Ainsi le problème général est réduit à satisfaire de la manrièe la plus générale à l'équation (176). Or ce problème est précisément le même que celui que nous traitons actuellement; seulement le degré de la fonction y en y_1 sera m, au lieu que y, comme fonction de x, est du degré $m.n$, qui est plus grand que m. On pourra donc appliquer à l'équation (176) le même procédé dont on s'est servi pour l'équation $\frac{dy}{\Delta y} = \varepsilon . \frac{dx}{\Delta x}$, et il est évident qu'on parviendra ainsi à l'expression générale de y, car les degrés des fonctions successives vont toujours en décroissant.

Supposons maintenant que le degré μ de la fonction y en x est un nombre premier. Puisque $\mu = m.n$, on a nécessairement $m = 1$, $\mu = n$. Par suite:

$$y = A . \frac{y_1 - \alpha_1}{y_1 - \beta_1}.$$

On connait l'expression de y_1 en x par les formules du paragraphe précédent. En substituant l'expression de y en y_1 dans l'équation (176), on trouvera à l'aide des formules du paragraphe 2 toutes les solutions possibles.

En vertu de ce qui précède on pourra donc énoncer le théorème suivant:

Théorème XII. Soit y une fonction rationnelle de x d'un degré quelconque μ, qui satisfait à l'équation différentielle:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \varepsilon . \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}.$$

On pourra toujours décomposer μ en deux facteurs n et m, dont l'un n est un nombre premier, tels qu'on ait:

$$\frac{dy_1}{\sqrt{[(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)[}} = \varepsilon . \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$$

et

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} . \frac{dy_1}{\sqrt{[(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)]}},$$

où y est une fonction rationnelle de y_1 du degré m, et y_1 une fonction rationnelle de x du degré n.

Si donc on désigne par $n, n_1, n_2, \ldots n_\nu$ des nombres premiers dont le produit est μ, et qu'on fait, pour abréger:

$$\Delta(x, c) = \sqrt{((1-x^2)(1-c^2x^2))},$$

on pourra faire:

$$\frac{dy}{\Delta(y, c')} = \varepsilon_\nu . \frac{dy_\nu}{\Delta(y_\nu, c_\nu)} = \varepsilon_{\nu-1} . \frac{dy_{\nu-1}}{\Delta(y_{\nu-1}, c_{\nu-1})} = \ldots = \varepsilon_1 . \frac{dy_1}{\Delta(y_1, c_1)} = \varepsilon . \frac{dx}{\Delta x},$$

où y_1 est une fonction rationnelle de x du degré n,
- y_2 - - - - - - - - y_1 - - n_1,
- y_3 - - - - - - - - y_2 - - n_2.
. . . .
- y_ν - - - - - - - - $y_{\nu-1}$ - - $n_{\nu-1}$,
- y - - - - - - - - y_ν - - n_ν.

En vertu de ce théorème la solution du problème général sera donc ramenée au cas où le degré de la fonction y est un nombre premier. On trouvera toutes les solutions qui répondent à ce cas par les formules du paragraphe précédent, et le problème que nous nous sommes proposé au commencement de ce chapitre pourra être regardé comme résolu.

§ 8.

Sur la forme de la fonction y.

Désignons par $x, x', x'' \dots x^{(\mu-1)}$ les racines de l'équation

$$y = \psi x.$$

Si l'on fait $\psi z = \frac{p}{q}$, où p et q sont des fonctions entières de z, on aura:

$$177)\quad p - qy = (a - by)(z - x)(z - x')(z - x'') \dots (z - x^{(\mu-1)}),$$

où a et b sont des constantes. Cela posé, soit α une racine de l'équation $y = 0$, on aura en faisant $x = \alpha$:

$$178)\quad p = a(z - \alpha)(z - \alpha')(z - \alpha'') \dots (z - \alpha^{(\mu-1)}).$$

Soit également β une racine de l'équation $y = \frac{1}{0}$. Cela donnera, en faisant $x = \beta$, et après avoir divisé les deux membres de l'équation (177) par y:

$$179)\quad q = b(z - \beta)(z - \beta')(z - \beta'') \dots (z - \beta^{(\mu-1)}).$$

Ces valeurs de p et q donneront, en mettant x au lieu de z:

$$180)\quad y = A\,\frac{(x-\alpha)(x-\alpha')\dots(x-\alpha^{(\mu-1)})}{(x-\beta)(x-\beta')\dots(x-\beta^{(\mu-1)})},$$

où A est un coefficient constant, qu'on trouvera en remarquant que si l'on fait $x = 1$, y doit avoir une des valeurs $\pm 1, \pm \frac{1}{c'}$.

Mais il y a deux cas: savoir, il pourra arriver que l'une ou l'autre des deux quantités a et b soit égale à zéro, et dans ce cas l'une des racines des équations $y = 0$, $y = \frac{1}{0}$ sera zéro ou infini.

Cas I. Si $b = 0$.

On aura dans ce cas

$$181)\quad p - qy = a(z-x)(z-x')\dots(z-x^{(\mu-1)}),$$

et p sera du degré μ, et q seulement du degré $\mu-1$. En égalant le coefficient de $z^{\mu-1}$ dans les deux membres, on aura:

$$182)\quad a'-b'y = -a(x+x'+x''+\dots+x^{(\mu-1)}),$$

où a' et b' sont des constantes. Maintenant si

$$x' = \frac{x\Delta e + e\Delta x}{1-c^2e^2x^2}$$

est une racine de $y=\psi x$, la quantité

$$\frac{x\Delta e - e\Delta x}{1-c^2e^2x^2}$$

le sera également; donc si ces deux quantités sont différentes entre elles pour toutes les valeurs de e, μ sera un nombre impair, et en faisant $\mu=2n+1$, on aura:

$$183)\quad a'-b'y = -a\left(x+\frac{2x\Delta e_1}{1-c^2e_1^2x^2}+\frac{2x\Delta e_2}{1-c^2e_2^2x^2}+\dots+\frac{2x\Delta e_n}{1-c^2e_n^2x^2}\right).$$

Maintenant si l'on fait $x=\pm 1$, $\pm\frac{1}{c}$, on aura $y=\pm 1$, $y=\pm\frac{1}{c'}$, d'où il est facile de conclure que a' sera égal à zéro. Donc y sera une fonction impaire de x, et de la forme:

$$184)\quad y = A.x.\left(1+\frac{2\Delta e_1}{1-c^2e_1^2x^2}+\dots+\frac{2\Delta e_n}{1-c^2e_n^2x^2}\right).$$

Cela fait voir que

$$q=(1-c^2e_1^2z^2)\dots(1-c^2e_n^2z^2).$$

Pour avoir p, il suffit de faire dans l'équation (181) $x=0$, et cela donne

$$p = az(z^2-e_1^2)\dots(z^2-e_n^2),$$

donc on aura:

$$185)\quad y = a.\frac{x(e_1^2-x^2)(e_2^2-x^2)\dots(e_n^2-x^2)}{(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\dots(1-c^2e_n^2x^2)}.$$

Telle est donc la forme de la fonction y dans le cas où le degré de son numérateur est impair et plus grand que celui du dénominateur.

Si pour quelque valeur de e les deux quantités

$$\frac{x\Delta e + e\Delta x}{1-c^2e^2\Delta x},\quad \frac{x\Delta e - e\Delta x}{1-c^2e^2x^2}$$

étaient égales, on aurait:

$$e=0,\ \text{où}\ e=\tfrac{1}{0}.$$

Soit d'abord $e=\frac{1}{0}$, on aura $x'=\pm\frac{1}{cx}$, et par suite le second membre de

l'équation (182) serait une fonction impaire de x, dont le degré serait un nombre pair. On trouve seulement que cela donne $a'=0$; donc en faisant $\mu=2n$:

$$186)\qquad y=A.\left(x\pm\frac{1}{cx}+\frac{2x\Delta e_1}{1-c^2e_1^2x^2}+\ldots+\frac{2x\Delta e_{n-1}}{1-c^2e_{n-1}^2x^2}\right),$$

et par suite y sera exprimé en factorielle comme il suit:

$$187)\qquad y=\frac{a(1-\delta_1^2x^2)(1-\delta_2^2x^2)\ldots(1-\delta_n^2x^2)}{x(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_{n-1}^2x^2)},$$

Si au contraire $e=0$, on aura en même temps:

$$x'=-x.$$

Donc dans ce cas y sera une fonction paire de x. Mais le degré du numérateur doit être le même que celui du dénominateur, comme il est facile de voir; donc l'expression (187) appartient à y toutes les fois que le degré du numérateur est un nombre pair et en même temps plus grand que celui du dénominateur.

Cas II. Si $a=0$.

On aura:

$$p-qy=\pm by(x-z)(x'-z)\ldots(x^{(\mu-1)}-z).$$

En raisonnant comme ci-dessus on trouvera aisément que dans le cas où μ est un nombre impair, y sera une fonction impaire de x de la forme:

$$188)\qquad y=a.\frac{(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_n^2x^2)}{x(e_1^2-x^2)(e_2^2-x^2)\ldots(e_n^2-x^2)}.$$

Si μ est pair, y sera une fonction impaire de x de la forme:

$$189)\qquad y=a.\frac{x(1-c^2e_1^2x^2)\ldots(1-c^2e_{n-1}^2x^2)}{(1-\delta_1^2x^2)\ldots(1-\delta_n^2x^2)}.$$

§ 9.

De la fonction $x_{2\mu+1}$.

Nous avons vu chapitre I. paragraphe 4. qu'à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\Delta y}=(2\mu+1).\frac{dx}{\Delta x}$$

on peut satisfaire, en mettant au lieu de y une fonction impaire de x du degré $(2\mu+1)^2$, qui s'évanouit avec x. En la désignant comme nous l'avons fait à l'endroit cité par $x_{2\mu+1}$, et faisant pour abréger $(2\mu+1)^2-1=2n$, cette fonction, en vertu de ce que nous venons de voir dans le paragraphe précédent, doit avoir la forme suivante:

$$190)\quad x_{2\mu+1} = a.\frac{x(e_1^2-x^2)(e_2^2-x^2)\dots(e_n^2-x^2)}{(1-c^2e_1^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\dots(1-c^2e_n^2x^2)},$$

et on aura en même temps:

$$191)\quad x_{2\mu+1} = A.\left(x + \frac{2\Delta e_1 . x}{1-c^2e_1^2x^2} + \frac{2\Delta e_2 . x}{1-c^2e_2^2x^2} + \dots + \frac{2\Delta e_n . x}{1-c^2e_n^2x^2}\right).$$

Pour déterminer les coefficiens a et A, faisons $x = \frac{1}{0}$. On trouvera:

$$A, c^{2n}.e_1^2.e_2^2\dots e_n^2 = a.$$

Si l'on suppose x infiniment petit, la première formule donne:

$$x_{2\mu+1} = a.e_1^2.e_2^2\dots e_n^2.x,$$

mais l'équation différentielle donne dans ce cas:

$$x_{2\mu+1} = (2\mu+1)x,$$

par suite:

$$a.e_1^2.e_2^2\dots e_n^2 = 2\mu+1.$$

Si l'on suppose x infiniment grand, la seconde expression de $x_{2\mu+1}$ donne $x_{2\mu+1} = A.x$, mais dans le même cas l'équation différentielle donne:

$$\frac{dx_{2\mu+1}}{c.x_{2\mu+1}^2} = \frac{dx}{cAx^2} = (2\mu+1).\frac{dx}{c.x^2},$$

donc:

$$192)\qquad A = \frac{1}{2\mu+1}.$$

Connaissant A, on aura:

$$193)\qquad e_1^2.e_2^2\dots e_n^2 = \frac{2\mu+1}{c^n},\quad a = c^n = c^{2\mu^2+2\mu}.$$

Les quantités e_1, e_2, … e_n ont entre-elles des relations remarquables que nous allons développer.

Considérons l'équation

$$x_{2\mu+1} = y.$$

Les racines de cette équation seront les $(2\mu+1)^2$ quantités suivantes:

$$x,\ \frac{x\Delta e_1 \pm e_1\Delta x}{1-c^2e_1^2x^2},\ \frac{x\Delta e_2 \pm e_2\Delta x}{1-c^2e_2^2x^2},\dots\frac{x\Delta e_n \pm e_n\Delta x}{1-c^2e_n^2x^2}.$$

Soit $\theta x = \frac{x\Delta e + e\Delta x}{1-c^2e^2x^2}$ une quelconque de ces racines, les $2\mu+1$ quantités:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x\dots\theta^{2\mu}x$$

seront encore des racines et en même temps différentes entre elles, en prenant pour e une quantité qui n'est pas racine d'une équation

$$x_{2m+1} = 0,$$

où $2m+1$ est facteur de $2\mu+1$. Soit

$$\theta_1 x = \frac{x\Delta e' + e'\Delta x}{1 - c^2 e'^2 x^2}$$

une autre racine, on aura encore les racines suivantes:

$$\theta_1 x,\ \theta_1^2 x, \ldots \theta_1^{2\mu} x,$$

qui seront différentes entre elles.

Cela posé, faisons

$$x_{2\mu+1} = \psi x;$$

on aura en général:

$$\psi(\theta^m x) = \psi(\theta^k{}_1 x),$$

quels que soient les nombres entiers m et k. En mettant $\theta^m x$ au lieu de x, on aura:

$$\psi(\theta^k{}_1\theta^m x) = \psi(\theta^{2m} x) = x_{2\mu+1};$$

donc toute quantité de la forme

$$\theta^k{}_1\theta^m x$$

sera racine de l'équation $y = \psi x$. Je dis maintenant que si l'on attribue à k et m toutes les valeurs entières possibles, moindres que $2\mu + 1$, les valeurs qui en résultent pour la fonction $\theta^k{}_1\theta^m x$, seront toutes différentes entre elles. En effet, si l'on avait

$$\theta^k{}_1\theta^m x = \theta^{k'}{}_1\theta^{m'} x,$$

il en résulterait, en mettant $\theta^{2\mu+1-m'} x$ au lieu de x, et remarquant que $\theta^{2\mu+1} x = x$:

$$\theta^k{}_1\theta^{n'} x = \theta^{k'}{}_1 x,$$

où $n' = m + 2\mu + 1 - m'$.

Cela donne:

$$\theta_1^{2\mu+1-k}\theta^k{}_1\theta^{n} x = \theta^{k''}{}_1 x,$$

où $k'' = 2\mu + 1 - k + k'$, c'est-à-dire:

$$\theta^{n'} x = \theta^{k''}{}_1 x,$$

et de là:

$$\theta^{n'\mu'} x = \theta_1^{k''\mu'} x.$$

Maintenant, puisque $2\mu + 1$ est un nombre premier, on pourra faire

$$k''\mu' = (2\mu + 1)\beta + 1,$$

donc:

$$\theta_1^{(2\mu+1)\beta}\theta_1 x = \theta_1 x = \theta^{n'\mu'} x,$$

c'est-à-dire $\theta_1 x$ serait une des quantités:

$$x,\ \theta x, \ldots \theta^{2\mu} x,$$

et cela est contre l'hypothèse.

L'expression $\theta^k{}_1\theta^m x$ a donc un nombre $(2\mu + 1)^2$ de valeurs différentes et par conséquent ces valeurs seront les racines de l'équation

$$x_{2\mu+1} = y.$$

Soit maintenant

$$x' = \theta^k{}_1 x, \quad x'' = \theta^k{}_1 \theta^m x, \quad x''' = \theta^m x.$$

On aura en regardant e et e' comme variables:

$$\frac{dx'}{\Delta x'} = \frac{dx}{\Delta x} + k \cdot \frac{de'}{\Delta e'},$$

$$\frac{dx'''}{\Delta x'''} = \frac{dx}{\Delta x} + m \cdot \frac{de}{\Delta e}.$$

En mettant dans la première formule x''' au lieu de x, x' se changera en x'', donc:

$$\frac{dx''}{\Delta x''} = \frac{dx'''}{\Delta x'''} + k \frac{de'}{\Delta e'},$$

donc:

$$\frac{dx''}{\Delta x''} = \frac{dx}{\Delta x} + k \frac{de'}{\Delta e'} + m \frac{de}{\Delta e},$$

et si l'on fait

$$k \frac{de'}{\Delta e'} = \frac{de'_k}{\Delta e'_k}, \quad m \frac{de}{\Delta e} = \frac{de_m}{\Delta e_m};$$

$$\frac{dx''}{\Delta x''} = \frac{dx}{\Delta x} + \frac{de'_k}{\Delta e'_k} + \frac{de_m}{\Delta e_m}.$$

Si donc on fait:

194) $$e_{m,k} = \frac{e_m \Delta e'_k + e'_k \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 e'^2_k},$$

on aura:

$$\frac{dx''}{\Delta x''} = \frac{dx}{\Delta x} + \frac{de_{m,k}}{\Delta e_{m,k}},$$

et de là, en supposant que e_m et e'_k, s'évanouissent avec e:

195) $$x'' = \frac{x \Delta e_{m,k} + e_{m,k} \cdot \Delta x}{1 - c^2 e_{m,k}^2 x^2} = \theta^k{}_1 \theta^m x.$$

Toutes les racines de l'équation $y = x_{2\mu+1}$ pourront donc être exprimées par cette même formule.

Donc pour trouver toutes les racines, il suffit d'avoir la valeur des deux quantités e et e', qui sont deux racines de l'équation

$$x_{2\mu+1} = 0.$$

Toutes les racines de cette équation

$$x_{2\mu+1} = 0,$$

qui, par ce qui précède, sont les $(2\mu + 1)^2$ quantités suivantes

$$0, \pm e_1, \pm e_2, \dots \pm e_n$$

sont donc exprimées par la formule

$$e_{m,k},$$

en donnant à m et k toutes les valeurs moindres que $2\mu+1$. Il est facile de voir qu'on pourra exprimer $e_{m,k}$ en fonction rationnelle des deux quantités e, e', donc on voit que toutes les racines de l'équation $x_{2\mu+1}=0$, pourront s'exprimer rationnellement par deux entre elles et par le module c.

Si l'on veut exprimer $x_{2\mu+1}$ à l'aide des fonctions $\theta_1 x$ et θx, on pourra faire cela d'une manière fort simple. En effet, en remarquant que le dernier terme d'une équation est le produit de toutes ses racines, on aura sur le champ:

$$196)\qquad \begin{aligned} x_{2\mu+1} = c^{2\mu^2+2\mu}.x\,.\,\theta x\,.\,\theta^2 x \ldots \theta^{2\mu}x \\ \times \theta_1 x.\theta_1\theta x.\theta_1\theta^2 x \ldots \theta_1\theta^{2\mu}x \\ \times \theta_1^2 x.\theta_1^2\theta x.\theta_1^2\theta^2 x \ldots \theta_1^2\theta^{2\mu}x \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times \theta_1^{2\mu}x.\theta_1^{2\mu}\theta x.\theta_1^{2\mu}\theta^2 x \ldots \theta_1^{2\mu}\theta^{2\mu}x. \end{aligned}$$

On a aussi:

$$197)\qquad x_{2\mu+1} = \frac{1}{2\mu+1}\cdot \sum_0^{2\mu}{}_m \sum_0^{2\mu}{}_n (\theta^m{}_1\theta^n x).$$

§ 10.
De l'équation $x_{2\mu+1}=0$.

D'après ce qui précède les racines de l'équation $x'_{2\mu+1}=0$ sont exprimées par $e_{m,k}$ en donnant à m et k toutes les valeurs possibles moindres que $2\mu+1$. Une de ces valeurs est zéro, savoir $e_{0,0}$.

En divisant le numérateur de la fraction $x_{2\mu+1}$ par x, on aura, en égalant le quotient à zéro, une équation:

$$198)\qquad P=0,$$

du degré $4\mu^2+4\mu$. Je dis que cette équation peut être résolue à l'aide d'équations du degré $2\mu+2$ et du degré 2μ.

Soit p une fonction quelconque symétrique et rationnelle des quantités e_1, $e_2, \ldots e_{2\mu}$. En mettant au lieu de e_2, $e_3, \ldots e_{2\mu}$ leurs expressions en fonctions rationnelles de e_1, p deviendra une fonction rationnelle de cette racine. Faisons:

$$199)\qquad p=\varphi e_1,$$

on aura évidemment:

$$200)\qquad \varphi e_1 = \varphi e_2 = \varphi e_3 = \ldots = \varphi e_{2\mu},$$

équations qui auront lieu quelle que soit la racine e. Cela posé, mettons $e_{m,1}$ au lieu de e, il est clair que

$$e_2,\ e_3,\dots e_{2\mu}$$

se changeront respectivement en:

$$e_{2m,2},\ e_{3m,3},\dots\ e_{2\mu m,2\mu}.$$

Donc on aura:

$$201)\qquad \varphi e_{m,1} = \varphi e_{2m,2} = \dots = \varphi e_{2\mu m,2\mu}.$$

Formons l'équation:

$$202)\ \begin{cases}(p-\varphi e_1)(p-\varphi e_{0,1})(p-\varphi e_{1,1})(p-\varphi e_{2,1})\dots(p-\varphi e_{2\mu,1})\\ = p^{2\mu+2} - q_{2\mu+1}\cdot p^{2\mu+1} + q_{2\mu}\cdot p^{2\mu} - \dots - q_1 p + q_0 = 0,\end{cases}$$

$q_0,\ q_1,\dots q_{2\mu+1}$ seront des fonctions symétriques et rationnelles de $\varphi e_1,\ \varphi e_{0,1},\ \dots \varphi e_{2\mu,1}$. Or on pourra les exprimer rationnellement en c.

En effet il suffit d'avoir la valeur de:

$$203)\qquad (\varphi e_1)^k + (\varphi e_{0,1})^k + \dots + (\varphi e_{2\mu,1})^k = \varrho_k.$$

En vertu des équations (200, 201) cette quantité pourra s'écrire comme il suit:

$$\begin{aligned}2\mu\cdot\varrho_k = {} & (\varphi e_1)^k + (\varphi e_2)^k + (\varphi e_3)^k + \dots + (\varphi e_{2\mu})^k\\ & + (\varphi e_{0,1})^k + (\varphi e_{0,2})^k + (\varphi e_{0,3})^k + \dots + (\varphi e_{0,2\mu})^k\\ & + (\varphi e_{1,1})^k + (\varphi e_{2,2})^k + (\varphi e_{3,3})^k + \dots + (\varphi e_{2\mu,2\mu})^k\\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ & + (\varphi e_{2\mu,1})^k + (\varphi e_{4\mu,2})^k + (\varphi e_{6\mu,3})^k + \dots + (\varphi e_{4\mu\mu,2\mu})^k\end{aligned}$$

Or le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation $P=0$; donc on pourra exprimer ϱ_k rationnellement par les coefficiens de cette équation, c'est-à-dire par c.

On voit donc que les coefficiens de l'équation (202), $q_0,\ q_1,\ q_2,\dots$ seront des fonctions rationnelles en c. Donc une fonction symétrique quelconque des racines:

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\dots e_{2\mu}$$

pourra être déterminée par le module c, à l'aide d'une équation du degré $2\mu+2$. Cela posé, faisons:

$$\begin{aligned}204)\qquad & (e-e_1)(e-e_2)\dots(e-e_{2\mu}) =\\ & e^{2\mu} + p_{\mu-1}\cdot e^{2\mu-2} + p_{\mu-2}\cdot e^{2\mu-4} + \dots + p_1\cdot e^2 + p_0 = 0.\end{aligned}$$

Les coefficiens $p_1,\ p_2,\dots p_{\mu-1}$ seront des fonctions rationnelles et symétriques de $e_1,\ e_2,\dots e_{2\mu}$; donc, comme nous venons de voir, on pourra les déterminer à l'aide d'équations du degré $2\mu+2$. Ainsi pour avoir les racines de l'équation $P=0$, il suffira de résoudre des équations du degré 2μ et $2\mu+2$.

Ce qui précède est susceptible d'une application importante. Le module c', exprimé par la formule (156), est comme on voit une fonction rationnelle et symétrique de $e, e_2, e_3, \ldots e_{2\mu}$. Donc, en vertu de la propriété démontrée précédemment, on pourra trouver le module c' en c à l'aide d'une équation du degré $2\mu+2$. Cette equation ne parait guère résoluble algébriquement, excepté lorsque $2\mu+1=3$. Dans ce cas elle sera du quatrième degré.

En appliquant le théorème XII. à l'èquation:

$$\frac{dx_{2\mu+1}}{\Delta x_{2\mu+1}}=(2\mu+1)\frac{dx}{\Delta x},$$

on aura en remarquant que le degré de la fonction $x_{2\mu+1}$ est $(2\mu+1)^2$, et $2\mu+1$ un nombre premier:

$$\frac{dx_{2\mu+1}}{\Delta x_{2\mu+1}}=\frac{2\mu+1}{\varepsilon}\cdot\frac{dy}{\Delta' y}=(2\mu+1)\cdot\frac{dx}{\Delta x},$$

où y est une fonction de x du degré $2\mu+1$, et $x_{2\mu+1}$ une fonction de y du même degré. On aura:

$$y=\frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}\cdot\frac{x(e^2-x^2)(e_2^2-x^2)\ldots(e_\mu^2-x^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-e^2e_\mu^2x^2)}$$

et

$$x_{2\mu+1}=\frac{c'^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{y(e'^2-y^2)(e'^2_2-y^2)\ldots(e'^2_\mu-y^2)}{(1-c'^2e'^2y^2)(1-c'^2e'^2_2y^2)\ldots(1-c'^2e'^2_\mu y^2)},$$

$$c'=c^{2\mu+1}.\left(\frac{1-e^2}{1-c^2e^2}\cdot\frac{1-e_2^2}{1-c^2e_2^2}\cdots\frac{1-e_\mu^2}{1-c^2e_\mu^2}\right)^2,$$

$$c=c'^{2\mu+1}.\left(\frac{1-e'^2}{1-c'^2e'^2}\cdot\frac{1-e'^2_2}{1-c'^2e'^2_2}\cdots\frac{1-e'^2_\mu}{1-c'^2e'^2_\mu}\right)^2,$$

$$\varepsilon=\frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}.e^2.e_2^2\ldots e_\mu^2.$$

e' est déterminé de la même manière en c' que e l'est en c. Donc si l'on change c en c'; e se changera en e'. De là il suit que l'équation entre les modules c' et c doit rester la même si l'on change simultanément c en c' et c' en c.

Puisque c' dépend d'une équation du degré $2\mu+2$, on pourra donner à la fonction y, $2\mu+2$ valeurs différentes.

§ 11.

Des transformations différentes qui répondent à un même degré de la fonction y.

Soit

$$y=\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_\mu x^\mu}{B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_\mu x^\mu}$$

et

205) $$\frac{dy}{\Delta(y,c')}=\varepsilon\cdot\frac{dx}{\Delta(x,c)}.$$

Supposons μ premier et d'abord $\mu=1$. Dans ce cas le module c', en vertu des formules du paragraphe 2, aura six valeurs différentes et la fonction y en aura douze.

Si $\mu=2$, on aura toutes les solutions possibles en combinant les deux formules (163, 165) avec les six formules du paragraphe 2, ce qui en donne 18 valeurs différentes du module c'.

Si l'on fait

$$c_1=\frac{1-c}{1+c},\quad c_2=\frac{2\sqrt{c}}{1+c},\quad c_3=\frac{2\sqrt{-c}}{1-c},$$

ces 18 valeurs se trouveront en mettant dans les six fonctions:

$$\pm c,\quad \pm\frac{1}{c},\quad \pm\left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^2,\quad \pm\left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right)^2,\quad \pm\left(\frac{1-\sqrt{-c}}{1+\sqrt{-c}}\right)^2,\quad \pm\left(\frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}}\right)^2,$$

les trois quantités c_1, c_2, c_3 au lieu de c.

Si μ est un nombre premier impair $2n+1$, on aura d'abord $2n+2$ valeurs du module c', qui répondent à la forme suivante de y.

$$y=\frac{c^{n+1}}{\sqrt{c'}}\cdot\frac{x(e^2-x^2)(e_2^2-x^2)\ldots(e_n^2-x^2)}{(1-c^2e^2x^2)(1-c^2e_2^2x^2)\ldots(1-c^2e_n^2x^2)}.$$

Or de chaque valeur de y de cette forme on tire en vertu des six formules du paragraphe 2. cinq autres de la forme:

$$c'y,\quad \frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y\sqrt{c'}}{1\mp y\sqrt{c'}},\quad \frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y\sqrt{c'}}{1\mp y\sqrt{c'}},\quad \frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y\sqrt{-c'}}{1\mp y\sqrt{-c'}},$$
$$\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y\sqrt{-c'}}{1\mp y\sqrt{-c'}},$$

auxquelles répondent respectivement les modules:

$$\frac{1}{c'},\quad \left(\frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\right)^2,\quad \left(\frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\right)^2,\quad \left(\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\right)^2,\quad \left(\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\right)^2.$$

On aura donc en totalité un nombre de $6(2n+2)=6(\mu+1)$ valeurs différentes pour le module c'. On en aura le double nombre pour la fonction y.

§ 12.

Résolution de l'équation $y=\psi x$.

L'équation algébrique $y=\psi x$, où ψx est une fonction *rationnelle* quelconque de x, satisfaisant à une équation différentielle de la forme (205), jouira de la propriété remarquable d'être résoluble par rapport à x à l'aide de radicaux. Cela est facile de démontrer en ayant égard à la forme des racines de cette équation. D'abord si le degré μ est un nombre composé $=n.n_1.n_2\ldots n_\nu$, on pourra faire comme nous venons de voir dans le § 7:

$$y=\psi_\nu(y_\nu),\ y_\nu=\psi_{\nu-1}(y_{\nu-1}),\ldots y_2=\psi_1(y_1),\ y_1=\psi(x),$$

où $\psi_\nu,\ \psi_{\nu-1},\ldots\psi_1,\ \psi$ désignent des fonctions rationnelles respectivement des degrés $n_\nu,\ n_{\nu-1},\ldots n_1,\ n$, ces derniers nombres étant premiers. On aura donc la valeur de x en y à l'aide de la résolution de $\nu+1$ équations des degrés $n,\ n_1,\ldots n_\nu$ respectivement. Donc il suffit de résoudre l'équation $y=\psi x$ dans le cas où le degré μ est un nombre premier. Si $\mu=2$, on aura l'expression de x par les règles connues. Si μ est impair, les racines de l'équation $y=\psi x$ seront les $2\mu+1$ quantités suivantes:

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x\ldots\theta^{2\mu}x.$$

Cela posé, soit δ une racine imaginaire de l'équation

$$\delta^{2\mu+1}=1,$$

et faisons

$$v=x+\delta.\theta x+\delta^2.\theta^2 x+\ldots+\delta^{2\mu}.\theta^{2\mu}x,$$
$$v'=x+\delta.\theta^{2\mu}x+\delta^2.\theta^{2\mu-1}x+\ldots+\delta^{2\mu}.\theta x.$$

En substituant pour les quantités $\theta^m x$ leurs valeurs:

$$\theta^m x=\frac{x\Delta e_m+e_m\Delta x}{1-c^2e_m^2x^2}$$

et remarquant que

$$\theta^{2\mu+1-m}x=\frac{x\Delta e_m-e_m\Delta x}{1-c^2e_m^2x^2},$$

il est clair qu'on aura:

$$v=p+q\Delta x,\ v'=p-q\Delta x,$$

où p et q sont des fonctions rationnelles de x. Cela fait voir que $v.v'$ et $v^{2\mu+1}+v'^{2\mu+1}$ sont des fonctions rationnelles de x; or je dis qu'on pourra exprimer ces quantités en fonctions rationnelles de y. En effet il est clair en vertu de la forme de v et v', que si l'on fait

$$v.v'=\varphi x,\ v^{2\mu+1}+v'^{2\mu+1}=fx,$$

les deux fonctions φx et fx ne changeront pas de valeur en mettant pour x les $2\mu+1$ quantités:

$$x, \; \theta x, \ldots \theta^{2\mu} x.$$

Donc on aura:

$$\varphi x = \frac{1}{2\mu+1}(\varphi x + \varphi\theta x + \ldots + \varphi\theta^{2\mu} x) = v.v',$$

$$fx = \frac{1}{2\mu+1}(fx + f\theta x + \ldots + f\theta^{2\mu} x) = v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1}.$$

Ces expressions des quantités $v.v'$, $v^{2\mu+1}+v'^{2\mu+1}$ sont des fonctions *rationnelles et symétriques* des racines de l'équation $y=\psi x$; donc on pourra les exprimer rationnellement par les coefficiens de cette équation, c'est-à-dire en y.

Faisons donc:

$$v.v' = s$$
$$v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1} = t,$$

s et t seront des fonctions rationnelles de y. On en tire

$$v = \sqrt[2\mu+1]{\left[\frac{t}{2} + \sqrt{\left(\frac{t^2}{4} - s^{2\mu+1}\right)}\right]}.$$

On connait donc la fonction v. Maintenant si l'on désigne par $v_0, v_1, v_2, \ldots v_{2\mu}$ les valeurs de v qui répondent respectivement aux racines $1, \delta, \delta^2, \delta^3, \ldots \delta^{2\mu}$ de l'équation $\delta^{2\mu+1}=1$, on aura sur le champ:

$$x = \frac{1}{2\mu+1}.(v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{2\mu}),$$

$$\theta^m x = \frac{1}{2\mu+1}.(v_0 + \delta^{-m} v_1 + \delta^{-2m} v_2 + \ldots + \delta^{-2m\mu} v_{2\mu}),$$

qui est l'expression générale des racines.

On aura par là une classe très étendue d'équations algébriques de tous les degrés, résolubles algébriquement Nous n'entrerons pas ici dans des détails sur ce sujet, mais nous renvoyons nos lecteurs à la seconde partie de ce mémoire, où nous en donneront des développements étendus et remarquables à cause des belles propriétés des fonctions elliptiques qu'on en peut tirer.

On pourra encore remarquer comme cas particulier l'équation:

$$x_\mu = y,$$

où x_μ désigne la fonction rationnelle de x du degré μ^2, qui satisfera à l'équation:

$$\frac{dx_\mu}{\Delta x_\mu} = \mu . \frac{dx}{\Delta x}.$$

On en pourra toujours tirer la valeur de x en y à l'aide des radicaux. Si μ est un nombre impair, on pourra donner aux racines cette forme très simple:

$$x = \frac{1}{\mu}.(a.y + (p_1 + q_1\Delta y)^{\frac{1}{\mu}} + (p_2 + q_2\Delta y)^{\frac{1}{\mu}} + \dots + (p_{\mu^2-1} + q_{\mu^2-1}\Delta y)^{\frac{1}{\mu}}),$$

où $p_1, p_2, p_3 \dots$ sont des fonctions *entières impaires* de y du degré μ et $q_1, q_2, q_3 \dots$ des fonctions paires de y du degré $\mu - 3$. p_m et q_m seront déterminés par l'équation

$$p^2_m - q^2_m(1-y^2)(1-c^2y^2) = (y^2 - e^2_m)^\mu,$$

où e_m est une constante, savoir une racine de l'équation $x_\mu = 0$.

Chapitre V.

Théorie générale de la transformation des fonctions elliptiques par rapport au module.

A l'aide des théorèmes que nous avons établis dans les chapitres précédents, nous pourrons maintenant donner la solution de ce problème:

"Etant proposée une fonction elliptique avec un module quelconque, exprimer cette fonction de la manière la plus générale en d'autres fonctions."

§ 1.

Condition générale pour la transformation.

Soit proposé une intégrale de la forme:

$$\int \frac{r.dx}{\Delta x},$$

on demande, s'il est possible d'exprimer cette intégrale par des fonctions algébriques, logarithmiques et des fonctions elliptiques, dont les modules sont $c_1, c_2, \dots c_m$, en sorte qu'on ait:

$$\int \frac{rdx}{\Delta x} = A_1.\psi_1 x_1 + A_2\psi_2 x_2 + \dots + A_m\psi_m x_m + V,$$

où $A_1, A_2 \dots A_m$ sont des constantes, $x_1, x_2 \dots x_m$ des fonctions algébriques de x, et V une fonction algébrique et logarithmique; $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_m$ désignent des fonctions elliptiques ayant respectivement $c_1, c_2, \dots c_m$ pour modules.

Cela posé, cette équation donnera en vertu de (86):

$$\int \frac{rdx}{\Delta x} = k_1.\psi_1 y_1 + k_2.\psi_2 y_2 + \dots + k_m.\psi_m y_m + V',$$

où

$$y_1, y_2, y_3, \dots y_m,$$

et également

$$\frac{\Delta_1 y_1}{\Delta x},\quad \frac{\Delta_2 y_2}{\Delta x},\quad \frac{\Delta_3 y_3}{\Delta x},\ \ldots\ \frac{\Delta_m y_m}{\Delta x}$$

sont des fonctions rationnelles de x.

Si l'on suppose, ce qui est permis, qu'il soit impossible d'exprimer

$$\int \frac{r\,dx}{\Delta x}$$

par un nombre moindre des fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_m$, il est clair, qu'aucune des quantités $y_1, y_2, \ldots y_m$ ne pourra être constante.

On doit donc avoir séparément, en vertu du théorème démontré dans le premier paragraphe du chapitré précédent:

$$\frac{dy_1}{\Delta_1 y_1} = \varepsilon_1 . \frac{dx}{\Delta x},\quad \frac{dy_2}{\Delta_2 y_2} = \varepsilon_2 . \frac{dx}{\Delta x},\ \ldots\ \frac{dy_m}{\Delta_m y_m} = \varepsilon_m . \frac{dx}{\Delta x},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ sont des constantes. Cela donne en intégrant,

$$\varpi(y_1, c_1) = \varepsilon_1 \varpi x,\ \varpi(y_2, c_2) = \varepsilon_2 \varpi x, \ldots \varpi(y_m, c_m) = \varepsilon_m \varpi x$$

sauf une constante qu'il faut ajouter à chacune de ces équations. On pourra donc énoncer ce théorème:

Théorème XIII. Une relation quelconque entre des fonctions elliptiques, ayant $c_1, c_2, \ldots c_m$ pour modules, ne pourra subsister à moins qu'on n'ait entre les fonctions correspondantes de la première espèce, cette relation:

$$206)\qquad \varpi(x, c) = \frac{1}{\varepsilon_1} . \varpi(y_1, c_1) = \frac{1}{\varepsilon_2} . \varpi(y_2, c_2) = \ldots = \frac{1}{\varepsilon_m} . \varpi(y_m, c_m),$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ sont des constantes et $y_1, y_2, \ldots y_m$ des fonctions rationnelles de la variable x.

On pourra donc encore satisfaire aux équations suivantes:

$$207)\qquad \begin{cases} \varpi(x_1, c) = \varepsilon' . \varpi(x, c_1), \\ \varpi(x_2, c) = \varepsilon'' . \varpi(x, c_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varpi(x_m, c) = \varepsilon^{(m)} . \varpi(x, c_m), \end{cases}$$

où $x_1, x_2, \ldots x_m$ sont des fonctions rationnelles de x; ou bien, si l'on désigne par c et c' les modules de deux quelconques des fonctions entre lesquelles on a une relation, on pourra toujours satisfaire à l'équation:

$$208)\qquad \varpi(x', c') = \varepsilon . \varpi(x, c)$$

en supposant x' fonction rationnelle de x, ou x fonction rationnelle en x'. Cette équation donne

$$209)\qquad \frac{dx'}{\Delta(x', c')} = \varepsilon . \frac{dx}{\Delta(x, c)}.$$

Soit maintenant x' une fonction rationnelle de x; si r' désigne une fonction rationnelle quelconque de x', on pourra transformer r' en une fonction pareille de x. En la désignant par r, on aura donc $r' = r$. Donc en multipliant l'équation différentielle ci-dessus par r', on aura, en intégrant:

$$210) \qquad \int \frac{r'dx'}{\Delta(x', c')} = \varepsilon \int \frac{rdx}{\Delta(x, c)}.$$

Quelle que soit la fonction rationnelle r, on pourra toujours, comme on sait, exprimer

$$\int \frac{rdx}{\Delta(x, c)}$$

par des fonctions elliptiques des trois espèces avec le module c. On aura donc ce théorème:

Théorème XIV. Si une fonction elliptique quelconque φx, ayant c' pour module, peut être exprimée par d'autres fonctions avec les modules $c_1, c_2, \ldots c_m$, on pourra toujours exprimer la même fonction φx par des fonctions elliptiques avec le même module c, c étant un quelconque des modules $c_1, c_2, \ldots c_m$, et cela de la manière suivante:

$$211) \qquad \varphi y = \int \frac{rdx}{\Delta(x, c)},$$

où y et r sont des fonctions rationnelles de x.

NOTES ET DÉVELOPPEMENTS DE L'ÉDITEUR.

Pag. 11. Il faut ici remarquer la différence entre les équations réductibles et irréductibles. Une équation algébrique est dite *irréductible* lorsqu'il est impossible qu'une racine de cette équation puisse être racine d'une équation moins élevée de la même forme, c'est-à-dire, dont les coefficiens ne contiennent aucun radical qui ne se trouve dans les coefficiens de l'équation donnée Dans le cas contraire l'équation est dite *réductible*. Ainsi par exemple l'équation

$$x^4 + \sqrt{2}.x^3 - \sqrt{2}.x + 3 = 0 \quad (\alpha)$$

est réductible, car elle a deux racines communes avec l'équation

$$x^2 - 2\sqrt{2}.x + 3 = 0, \quad (\beta)$$

équation moins élevée que (α), mais de la même forme, car ses coefficiens ne contiennent aucun radical qui ne se trouve dans les coefficiens de l'équation (α). L'équation

$$x^4 - 2x^2 + 9 = 0 \quad (\gamma)$$

a aussi deux racines communes avec l'équation (β); mais l'équation (γ) est irréductible; car il n'existe pas d'équation moins élevée de la même forme qui ait une racine commune avec cette équation. Donc si l'équation

$$s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \dots + s_{k-1} z^{k-1} + z^k = 0 \quad (\delta)$$

est réductible, son premier membre contiendra un facteur irréductible

$$t_0 + t_1 z + t_2 z^2 + \dots + t_{\mu-1} z^{\mu-1} + z^\mu \quad (\varepsilon)$$

da la même forme, c'est-à-dire où $t_0, t_1, \dots t_{\mu-1}$ sont des fonctions rationnelles de $p, r_0, r_1, \dots r_{n-1}$ et où μ est moindre que k. Si elle est irréductible on a $\mu = k$, et l'expression (ε) est identique avec le premier membre de l'équation (δ).

L'équation $\alpha^\mu - 1 = 0$ ne peut avoir lieu lorsque μ est moindre que n, et n un nombre premier; car si cette équation avait lieu, l'équation $\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = 0$ serait réductible. Or cette équation est irréductible. (voyez *Legendre* essai sur la théorie des nombres p. 439). On doit remarquer que cela n'a pas lieu

52

lorsque n est un nombre composé; par exemple dans l'équation $x^6 - 1 = 0$, une des racines imaginaires est $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, et en appelant cette racine α, on a $\alpha^3 - 1 = 0$.

Pag. 12. Les quantités $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ étant des fonctions entières de p, il est clair qu'elles restent invariables par la substitution de $\alpha^\mu . p^{\frac{1}{n}}$ pour $p^{\frac{1}{n}}$ dans l'équation (2); car on a $p = \left(p^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\alpha^\mu . p^{\frac{1}{n}}\right)^n$, μ étant un nombre entier quelconque. L'équation (3) est donc satisfaite par cette substitution, et par suite l'équation (1) l'est de même.

On a.

$$y_\mu = q_0 + \alpha^{\mu-1} . p^{\frac{1}{n}} + \alpha^{2(\mu-1)} q_2 . p^{\frac{2}{n}} + \ldots + \alpha^{(n-1)(\mu-1)} . q_{n-1} . p^{\frac{n-1}{n}},$$

$$y_\nu = q_0 + \alpha^{\nu-1} . p^{\frac{1}{n}} + \alpha^{2(\nu-1)} q_2 . p^{\frac{2}{n}} + \ldots + \alpha^{(n-1)(\nu-1)} . q_{n-1} . p^{\frac{n-1}{n}};$$

donc si $y_\mu = y_\nu$, on aurait en faisant $p^{\frac{1}{n}} = z$,

$$z^n - p = 0,$$

et $(\alpha^{\mu-1} - \alpha^{\nu-1}) . z + (\alpha^{2(\mu-1)} - \alpha^{2(\nu-1)}) . z^2 + \ldots + \alpha^{(n-1)(\mu-1)} - \alpha^{(n-1)(\mu-1)}) z^{n-1} = 0$ (ζ)

Or en concluant de la même manière que précédemment, on voit que l'équation (ζ) est impossible; donc les racines y_μ et y_ν sont différentes entre elles.

Pag. 13. Les coefficiens de l'équation du degré n' dont les racines sont les quantités $v_1, v_2, \ldots v_{n'}$ étant des fonctions symétriques de $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$, on sait par la théorie des équations algébriques qu'ils seront des fonctions rationnelles de $a, a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$.

Pag. 15. p est le plus grand nombre premier qui ne surpasse pas n. Si p. ex. $n = 5$ ou $n = 6$, on a dans les deux cas $p = 5$. Soit $n = 5 = p$, on a les indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$. Si l'on applique plusieurs fois de suite la permutation $\binom{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha}$ à la combinaison $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, on aura les combinaisons suivantes

$\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$, $\gamma\delta\varepsilon\alpha\beta$, $\delta\varepsilon\alpha\beta\gamma$, $\varepsilon\alpha\beta\gamma\delta$ | $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, etc.

En appliquant de la même manière la permutation $\binom{\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha}{\gamma\alpha\beta\delta\varepsilon}$ à la combinaison $\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$, on aura les combinaisons suivantes

$\gamma\alpha\beta\delta\varepsilon$, $\alpha\varepsilon\gamma\beta\delta$, $\varepsilon\delta\alpha\gamma\beta$, $\delta\beta\varepsilon\alpha\gamma$ | $\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha$, etc.

d'où l'on voit que les deux permutations $\binom{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha}$ et $\binom{\beta\gamma\delta\varepsilon\alpha}{\gamma\alpha\beta\delta\varepsilon}$ sont des permutations récurrentes du cinquième degré.

Pag. 16. Voyez la table des fautes à corriger.

Pag. 19. Toute fonction de la forme (a) ou est symétrique ou a 5 valeurs; donc la fonction $\varphi(x_1)$, étant de la forme (a), doit avoir 5 valeurs.

Le nombre des combinaisons à 3 qu'on peut former de 5 quantités est $\frac{5.4.3}{1.2.3}=10$; donc $\varphi x_1+\varphi x_2+\varphi x_3$ a dix valeurs, et par suite $\varphi x_1-\varphi x_2+\varphi x_3$ a un nombre de valeurs trois fois si grand.

Pag. 20. Pour $m=4$ on aura $v_1+v_2=\varphi x_1$, $v_2+v_3=\varphi x_2$, $v_3+v_4=\varphi x_3$, $v_4+v_1=\varphi x_4$ d'où l'on tire $\varphi x_1-\varphi x_2+\varphi x_3-\varphi x_4=0$; donc $v_1+v_2=\varphi x_1=\varphi x_2-\varphi x_3+\varphi x_4$. Or le second membre de cette équation a 30 valeurs; mais v_1+v_2 étant de la forme (a) n'en doit avoir que 5; donc m ne peut être égal à 4. Pour $m=5$ on trouvera l'équation $2v_1=\varphi x_1-\varphi x_2+\varphi x_3-\varphi x_4+\varphi x_5$ dont le second membre a 10 valeurs; donc m ne peut être égal à 5. Pour $\mu=3$, $v_1+v_2+v_3$ sera de la forme (a), et aura par conséquent 5 valeurs.

La forme générale que l'auteur a trouvé pour les fonctions de 5 quantités qui ont 5 valeurs différentes, peut être déduite d'une manière abrégée, comme suit.

Soit u une fonction donnée des 5 quantités x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 qui ait les 5 valeurs différentes u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, et soit v une fonction des mêmes quantités qui ait les 5 valeurs v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Une permutation quelconque qui change u_p en u_q est supposée de changer v_p en v_q. Cela posé, soit

$$\left.\begin{aligned} v_1+v_2+v_3+v_4+v_5&=k_0\\ u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+u_4v_4+u_5v_5&=k_1\\ u_1^2v_1+u_2^2v_2+u_3^2v_3+u_4^2v_4+u_5^2v_5&=k_2\\ u_1^3v_1+u_2^3v_2+u_3^3v_3+u_4^3v_4+u_5^3v_5&=k_3\\ u_1^4v_1+u_2^4v_2+u_3^4v_3+u_4^4v_4+u_5^4v_5&=k_4 \end{aligned}\right\}\quad 1.$$

Les quantités k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 sont évidemment des fonctions symétriques de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Soit de plus

$$\left.\begin{aligned} u_2+u_3+u_4+u_5&=-s_1\\ u_2u_3+u_2u_4+u_2u_5+u_3u_4+u_3u_5+u_4u_5&=s_2\\ u_2u_3u_4+u_2u_3u_5+u_2u_4u_5+u_3u_4u_5&=-s_3\\ u_2u_3u_4u_5&=s_4 \end{aligned}\right\}\quad 2.$$

s_1, s_2, s_3, s_4 sont des fonctions symétriques de u_2, u_3, u_4, u_5, et on a identiquement

$$\left.\begin{aligned}
u_1^4+s_1u_1^3+s_2u_1^2+s_3u_1+s_4&=(u_1-u_2)(u_1-u_3)(u_1-u_4)(u_1-u_5)\\
u_2^4+s_1u_2^3+s_2u_2^2+s_3u_2+s_4&=0\\
u_3^4+s_1u_3^3+s_2u_3^2+s_3u_3+s_4&=0\\
u_4^4+s_1u_4^3+s_2u_4^2+s_3u_4+s_4&=0\\
u_5^4+s_1u_5^3+s_2u_5^2+s_3u_5+s_4&=0
\end{aligned}\right\} \quad 3.$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations (1) après avoir multiplié la 1re par s_4 la 2de par s_3, la 3me par s_2 la 4me par s_1 et la dernière par l'unité, on obtiendra en vertu des équations (3) la suivante

$$(u_1^4+s_1u_1^3+s_2u_1^2+s_3u_1+s_4)v_1=k_4+s_1k_3+s_2k_2+s_3k_1+s_4k_0,$$

d'où l'on tire

$$v_1=\frac{k_4+s_1k_3+s_2k_2+s_3k_1+s_4k_0}{u_1^4+s_1u_1^3+s_2u_1^2+s_3u_1+s_4} \quad 4.$$

Soit maintenant

$$\left.\begin{aligned}
u_1-s_1&=u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=l_1\\
-u_1s_1+s_2&=u_1u_2+u_1u_3+\ldots+u_4u_5=l_2\\
u_1s_2-s_3&=u_1u_2u_3+u_1u_2u_4+\ldots+u_3u_4u_5=l_3\\
-u_1s_3+s_4&=u_1u_2u_3u_4+\ldots+u_2u_3u_4u_5=l_4\\
u_1s_4&=u_1u_2u_3u_4u_5=l_5
\end{aligned}\right\} \quad 5.$$

l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 sont des fonctions symétriques de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. De ces équations on tire

$$\left.\begin{aligned}
s_1&=u_1\quad-l_1\\
s_2&=u_1s_1+l_2=u_1^2-l_1u_1+l_2\\
s_3&=u_1s_2-l_3=u_1^3-l_1u_1^2+l_2u_1-l_3\\
s_4&=u_1s_3+l_4=u_1^4-l_1u_1^3+l_2u_1-l_3u_1+l_4
\end{aligned}\right\} \quad 6.$$

Ces valeurs de s_1, s_2, s_3, s_4 étant substituées dans l'équation (4), on aura évidemment pour la valeur de v_1 la forme suivante

$$v_1=\frac{p_0+p_1u_1+p_2u_1^2+p_3u_1^3+p_4u_1^4}{q_0+q_1u_1+q_2u_1^2+q_3u_1^3+q_4u_1^4},$$

où p_0, p_1, ... p_4, q_0, q_1, ... q_4 sont des fonctions symétriques de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Soit pour abréger $p_0+p_1u_1+\ldots+p_4u_1^4=f(u_1)$ et $q_0+q_1u_1+\ldots+q_4u_1^4=\varphi(u_1)$, on a

$$v_1=\frac{f(u_1)}{\varphi(u_1)}.$$

En multipliant le haut et le bas de cette fraction par $\varphi(u_2).\varphi(u_3).\varphi(u_4).\varphi(u_5)$ on aura

$$v_1 = \frac{f(u_1).\varphi(u_2).\varphi(u_3).\varphi(u_4).\varphi(u_5)}{\varphi(u_1).\varphi(u_2).\varphi(u_3).\varphi(u_4).\varphi(u_5)} \quad 7.$$

Or $\varphi(u_2).\varphi(u_3).\varphi(u_4).\varphi(u_5)$ est une fonction entière et symétrique de u_2, u_3, u_4, u_5 et par conséquent, en vertu des équations (2), une fonction entière de s_1, s_2, s_3, s_4; mais ces quantités sont des fonctions entières de l_1, l_2, l_3, l_4 et de u_1. Donc le numérateur de l'expression de v_1 (7) est une fonction entière de ces mêmes quantités. Le dénominateur est une fonction symétrique de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. On aura donc pour v_1 la forme suivante:

$$v_1 = \alpha_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_1^2 + \alpha_3 u_1^3 + \ldots + \alpha_n u^n{}_1 \quad 8.$$

Les équations (5) donnent identiquement

$$u_1^5 = l_1 u_1^4 - l_2 u_1^3 + l_3 u_1^2 - l_4 u_1 + l_5 \quad 9.$$

En multipliant cette équation successivement par u_1, u_1^2, u_1^3, ... u_1^{n-5}, on obtiendra $n-4$ équations desquelles on tirera les valeurs des fonctions u_1^5, u_1^6, u_1^7, ... $u^n{}_1$ exprimées par des quantités de la forme $\beta_0 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_1^2 + \beta_3 u_1^3 + \beta_4 u_1^4$, β_0, $\beta_1 \ldots \beta_4$ étant des fonctions symétriques de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. On peut donc de l'expression de v_1 chasser toutes les puissances de u_1 supérieures à la quatrième. On aura donc en écrivant v pour v_1 et u pour u_1

$$v = t_0 + t_1 u + t_2 u^2 + t_3 u^3 + t_4 u^4.$$

Or u est une fonction donnée de 5 quantités qui a 5 valeurs différentes; une telle fonction est par exemple $\theta . x$, θ étant une fonction symétrique et x une quelconque des 5 quantités. Soit donc $u = \theta . x$, et soit $t_\mu . \theta^\mu = r_\mu$, r_μ ainsi que t_μ est une fonction symétrique, et l'on aura

$$v = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 \quad 10.$$

qui est la forme générale que l'auteur a trouvée*).

De l'équation

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 = v,$$

on trouvera

$$x = s_0 + s_1 v + s_2 v^2 + s_3 v^3 + s_4 v^4, \quad 10'.$$

---

*) De la même manière on peut démontrer que, si u signifie une fonction donnée de n quantités qui prend m valeurs différentes lorsqu'on échange ces n quantités entre elles de toutes les manières possibles, la forme générale de la fonction de n quantités qui par leurs permutations mutuelles peut obtenir m valeurs différentes sera

$$r_0 + r_1 u + r_2 u^2 + \ldots + r_{m-1} u^{m-1},$$

r_0, r_1, $r_2 \ldots r_{m-1}$ étant des fonctions symétriques des n quantités. C'est ce que j'ai démontré dans un mémoire inseré dans le 12me volume du journal, *Magazin for Naturvidenskaberne.*

comme nous allons voir. Il est clair que la fonction

$$v^n = (r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4)^n$$

peut être mise sous la forme

$$v^n = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3 + t_4 x^4$$

où $t_0, t_1 \ldots t_4$ sont des fonctions symétriques de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. En effet toute puissance de x supérieure à la quatrième peut être chassée à l'aide de l'équation donnée $x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = 0$. On peut donc former les quatre équations suivantes

$$\left.\begin{aligned} r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 &= v \\ r'_0 + r'_1 x + r'_2 x^2 + r'_3 x^3 + r'_4 x^4 &= v^2 \\ r''_0 + r''_1 x + r''_2 x^2 + r''_3 x^3 + r''_4 x^4 &= v^3 \\ r'''_0 + r'''_1 x + r'''_2 x^2 + r'''_3 x^3 + r'''_4 x^4 &= v^4 \end{aligned}\right\} \quad 11.$$

où $r'_0, r'_1 \ldots r''_0, r''_1 \ldots r'''_0, r'''_1 \ldots$ ainsi que $r_0, r_1 \ldots$ sont des fonctions symétriques. En multipliant la séconde de ces équations par m_1, la troisième par m_2 et la quatrième par m_3, m_1, m_2 et m_3 étant déterminées par les équations

$$\left.\begin{aligned} r_2 + m_1 r'_2 + m_2 r''_2 + m_3 r'''_2 &= 0 \\ r_3 + m_1 r'_3 + m_2 r''_3 + m_3 r'''_3 &= 0 \\ r_4 + m_1 r'_4 + m_2 r''_4 + m_3 r'''_4 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad 12.$$

on trouvera

$$(r_1 + m_1 r'_1 + m_2 r''_1 + m_3 r'''_1) x = \begin{cases} v + m_1 v^2 + m_2 v^3 + m_3 v^4 \\ -r_0 - m_1 r'_0 - m_2 r''_0 - m_3 r'''_0 \end{cases}$$

d'où l'on tire pour la valeur de x la forme (10') ci-dessus, en remarquant que les équations (12) étant linéaires par rapport aux quantités m_1, m_2, m_3, ces quantités sont des fonctions rationnelles de $r_2, r_3, r_4, r'_2 \ldots r'''_4$ et par suite des fonctions symétriques de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Pag. 22. $\alpha^2 - \beta^2 s^2$ étant une fonction symétrique, $\sqrt[m]{(\alpha^2 - \beta^2 s^2)}$ aura nécessairement m valeurs différentes et pas un plus grand nombre. Or $\sqrt[m]{(\alpha^2 - \beta^2 s^2)}$ étant une fonction rationnelle de 5 quantités, ou doit être symétrique, ou avoir deux valeurs, ou cinq valeurs, en remarquant que m est un nombre premier. Donc si cette fonction n'est pas symétrique, m sera égal à 2 ou à 5. Dans le dernier cas on aurait

$$\sqrt[5]{(\alpha^2 - \beta^2 s^2)} = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4,$$

mais nous avons vu qu'une telle équation conduit à des contradictions. Si $m = 2$, on aurait $v = \sqrt{(\alpha + \beta\sqrt{(s^2)})}$, fonction de 5 quantités qui aurait 4 va-

leurs; or une telle fonction n'existe pas. Donc $\sqrt[m]{(\alpha^2-\beta^2s^2)}$ est nécessairement une fonction symétrique.

Pag. 23. Les coefficiens A, A_1 etc. sont des fonctions symétriques des quantités $p_1, p_2 \ldots p_m$, lesquelles sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée. Donc A, A_1 etc. sont des fonctions symétriques des racines.

On a vu que toute fonction non symétrique de 5 quantités ne peut avoir que 2 ou 5 valeurs, si le nombre de ces valeurs est un nombre premier. On a vu de plus que m ne peut être égal à 2, donc on doit avoir $m=5$.

Pag. 28. Si dans la formule $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a).\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}$ (voyez pag. 131 du Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal par *Chauchy*) on pose $x=\frac{y}{1-y}$, on trouvera

$$\int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1}.dy = \frac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Pag. 31. On verra dans le tome second comment l'auteur est parvenu à l'expression démontrée ici.

Pag. 39. $$\delta\left(t'_1+\frac{t_1}{N}+\frac{v}{q^2N}\right)<\delta t_1 \quad (\alpha).$$

On a

$$\delta t = \delta R_1 - \delta N = 2m \text{ (9)},\ \delta t_1 = \tfrac{1}{2}\delta t = m \text{ (11)},$$

$\delta v < n$ par hypoth. (8), $\delta N = n-m$, donc $\delta v - \delta N < m$, donc $\delta\left(\frac{v}{q^2N}\right)<m$, par suite $\delta\left(\frac{v}{q^2N}\right)<\delta t_1$, et de là on tire l'expression (α).

On a $\delta r = \frac{\delta R+\delta N}{2} = n$, $\delta v < n$, donc $\delta v < \delta r$, donc $\delta\left(\frac{v}{s\beta^2}\right)<\delta\left(\frac{r}{s}\right)$ et de là $\delta\left(\frac{r'}{s^2}-\frac{v}{s\beta^2}\right)<\delta\left(\frac{r}{s}\right)$.

Pag. 40. $\delta t'_1 < m$ (11), $\delta N = n-m$, donc $\delta(Nt'_1)<n$; $\delta t' < n-m$ (9), donc $\delta(Nt'_1+t')<n$, c'est-à-dire $\delta s < n$ (13), $\delta r = n$, donc $\delta s < \delta r$, $\delta\varepsilon < \delta s$, donc $\delta\varepsilon < \delta r$.

Pag. 42. $\delta\mu_1 = \delta r_1 - \delta s_1$, donc $\delta(\varepsilon_1\mu_1)<\delta r_1$, $\delta s < \delta r_1$, $\delta r_1 = \delta r_2$ donc $\delta s_2 < \delta r_2$.

Pag. 43. $\delta s_m + 2\delta\beta_{m-1} < \delta r$, à cause que $\delta v < n$.

β et β_1 ont le facteur commun β_{m-1}. (Voyez les deux dernières équations pag. 43 et les suivantes).

Pag. 47. $\delta p - \delta q = n$. On a (pag. 39) $p_1 = t_1 q + \beta$, où $\delta\beta < \delta q$, donc $\delta p_1 - \delta q = \delta t_1 = m$; or $p = N p_1$, donc $\delta p_1 = \delta p - \delta N = \delta p - n + m$; donc $\delta p - n + m - \delta q = m$; c'est-à-dire $\delta p - \delta q = n$.

Pag. 65. Le théorème mentionné ici que l'auteur se réserve de démontrer dans une autre occassion, est un cas particulier du théorème III. pag. 354, qui est lui-même un cas particulier du théorème II. de la même page.

Pag. 69. Ayant $p_m < \delta$ pour toute valeur de m on en conclut

$$p_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) < \delta.\varepsilon_0 - \delta.\varepsilon_1$$
$$p_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) < \delta.\varepsilon_1 - \delta.\varepsilon_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{m-1}(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) < \delta.\varepsilon_{m-1} - \delta.\varepsilon_m$$
$$p_m.\varepsilon_m < \delta.\varepsilon_m,$$

donc en ajoutant

$$p_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + p_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \ldots + p_{m-1}(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + p_m\varepsilon_m < \delta.\varepsilon_0.$$

Pag. 73. $(m+n)_\mu = m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + \ldots + m_\mu n_0$.
La démonstration de ce théorème se trouve dans l'ouvrage cité de *M. Cauchy* pag. 98, 99 et 100.

Pag. 78. $\psi(k, k' + l') = 2m\pi + \psi(k, k') + \psi(0, l')$ en vertu de (5) en y faisant $l = 0$.

Pag. 81. Lorsque $\mu > 1$, on a $\cos\gamma_\mu = -1$, $\sin\gamma_\mu = 0$; donc $\gamma_\mu = (2k+1)\pi$, k étant un entier; on tire de là $\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \ldots + \gamma_\mu = (2l + \mu - 1)\pi$, l étant un entier. Mais $\cos\gamma_1 = 0$ et $\sin\gamma_1 = 1$, donc $\gamma_1 = 2m\pi + \frac{\pi}{2}$, donc

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots \gamma_\mu = (2n + \mu - \tfrac{1}{2})\pi = S\gamma_\mu;$$

donc $\cos(S\gamma_\mu) = \cos(\mu - \frac{1}{2})\pi = 0$, $\sin(S\gamma_\mu) = \sin(\mu - \frac{1}{2})\pi = -\cos\mu\pi = -(-1)^\mu$,
et de là $\cos(\theta'_\mu) = -\sin\mu\varphi . \sin(\mu - \frac{1}{2})\pi = (-1)^\mu . \sin\mu\varphi$,
$\sin(\theta'_\mu) = \cos\mu\varphi . \sin(\mu - \frac{1}{2})\pi = -(-1)^\mu . \cos\mu\varphi$.

Pag. 85. On peut démontrer comme dans le deuxième cas que $m_n = 0$ pour $n = \infty$. En effet, ayant $k = 0$, ou compris entre 0 et -1, si l'on fait $k = -l$, l sera $= 0$ ou compris entre 0 et 1, et on aura

$$\delta_\mu = \left[\left(\frac{\mu + l - 1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Or $1 - l$ étant une quantité positive, on peut prendre une quantité positive c telle que $c < 1 - l$. Cela posé, on a

$$(\mu + l - 1 + c)^2 = (\mu + l - 1)^2 + 2c(\mu + l - 1) + c^2$$

donc
$$(\mu+l-1+c)^2-2c(\mu+l-1)-c^2+k'^2=(\mu+l-1)^2+k'^2;$$
donc si l'on fait $\mu>1-l-\frac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c}$ $(=\varrho)$
on verra que
$$\delta_\mu<1-\frac{1-c-l}{\mu}.$$
Si dans l'équation (20) on fait $n=1-c-l$ et $a=\frac{1}{\mu}$, on trouvera
$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-1+l+c}>1-\frac{1-l-c}{\mu},$$
donc
$$\delta_\mu<\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-1+l+c},$$
c'est-à-dire
$$\delta_\mu<\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^{1-l-c},$$
donc
$$\delta_{\mu+\rho}<\left(\frac{\mu+\rho}{\mu+\rho+1}\right)^{1-l-c}, \text{ où } \mu>0,$$
donc en faisant $\mu=1,\ 2,\ 3\ldots\mu$
$$\delta_{\rho+1}.\delta_{\rho+2}\ldots\delta_{\rho+\mu}<\left(\frac{\rho+1}{\mu+\rho+1}\right)^{1-l-c};$$
on tire de là, comme dans le deuxième cas,
$$\lambda_{\mu+\rho}<\delta_1.\delta_2.\delta_3\ldots\delta_\rho\left(\frac{\rho+1}{\mu+\rho+1}\right)^{1-l-c}.$$
Si l'on fait ici $\mu+\varrho=n$, on a
$$\lambda_n<\delta_1.\delta_2\ldots\delta_\rho\left(\frac{\rho+1}{n+1}\right)^{1-l-c};$$
donc en faisant n infini et remarquant que $1-l-c$ est une quantité positive, on voit que λ_n se réduit à zéro. Or (voyez pag. 73)
$$m_n=\lambda_n(\cos(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n)+\sqrt{-1}\sin(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n)),$$
donc $m_n=0$ pour $n=\infty$.

Pag. 91. Il faut se rappeler que $(2+2\cos 2x)^{\frac{1}{2}}=2\cos x$ depuis $x=2\varrho\pi-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2}$, mais $(2+2\cos 2x)^{\frac{1}{2}}=-2\cos x$ depuis $x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $x=2\varrho\pi+\frac{3\pi}{2}$.

Pag. 95. L'équation (4) donne
$$C=\frac{y_2}{a^{\alpha+\beta+\gamma}}\cdot\frac{\frac{dy_1}{da}}{a^\gamma}-\frac{y_1}{a^{\gamma+1}}\cdot\frac{\frac{dy_2}{da}}{a^{\alpha+\beta+\gamma-1}}, \text{ pour } a=\infty.$$

Or

$$\frac{y_2}{a^{\alpha+\beta+\gamma}} = \int_0^1 \left(\frac{x+a}{a}\right)^{\alpha+\beta+\gamma} \frac{dx}{x^\beta(1-x)^\alpha} = \int_0^1 x^{-\beta}.(1-x)^{-\alpha} dx, \text{ lorsque } a = \infty$$

$$\frac{\left(\frac{dy_1}{da}\right)}{a^\gamma} = (\gamma+1)\int_0^1 \left(\frac{x+a}{a}\right)^\gamma \cdot \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}} = (\gamma+1)\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx, \text{ lorsque } a = \infty.$$

De la même manière on trouve

$$\frac{y_1}{a^{\gamma+1}} = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx, \text{ et } \frac{\left(\frac{dy_2}{da}\right)}{a^{\alpha+\beta+\gamma-1}} = (\alpha+\beta+\gamma)\int_0^1 x^{-\beta}(1-x)^{-\alpha}dx, \text{ lorsque } a = \infty.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de C ci-dessus, on trouve

$$C = -(\alpha+\beta-1)\int_0^1 dx . x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \int_0^1 dx . x^{-\beta}(1-x)^{-\alpha}.$$

(Voyez la table des fautes à corriger.)

Or

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \text{ et } \int_0^1 x^{-\beta}(1-x)^{-\alpha}.dx = \frac{\Gamma(1-\beta).\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)} = \frac{\Gamma(1-\alpha).\Gamma(1-\beta)}{(1-\alpha-\beta)\Gamma(1-\alpha-\beta)};$$

donc $\quad C = \frac{\Gamma(\alpha).\Gamma(1-\alpha).\Gamma(\beta).\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta).\Gamma(1-\alpha-\beta)}$; mais $\Gamma(a).\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$;

donc en substituant et réduisant

$$C = \pi(\cot(\alpha\pi) + \cot(\beta\pi)).$$

L'équation $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}(x+a)^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{a^\beta(1+a)^\alpha} \cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta}}$ s'obtient en mettant dans l'équation (5) la valeur de C exprimée en intégrales définies; c'est-à-dire en mettant cette expression de C au lieu de $\pi(\cot(\alpha\pi) + \cot(\beta\pi))$.

Pag. 98. Si l'on différentie l'équation

$$r = \frac{x^\alpha(1-x)^\beta}{(x+a)^{\alpha+\beta}}$$

on trouvera

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta+1}}\left[(\alpha-(\alpha+\beta)x)(x+a) - (\alpha+\beta)x(1-x)\right]$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta+1}}\left[a(1+a)(\alpha+\beta) - (a\alpha+(1+a)\beta)(x+a)\right];$$

donc en intégrant

$$r = a(1+a)(\alpha+\beta)\int_0^x \frac{dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta+1}} - (a\alpha+(1+a)\beta)\int_0^x \frac{dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}};$$

divisant cette équation par $a(1+a)$, mettant pour les intégrales leur valeurs en y et $\frac{dy}{da}$ et pour r sa valeur en x, on obtiendra

$$\frac{dy}{da}+\left(\frac{\beta}{a}+\frac{\alpha}{1+a}\right)y=-\frac{x^{\alpha}(1-x)^{\beta}}{a(1+a)(x+a)^{\alpha+\beta}}.$$

Pag. 99. En multipliant l'équation

$$y=\int_0^x \frac{dx.x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}$$

par $a^{\beta}(1+a)^{\alpha}$, on obtient

$$ya^{\beta}(1+a)^{\alpha}=\int_0^x \frac{a^{\beta}(1+a)^{\alpha}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}.dx=\int_0^x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}.dx, \text{lorsque } a=\infty,$$

en remarquant que $\frac{a^{\beta}(1+a)^{\alpha}}{(x+a)^{\alpha+\beta}}$ pour cette valeur de a se réduit à l'unité.

Pag. 101. La définition de la fonction $\Gamma(\alpha)$ est, $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} z^{\alpha-1}.e^{-z}dz$. Faisant $z=x^2$ on aura $\Gamma(\alpha)=2\int_0^{\infty} x^{2\alpha-1}e^{-x^2}dx$; donc en écrivant $\frac{\alpha}{2}$ au lieu de α et divisant par 2 on a

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Pag. 111. Lorsque x est positif on a $\frac{dx}{1+x}<dx$; donc en intégrant depuis $x=0$,

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}<\int_0^x dx,$$

c'est-à-dire $\log(1+x)<x$ pour toute valeur positive de x.

Pag. 121. La valeur de ψx_1 se trouve par le procédé employé pag. 411 et suiv. pour trouver la valeur de v. Voyez *Cauchy* cours d'Analyse de l'école royale polytechnique pag. 71.

Pag. 124. On peut toujours trouver une racine α de l'équation $\alpha^{\mu}-1=0$ telle que toutes les racines de cette équation puissent être représentées par $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{\mu-1}$. Voyez *Lagrange* Traité de la résolution des équations numériques, Note XIII. pag. 245.

Pag. 126. Ayant $\alpha_1=\cos\frac{2\pi}{\mu}+\sqrt{-1}.\sin\frac{2\pi}{\mu}$, on a $\alpha_{\mu-1}=\alpha_1^{\mu-1}$ $=\cos\frac{2(\mu-1)\pi}{\mu}+\sqrt{-1}.\sin\frac{2(\mu-1)\pi}{\mu}=\cos\frac{2\pi}{\mu}-\sqrt{-1}.\sin\frac{2\pi}{\mu}$. Donc en vertu des équations (33), si $v_1=c+d\sqrt{-1}$, on aura $v_{\mu-1}=c-d\sqrt{-1}$. On en conclut d'après (40)

$$a_{\mu-1} = \sqrt[\mu]{v_{\mu-1}} . \sqrt[\mu]{v_1} = \sqrt[\mu]{(c+d\sqrt{-1})} . \sqrt[\mu]{(c-d\sqrt{-1})},$$

$$\text{et } a'_{\mu-1} = \sqrt[\mu]{(c-d\sqrt{-1})} . \sqrt[\mu]{(c+d\sqrt{-1})},$$

donc

$$a'_{\mu-1} = a_{\mu-1}, \text{ et } a^{\mu}_{\mu-1} = a^{\mu} = v_{\mu-1} . v_1 .$$

Pag. 136. L'équation (70) se trouve comme il suit.

Lorsque n est un nombre entier positif, on a

$$2^{n-1}.(\cos x)^n = \cos nx + n.\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{2}.\cos(n-4)x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\cos(n-6)x + \ldots (a)$$

où le dernier terme est $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}.\cos x$, lorsque n est impair,

et $\frac{1}{2}\,\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\frac{n}{2}}$, lorsque n est pair.

En mettant mx au lieu de x et désignant par $\sum\limits_1^{\mu}{}_m \cos(mz)^n$ la somme de toutes les valeurs de $(\cos(mz))^n$ qu'on obtient en donnant à m toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à μ, on aura

$$2^{n-1}\sum_1^m{}_m(\cos mx)^n = \sum_1^m{}_m \cos mnx + n\sum_1^m{}_m \cos m(n-2)x + \frac{n(n-1)}{2}\sum_1^m{}_m \cos m(n-4)x + \ldots (b)$$

Or

$$\sum_1^m{}_m \cos mz = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})z - \sin\frac{1}{2}z}{2\sin\frac{1}{2}z}.$$

Faisant ici $z = \frac{2k\pi}{\mu}$, k et μ étant des entiers, on aura

$$\sum_1^{\mu}{}_m \cos m\,.\,\frac{2k\pi}{\mu} = 0.$$

Donc en vertu de l'équation (b) en y faisant $x = \frac{2\pi}{\mu}$, lorsque n est un nombre impair $= 2p+1$,

$$\sum_1^{\mu}{}_m \left(\cos m\,.\,\frac{2\pi}{\mu}\right)^{2p+1} = 0; \quad \text{(c)}$$

et lorsque n est un nombre pair $= 2p$,

$$\sum_1^{\mu}{}_m \left(\cos m\,.\,\frac{2\pi}{\mu}\right)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}}\,.\,\frac{2p(2p-1)(2p-2)\ldots(p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots p}\,.\,\mu \quad \text{(d)}$$

Soit $a = \frac{2\pi}{\mu}$ et

$$\left.\begin{array}{l}(x-\cos a)(x-\cos 2a)(x-\cos 3a)\ldots(x-\cos\mu a)\\ \quad = x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+A_3x^{\mu-3}+\ .\ .=0\end{array}\right\}\ (e)$$

Cela posé, on sait qu'en désignant la somme des racines de cette équation par S_1, la somme de leur carrés par S_2, la somme de leur troisièmes puissances qar S_3 etc. on a

$$\left.\begin{array}{l}S_1+A_1=0\\ S_2+A_1S_1+2A_2=0\\ S_3+A_1S_2+A_2S_1+3A_3=0\\ S_4+A_1S_3+A_2S_2+A_3S_1+4A_4=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ S_n+A_1S_{n-1}+A_2S_{n-2}+\ldots+A_pS_{n-p}+\ldots+A_{n-1}S_1+nA_n=0\end{array}\right\}\ (f)$$

En vertu des équations (c) et (*d*) on a

$$S_{2p+1}=0 \text{ et } S_{2p}=\frac{1}{2^{2p}}\cdot\frac{2p(2p-1)(2p-2)\ldots(p+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots p}\cdot\mu$$

donc $S_1=0$, $S_3=0$, $S_5=0$ etc.

$$S_2=\tfrac{1}{2}\mu,\ S_4=\tfrac{3}{8}\mu,\ S_6=\tfrac{5}{16}\mu,\ S_8=\tfrac{25}{128}\cdot\mu \text{ etc.}$$

Ces valeurs étant substituées dans les équations (f) donnent

$$A_1=0,\ A_2=-\tfrac{1}{4}\mu,\ A_3=0,\ A_4=\frac{\mu(\mu-3)}{32},\ A_5=0,$$

$$A_6=-\frac{1}{64}\cdot\frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\text{ etc.}$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation (e), on obtient l'équation (70) de l'auteur.

Pag. 137. **Si dans l'équation $\sum_1^n{}_m \cos mz = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})z-\sin\frac{1}{2}z}{2\sin\frac{1}{2}z}$ on pose $z=\frac{2k\pi}{2n+1}$, *k* étant un entier, on aura**

$$\sum_1^n{}_m\left(\cos m\,.\,\frac{2k\pi}{2n+1}\right)=-\tfrac{1}{2}.$$

En comparant cette équation à l'équation (b), après y avoir fait $x=\frac{2\pi}{2n+1}$, on en conclut, lorsque p est impair

$$2^{p-1}\sum_1^n{}_m\left(\cos m\,.\,\frac{2\pi}{2n+1}\right)^p=-\tfrac{1}{2}\left\{1+p+\frac{p(p-1)}{2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{2\ .\ 3}+\ldots+\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\left(\frac{p+3}{2}\right)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\left(\frac{p-1}{2}\right)}\right\}$$

c'est-à-dire

$$2^{p-1}\sum_1^n {}_m\left(\cos m.\frac{2\pi}{2n+1}\right)^p = -\tfrac{1}{2}.\frac{2^p}{2},$$

donc

$$\sum_1^n {}_m\left(\cos m.\frac{2\pi}{2n+1}\right)^p = -\tfrac{1}{2}. \quad \text{(g)}$$

Lorsque p est pair, on trouvera

$$2^{p-1}\sum_1^n {}_m\left(\cos m.\frac{2\pi}{2n+1}\right)^p = -\tfrac{1}{2}\left\{1+p+\frac{p(p-1)}{2}+\ldots+\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\left(\frac{p}{2}+2\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\left(\frac{p}{2}-1\right)}\right\}+\tfrac{1}{2}.\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\left(\frac{p}{2}+1\right)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\left(\frac{p}{2}\right)}.n,$$

et de là

$$\sum_1^n {}_m\left(\cos m.\frac{2\pi}{2n+1}\right)^p = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots\left(\frac{p}{2}+1\right)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\left(\frac{p}{2}\right).2^{p+1}}-\tfrac{1}{2}. \quad \text{(h)}$$

Si dans cette équation on fait successivement $p=2$, 4, 6, 8 etc., on aura

$$\sum_1^n {}_m\left(\cos m.\frac{2\pi}{2n+1}\right)^2 = \frac{n}{2}-\tfrac{1}{4},$$

$$\sum_1^n {}_m\left(\cos m.\frac{2\pi}{2n+1}\right)^4 = \frac{3n}{8}-\tfrac{5}{16}.$$

$$\sum_1^n {}_m\left(\cos m.\frac{2\pi}{2n+1}\right)^6 = \frac{5n}{16}-\tfrac{11}{32}.$$

etc.

Soit maintenant

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + A_3x^{n-3} + \ldots = 0 \quad \text{(i)}$$

l'équation dont les racines sont $\cos\frac{2\pi}{2n+1}$, $\cos\frac{4\pi}{2n+1}$, $\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1}$, on trouvera aisément par ce qui précède

$$A_1=\tfrac{1}{2},\; A_2=-\frac{(n-1)}{4},\; A_3=-\frac{(n-2)}{8},\; A_4=\tfrac{1}{16}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2} \text{ etc.}$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation (i), on obtiendra l'équation (73) de l'auteur.

Pag. 148. $b=\sqrt{(e^2+c^2)}$

Pag. 149. Des équations (19) et (20) on voit aisément que

$$\varphi(m\omega\pm\alpha)=\pm(-1)^m.\varphi\alpha,$$

$$\varphi(n\varpi i\pm\alpha)=\pm(-1)^n.\varphi\alpha;$$

donc en mettant $n\varpi i + \alpha$ au lieu de α dans la première équation on a

$$\varphi(m\omega \pm n\varpi i \pm \alpha) = \pm(-1)^m . \varphi(n\varpi i + \alpha) = \pm(-1)^{m+n} . \varphi\alpha.$$

Pag. 154. La valeur $x = -a + (2m+1)\omega + (2n+1)\varpi i$ qui satisfait à l'équation $\varphi\left(\frac{x+a}{2}\right) = \frac{1}{0}$, rend $f\left(\frac{x+a}{2}\right) = \frac{1}{0}$ et $F\left(\frac{x+a}{2}\right) = \frac{1}{0}$, donc elle représente la valeur de $\varphi x - \varphi a$ sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Or la valeur de cette fraction n'est pas égale à zéro, mais à $-2\varphi a$.

Pag. 164. En vertu de l'équation (22), $f(m\omega + n\varpi i + \alpha) = (-1)^m . f\alpha$, on a

$$y = f\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{2m\omega}{2n+1} + \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right) = (-1)^p . f\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{2m+(2n+1)p}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right)$$

$= (-1)^m . f\left(\frac{\alpha}{2n+1} + \frac{m}{2n+1}\omega + \frac{\mu}{2n+1}\varpi i\right)$ en écrivant m pour $2m + (2n+1)p$.

Pag. 169. $\sum_{-n}^{+n}{}_m \psi(m) = \psi(-n) + \psi(-n+1) + \psi(-n+2) + \ldots + \psi(-n+k-1)$

$+ \psi(-n+k) + \psi(-n+k+1) + \ldots + \psi(-1) + \psi(0) + \psi(1) + \ldots + \psi(-1+k)$

$+ \psi(k) + (k+1) + \ldots + \psi(n)$,

$$\sum_1^k{}_m \psi(m+n) = \psi(1+n) + \psi(2+n) + \ldots + \psi(k+n),$$

$$-\sum_1^k{}_m \psi(m-n-1) = -\psi(-n) - \psi(-n+1) - \psi(-n+2) \ldots - \psi(-n+k-1).$$

Or on voit immédiatement que la somme de ces trois équations est la même chose que

$$\sum_{-n}^{+n}{}_m \psi(m+k) = \psi(-n+k) + \psi(-n+1+k) + \ldots + \psi(-1)$$

$$+ \psi(0) + \psi(1) + \ldots + \psi(-1+k) + \psi(k) + \psi(k+1) + \ldots + \psi(k+n).$$

Pag. 171. L'expression $\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}\right)$ étant identique avec l'expression (51) $\varphi\left((-1)^{m+\mu} . \beta + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right)$ lorsqu'on fait $m = 2k$ et $\mu = 2k'$, il est clair que la première expression est une racine de l'équation $\varphi(2n+1)\beta = \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$ quelle que soit la valeur entière de k et de k'. Donc pour faire voir que $\varphi\left(\beta + \frac{2k\omega + 2k'\varpi i}{2n+1}\right)$ exprime une racine quelconque de cette équation, il suffit de démontrer que toutes les valeurs de cette expression qu'on obtient en donnant à k et à k' toute valeur entière depuis $-n$ jusqu'à $+n$ sont différentes entre elles. En effet dans le cas contraire on aurait

$$\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi\left(\beta+\frac{2l\omega+2l'\varpi i}{2n+1}\right),$$

d'où

$$\beta+\frac{2k\omega+2k'\varpi i}{2n+1}=(-1)^{m+\mu}.\left(\beta+\frac{2l\omega+2l'\varpi i}{2n+1}\right)+m\omega+\mu\varpi i,$$

et de là

$$(-1)^{m+\mu}=1$$
$$2k=2l+(2n+1)m,$$
$$2k'=2l'+(2n+1)\mu,$$

donc $2(k-l)=(2n+1)m$; donc m doit être un nombre pair. Or k et l étant compris entre les limites $-n$ et $+n$, la plus grande valeur numérique de $2(k-l)$ est $4n$; mais m étant un nombre pair, la plus petite valeur numérique de $m(2n+1)=2(k-l)$ est $4n+2$, ce qui est absurde. Donc etc.

Pag. 173. On voit par l'équation (68) que l'équation (80) est du degré $2n+1$.

Pag. 174. Soit pour abréger $\sqrt[2n+1]{(C_\mu+\sqrt{(C_\mu^2-D_\mu^{2n+1})})}=P_\mu$ on aura

$$\theta_1^{-k}\,.\,P_1=\sum_{-n}^{+n}{}_m\theta_1^{\,m-k}\,.\,\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right),$$
$$\theta_2^{-k}\,.\,P_2=\sum_{-n}^{+n}{}_m\theta_2^{\,m-k}\,.\,\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta_{2n}^{-k}\,.\,P_{2n}=\sum_{-n}^{+n}{}_m\theta_{2n}^{\,m-k}\,.\,\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right),$$
$$\varphi_1\beta=\sum_{-n}^{+n}{}_m\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right);$$

donc

$$\varphi_1\beta+\sum_{1}^{2n}{}_\mu\theta_\mu^{-k}P_\mu=\sum_{-n}^{+n}{}_m(1+\theta_1^{\,m-k}+\theta_2^{\,m-k}+\ldots+\theta_{2n}^{\,m-k})\,\varphi\left(\beta+\frac{2m\omega}{2n+1}\right)=$$
$$(2n+1)\varphi\left(\beta+\frac{2k\omega}{2n+1}\right)=\varphi_1\beta+\sum_{1}^{2n}{}_\mu\theta_\mu^{-k}\sqrt[2n+1]{(C_\mu+\sqrt{(C_\mu^2-D_\mu^{2n+1})})}.$$

Pag. 183. Si $a_m=a_\mu$, il faut que $\alpha^{m-\mu}-1$ ou $\alpha^{m-\mu}+1$ et par suite que $\alpha^{2(m-\mu)}-1$ soit divisible par $2n+1$. Or $m<n$, $\mu<n$, donc $m-\mu<n$; donc $2(m-\mu)<2n$. On en conclut que $\alpha^{2(m-\mu)}-1$ n'est pas divisible par $2n+1$, en remarquant que α est une racine primitive du nombre $2n+1$. Donc il est impossible que $a_m=a_\mu$.

On a $\frac{\alpha^{2n}-1}{2n+1}=k$, k étant un entier, donc

$$\frac{(\alpha^n+1)(\alpha^n-1)}{2n+1}=k.$$

Or α étant une racine primitive du nombre $2n+1$, α^n-1 n'est pas divisible par $2n+1$, il faut donc que

$$\frac{\alpha^n+1}{2n+1}=\text{un entier}=k_n;$$

donc

$$\alpha^n=(2n+1)k_n-1.$$

Pag. 185.

$$\sqrt[n]{v_k}=\varphi^2(\varepsilon)+\theta^k\varphi^2(\alpha\varepsilon)+\theta^{2k}\varphi^2(\alpha^2\varepsilon)+\ldots+\theta^{\nu k}\varphi^2(\alpha^\nu\varepsilon)+\ldots+\theta^{(n-1)k}.\varphi^2(\alpha^{n-1}\varepsilon).$$

En mettant ici $\alpha^m\varepsilon$ au lieu de ε, il vient

$$\varphi^2(\alpha^m\varepsilon)+\theta^k\varphi^2(\alpha^{m+1}\varepsilon)+\theta^{2k}\varphi^2(\alpha^{m+2}\varepsilon)+\ldots+\theta^{(n-m-1)k}.\varphi^2(\alpha^{n-1})\varepsilon)$$

$+\theta^{(n-m)k}\varphi^2(\varepsilon)+\theta^{(n-m+1)k}.\varphi^2(\alpha\varepsilon)+\ldots=\theta^{-mk}.\sqrt[n]{v_k}$, en remarquant que $\theta^n=1$ et $\varphi^2(\alpha^{n+m}\varepsilon)=\varphi^2(\alpha^m\varepsilon)$.

Pag. 188. On a en général

$$\sum_{-n}^{n}{}_m\chi(m)=\chi(0)+\sum_{1}^{n}{}_m\chi(m)+\sum_{1}^{n}{}_m\chi(-m).\quad(\alpha)$$

Faisant $\chi(m)=\psi(m,\mu)$, on aura

$$\sum_{-n}^{n}{}_m\psi(m,\mu)=\psi(0,\mu)+\sum_{1}^{n}{}_m\psi(m,\mu)+\sum_{1}^{n}{}_m\psi(-m,\mu).$$

Donc

$$\sum_{-n}^{n}{}_\mu\sum_{-n}^{n}{}_m\psi(m,\mu)=\sum_{-n}^{n}{}_\mu\psi(0,\mu)+\sum_{-n}^{n}{}_\mu\sum_{1}^{n}{}_m(\psi(m,\mu)+\psi(-m,\mu))\quad(\beta)$$

En posant successivement dans l'équation (α)

1. $\chi(\mu)=\psi(0,\mu)$,
2. $\chi(\mu)=\sum_{1}^{n}{}_m(\psi(m,\mu)+\psi(-m,\mu))$,

on aura

$$\sum_{-n}^{n}{}_\mu\psi(0,\mu)=\psi(0,0)+\sum_{1}^{n}{}_\mu(\psi(0,\mu)+\psi(0,-\mu)),$$

$$\sum_{-n}^{n}{}_\mu\sum_{1}^{n}{}_m(\psi(m,\mu)+\psi(-m,\mu))=\sum_{1}^{n}{}_m(\psi(m,0)+\psi(-m,0))+\sum_{1}^{n}{}_\mu\sum_{1}^{n}{}_m(\psi(m,\mu)+\psi(m,-\mu))$$
$$+\sum_{1}^{n}{}_\mu\sum_{1}^{n}{}_m(\psi(-m,\mu)+\psi(-m,-\mu)).$$

Substituant dans l'équation (β). on trouvera

$$\left.\begin{aligned}\sum_{-n}^{n}{}_{\mu}\sum_{-n}^{n}{}_{m}\psi(m,\mu)=\psi(0,0)+\sum_{1}^{n}{}_{\mu}(\psi(0,\mu)+\psi(0,-\mu))+\sum_{1}^{n}{}_{m}(\psi(m,0)+\psi(-m,0))\\+\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\sum_{1}^{n}{}_{m}(\psi(m,\mu)+\psi(m,-\mu))+\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\sum_{1}^{n}{}_{m}(\psi(-m,\mu)+\psi(-m,-\mu))\end{aligned}\right\}(\gamma)$$

En mettant dans cette équation $\log\psi(m,\mu)$ à la place de $\psi(m,\mu)$, et rentrant ensuite des logarithmes aux nombres, on aura

$$\left.\begin{aligned}\Pi_{-n}^{n}{}_{\mu}\Pi_{-n}^{n}{}_{m}\psi(m,\mu)=\psi(0,0).\Pi_{1}^{n}{}_{\mu}\psi(0,\mu).\psi(0,-\mu).\Pi_{1}^{n}{}_{m}\psi(m,0).\psi(-m,0)\\\times\Pi_{1}^{n}{}_{\mu}\Pi_{1}^{n}{}_{m}\psi(m,\mu).\psi(-m,-\mu).\Pi_{1}^{n}{}_{\mu}\Pi_{1}^{n}{}_{m}\psi(m,-\mu).\psi(-m,\mu)\end{aligned}\right\}(\delta)$$

Si dans l'équation (γ) on fait $\psi(m,\mu)=(-1)^{m+\mu}.\varphi\left(\beta+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)$, on voit aisément que $A=\frac{\varphi(2n+1)\beta}{\varphi\beta}$ pour $\beta=\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}$.

Pag. *189.* Voyez les équations (22) et (16).

Pag. *191.* L'équation (13) donne $\frac{\varphi(\beta+\alpha).\varphi(\beta-\alpha)}{\varphi^2\alpha}=\frac{-\left(1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}\right)}{1+e^2c^2\varphi^2\beta\varphi^2\alpha}$.

Si dans l'équation (18) $\varphi\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right).\varphi\left(\alpha+\frac{\varpi i}{2}\right)=-\frac{i}{ec}$, on met $\alpha+\frac{\omega}{2}$ au lieu de α, on en tirera $1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta=1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}\right)}$;

donc

$$\frac{\varphi(\beta+\alpha).\varphi(\beta-\alpha)}{\varphi^2\alpha}=-\frac{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\alpha}}{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}\right)}}.$$

Si dans l'équation (16) $b.\frac{\varphi\alpha}{F\alpha}=-f\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)$, au lieu de $\varphi\alpha$ et $F\alpha$ on met leur valeurs en $f\alpha$, on en tirera

$$f^2\alpha=\frac{1-f^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)}{1-\frac{e^2}{b^2}.f^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)},$$

et de là

$$\varphi^2\alpha=\frac{f^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)}{b^2-e^2f^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)}.$$

En mettant cette valeur de $\varphi^2\alpha$, et $1-f^2\beta$ au lieu de $c^2\varphi^2\beta$, dans l'équation (14)

$$f(\beta+\alpha).f(\beta-\alpha)=\frac{1-c^2\varphi^2\alpha-c^2\varphi^2\beta-e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta},$$

on trouvera

$$f(\beta+\alpha).f(\beta-\alpha)=\frac{f^2\beta-f^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)}{1-\frac{e^2}{b^2}.f^2\beta.f^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Si dans la dernière des équations (18) on met $\alpha+\frac{\omega}{2}$ à la place de α, on aura $f\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}\right).f\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)=\frac{b}{e}$. A l'aide de cette équation on peut chasser $\frac{e^2}{b^2}$ de l'équation ci-dessus par où on obtiendra

$$\frac{f(\beta+\alpha).f(\beta-\alpha)}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}=-\frac{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}}{1-\frac{f^2\beta}{f^2\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}\right)}}.$$

On trouvera de plus

$$F^2\alpha=\frac{1-F^2\left(\alpha+\frac{\varpi i}{2}\right)}{1-\frac{c^2}{b^2}F^2\left(\alpha+\frac{\varpi i}{2}\right)}$$

$$\varphi^2\alpha=\frac{F^2\left(\alpha+\frac{\varpi i}{2}\right)}{c^2F^2\left(\alpha+\frac{\varpi i}{2}\right)-b^2}.$$

En substituant ces valeurs de $F^2\alpha$ et $\varphi^2\alpha$, et mettant $\frac{F^2\beta-1}{e^2}$ pour $\varphi^2\beta$ dans l'équation (14)

$$F(\beta+\alpha).F(\beta-\alpha))=\frac{F^2\alpha.F^2\beta-e^2b^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha.\varphi^2\beta},$$

il viendra

$$F(\beta+\alpha).F(\beta-\alpha)=\frac{F^2\beta-F^2\left(\alpha+\frac{\varpi i}{2}\right)}{1-\frac{c^2}{b^2}F^2\beta.F^2\left(\alpha+\frac{\varpi i}{2}\right)}.$$

En éliminant $\frac{c}{b}$ de cette équation et de celle-ci

$$\frac{b}{c} = F\left(\alpha + \frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2}\right) . F\left(\alpha + \frac{\varpi i}{2}\right),$$

on obtiendra la dernière équation de la page 191.

Pag. 194, Les formules de la page 193 donnent

$$f(2n+1)\beta = (2n+1)(-1)^n . f\beta \prod_1^n {}_m \frac{1}{f^4\left(\frac{m\omega}{2n+1} + \frac{\omega}{2}\right)} \cdot \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1} + \frac{\omega}{2}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{m\omega}{2n+1}\right)} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1} + \frac{\omega}{2}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}}$$

$$\times \prod_1^n {}_\mu \frac{1}{f^4\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \cdot \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}}$$

$$\times \prod_1^n {}_m \prod_1^n {}_\mu \frac{1}{f^4\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right)} \cdot \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2} + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right)} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2} + \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}\right)}}$$

$$\times \prod_1^n {}_m \prod_1^n {}_\mu \frac{1}{f^4\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega - \mu\varpi i}{2n+1}\right)} \cdot \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega - \mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2} + \frac{m\omega - \mu\varpi i}{2n+1}\right)} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{m\omega - \mu\varpi i}{2n+1}\right)}}{1 - \frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2} + \frac{m\omega - \mu\varpi i}{2n+1}\right)}}.$$

En faisant $\beta = 0$, on aura

$$1 = (2n+1)(-1)^n . \prod_1^n {}_m \frac{1}{f^4\left(\frac{m\omega}{2n+1} + \frac{\omega}{2}\right)} \cdot \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1} + \frac{\omega}{2}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{m\omega}{2n+1}\right)}$$

$$\times \prod_1^n {}_\mu \frac{1}{f^4\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \cdot \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\varpi i}{2} + \frac{\omega}{2} + \frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}$$

$$\times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \frac{1}{f^4\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \cdot \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}+\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)}$$

$$\times \prod_1^n{}_m \prod_1^n{}_\mu \frac{1}{f^4\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)} \cdot \frac{b^2}{e^2} \cdot \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}+\frac{m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)}.$$

En divisant l'avant-dernière de ces équations par la dernière, on obtiendra l'expression (130') de la fonction $f(2n+1)\beta$. Par un procédé tout semblable on trouve l'expression de $F(2n+1)\beta$.

Pag. 195. L'équation (18) donne

$$\varphi\alpha = -\frac{i}{ec} \cdot \frac{1}{\varphi\left(\alpha-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi i}{2}\right)} = -\frac{i}{ec} \cdot \frac{1}{\varphi\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}\right)};$$

donc

$$\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right) = -\frac{i}{ec} \cdot \frac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi i}{2}\right)} = -\frac{i}{ec} \cdot \frac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha-(n-m+\frac{1}{2})\omega-(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)},$$

$$\varphi\left(\frac{\alpha-m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right) = -\frac{i}{ec} \cdot \frac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha+(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)},$$

et, en remarquant que $\varphi\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right) = -\varphi\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)$, $\varphi\left(\alpha-\frac{\varpi i}{2}\right) = -\varphi\left(\alpha+\frac{\varpi i}{2}\right)$, on aura

$$\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \frac{i}{ec} \cdot \frac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha-(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)},$$

$$\varphi\left(\frac{\alpha-m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \frac{i}{ec} \cdot \frac{1}{\varphi\left(\frac{\alpha+(n-m+\frac{1}{2})\omega-(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)}.$$

De ces équations on tire

$$\frac{1}{2n+1}\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}\left[\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha+m\omega-\mu\varpi i}{2n+1}\right)+\varphi\left(\frac{\alpha-m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]$$

$$= -\frac{i}{ec}\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}\psi(n-m,\ n-\mu) + \frac{i}{ec}\sum_1^n{}_m\sum_1^n{}_\mu(-1)^{m+\mu}\psi_1(n-m, n-\mu).$$

Pag 197. Lorsque $x=\varphi(\alpha)$, on a $\alpha=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$, donc

$$\frac{d\alpha}{dx} = (1-(c^2+e^2)x^2+c^2e^2x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{2}(c^2+e^2)x^2+\ldots$$

d'où en intégrant

$$\alpha = x + \tfrac{1}{2}(e^2 + c^2) . \frac{x^3}{3} . + \ldots$$

en remarquant que la constante arbitraire due à l'intégration se réduit à zéro, puisque α s'évanouit en même temps que x. On tire de là

$$\frac{\alpha}{x} = 1 + \tfrac{1}{2}(e^2 + c^2) . \frac{x^2}{3} + \ldots$$

Donc faisant x converger vers zéro

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\varphi\alpha} = 1 \text{ pour } x = 0.$$

Cela posé, en remarquant que $\varphi(-\alpha) = -\varphi\alpha$, il est clair que le développement de $\varphi\alpha$ suivant les puissances de α ne peut contenir que les puissances impaires de α. Donc

$$\varphi\alpha = a\alpha + b\alpha^3 + c\alpha^5 + \ldots$$

et parceque $\frac{\varphi\alpha}{\alpha} = 1$ pour $\alpha = 0$, on a $a = 1$; donc

$$\varphi\alpha = \alpha + b\alpha^3 + c\alpha^5 + \ldots$$

donc

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right) = \frac{\alpha}{2n+1} + \frac{A\alpha^3}{(2n+1)^3},$$

où A convergera vers une limite finie pour des valeurs toujours croissantes de n.

Pag. 198. Si $\frac{m\omega}{2n+1}$ n'a pas zéro pour limite, il s'en suit que $\frac{\varepsilon_\mu}{2n+1} = \frac{m\omega + \mu\varpi i}{2n+1}$ aura pour limite une quantité différente de zéro, quelle que soit la valeur da μ.

Pag. 200. En posant

$$\theta(n) - \theta(n+1) + \theta(n+2) - \theta(n+3) + \ldots = B\theta(n) + B_1\theta'(n) + B_2\theta''(n) + \ldots$$

où $\theta'(n) = \frac{d\theta(n)}{dn}$, $\theta''(n) = \frac{d^2\theta(n)}{dn^2}$ etc., on aura en mettant $n+1$ au lieu de n,

$$\theta(n+1) - \theta(n+2) + \theta(n+3) - \ldots = B\theta(n+1) + B_1\theta'(n+1) + B_2\theta''(n+1) + \ldots$$

donc en ajoutant membre à membre

$$\theta(n) = B\big(\theta(n) + \theta(n+1)\big) + B_1\big(\theta'(n) + \theta'(n+1)\big) + B_2\big(\theta''(n) + \theta''(n+1)\big) + \ldots$$

Or

$$\theta(n+1) = \theta(n) + \theta'(n) + \tfrac{1}{2}\theta''(n) + \tfrac{1}{2\cdot 3}\theta'''(n) + \ldots,\ \theta'(n+1) = \theta'(n) + \theta''(n) + \tfrac{1}{2}\theta'''(n) + \ldots, \text{etc.}$$

On tire de là en substituant et réduisant

$$\begin{aligned}\theta(n) = 2B\theta(n) + {} & B\theta'(n) + \tfrac{1}{2}B\theta''(n) + \dots \\ & + 2B_1\theta'(n) + B_1\theta''(n) + \dots \\ & \qquad\qquad + 2B_2\theta''(n) + \dots \\ & \qquad\qquad\qquad + \dots\end{aligned}$$

On en conclut $2B = 1$, donc $B = \frac{1}{2}$,

$B + 2B_1 = 0$, donc $B_1 = -\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{2}B + B_1 + 2B_2 = 0$, donc $B_2 = 0$, etc.

donc $\theta(n) - \theta(n+1) + \theta(n+2) - \dots = \frac{1}{2}\theta(n) - \frac{1}{4}\theta'(n) + B_3\theta'''(n) + \dots$

Pag. 203. L'auteur dit que la limite de la quantité

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\left\{f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right) + \sum_1^n{}_m(-1)^m\left[f\left(\frac{\alpha+m\omega}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-m\omega}{2n+1}\right)\right] + \sum_1^n{}_\mu\left[f\left(\frac{\alpha+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]\right\}$$

est égale à zéro, et qu'on aura par suite

$$\begin{aligned}f\alpha = {} & \lim(-1)^n \sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu (-1)^m . \psi(n-m,\ n-\mu) \\ & + \lim(-1)^n \sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu (-1)^m . \psi_1(n-m,\ n-\mu).\end{aligned}$$

Or le premier énoncé n'est pas juste, et par conséquent ni le second non plus; mais la faute résultant du premier, est détruite par celle du seconde, de sorte que le résultat, c'est-à-dire l'équation (160) se trouve juste. C'est ce que nous allons voir.

Considérons d'abord la quantité

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_1^n{}_m(-1)^m\left[f\left(\frac{\alpha+m\omega}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-m\omega}{2n+1}\right)\right] = \frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_1^n{}_m(-1)^m . \frac{2f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right).f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right).\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}$$

Soit pour abréger $\dfrac{2f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right).f\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)}{1+e^2e^2\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\varphi^2\left(\frac{m\omega}{2n+1}\right)} = R_m$,

on a

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_1^n{}_m(-1)^m R_m = \frac{(-1)^n}{2n+1}\left\{\begin{array}{l}-R_1 + R_2 - R_3 + \dots + (-1)^\nu R_\nu \\ -(-1)^\nu(R_{\nu+1} - R_{\nu+2} + R_{\nu+3} - \dots - (-1)^{n-\nu}R_n)\end{array}\right\}.$$

Soit ν le plus grand nombre entier compris dans $\sqrt{n}$, on aura

$$-R_1 + R_2 - R_3 + \dots + (-1)^\nu R_\nu = \nu R,$$

où R est une quantité finie.

Si m surpasse $\sqrt{n}$, il est clair que $R_m - R_{m+1}$ est de la forme v_m, v_m ayant pour limite zéro. On tire de là

$$\frac{(-1)^{n+\nu}}{2n+1}(R_{\nu+1}-R_{\nu+2}+\ldots-(-1)^{n-\nu}R_n)=\pm\frac{(-1)^n}{2n+1}(v_{\nu+1}+v_{\nu+2}+\ldots+v_k+BR_n),$$

où $k=\frac{n-\nu}{2}$ ou $=\frac{n-\nu-1}{2}$ selon que $n-\nu$ est pair ou impair; dans le premier cas on a $B=0$ et dans le second $B=1$.

Donc

$$\frac{(-1)^{n+\nu}}{2n+1}(R_{\nu+1}-R_{\nu+2}+\ldots-(-1)^{n-\nu}R_n)=\pm(-1)^n\left(\frac{kv+BR_n}{2n+1}\right),$$

et de là

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_1^n{}_m(-1)^m R_m=(-1)^n\left(\frac{\nu R}{2n+1}\pm\frac{kv+BR_n}{2n+1}\right)$$

dont la limite est évidemment zéro.

Au contraire la limite de la quantité

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_1^n{}_\mu\left[f\left(\frac{\alpha+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]$$

n'est pas zéro, mais une quantité finie indépendante de α, et comprise entre les limites 1 et $\frac{b}{e}$.

En effet soit pour abréger $f\left(\frac{\alpha+\mu\varpi i}{2n+1}\right)+f\left(\frac{\alpha-\mu\varpi i}{2n+1}\right)=R_\mu$,

on a

$$R_\mu=\frac{2f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right).f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right).\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}=2f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\left\{f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)-e^2c^2\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right).\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right).\frac{f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{1+e^2c^2\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right).\varphi^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}.$$

Or on voit aisément que cette équation peut être mise sous la forme

$$R_\mu=2f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\left[f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)-\frac{1}{(2n+1)^2}.P_\mu\right],$$

où P_μ est une quantité finie pour toute valeur de μ ainsi que sa limite pour des valeurs toujours croissantes de n. On aura donc

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_1^n{}_\mu R_\mu=\frac{(-1)^n}{2n+1}.2f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\left[\sum_1^n{}_\mu f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)-\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_1^n{}_\mu P_\mu\right].$$

Maintenant $f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)$ est compris entre les limites 1 et $\frac{b}{e}$, donc $\sum_1^n{}_\mu 2f\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)$ est compris entre les limites $2n$ et $2n.\frac{b}{e}$. La quantité P_μ étant finie, on a $\sum_1^n{}_\mu P_\mu=nP$, où P est fini; donc $\frac{1}{(2n+1)^2}\sum_1^n{}_\mu P_\mu=\frac{nP}{(2n+1)^2}$ dont la limite est zéro. On voit par là que

$$\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_1^n{}_\mu R_\mu = (-1)^n.\frac{2n}{2n+1}.C$$

où C est une quantité moyenne entre les limites 1 et $\frac{b}{e}$. Donc en faisant n croitre à l'infini

$$\lim \frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_1^n{}_\mu R_\mu = \pm C,$$

quantité indépendante de α, comme nous l'avons dit plus haut.

Venons maintenant à la détermination de la limite de la fonction

$$(-1)^n \sum_1^n{}_m \sum_1^n{}_\mu (-1)^m.\psi(n-m,\ n-\mu) = (-1)^n \sum_0^{n-1}{}_m \sum_0^{n-1}{}_\mu (-1)^{n-m}.\psi(m,\mu)$$
$$= \sum_0^{n-1}{}_\mu \sum_0^{n-1}{}_m (-1)^m.\psi(m,\mu).$$

La dernière des équations (18) donne

$$f\varepsilon = \frac{b}{e}.\frac{1}{f\left(\varepsilon - \frac{\varpi i}{2}\right)},$$

et l'équation (16), $f\left(\varepsilon + \frac{\omega}{2}\right) = -b.\frac{\varphi\varepsilon}{F\varepsilon}$, en y mettant $\varepsilon - \frac{\omega}{2} - \frac{\varpi i}{2}$ à la place de ε, devient

$$f\left(\varepsilon - \frac{\varpi i}{2}\right) = -b.\frac{\varphi\left(\varepsilon - \frac{\omega}{2} - \frac{\varpi i}{2}\right)}{F\left(\varepsilon - \frac{\omega}{2} - \frac{\varpi i}{2}\right)} = b.\frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2} - \varepsilon\right)}{F\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2} - \varepsilon\right)};$$

on tire de là

$$f\varepsilon = \frac{1}{e}.\frac{F\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2} - \varepsilon\right)}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2} - \varepsilon\right)}.$$

La première des équations (18) donne

$$\frac{1}{\varphi\varepsilon} = -iec\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2} - \varepsilon\right);$$

donc

$$\frac{f\varepsilon}{\varphi\varepsilon} = -ic.F\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2} - \varepsilon\right).$$

Le produit de ces deux équations donne, après avoir divisé les deux membres par e^2c^2,

$$\frac{f\varepsilon}{e^2c^2\varphi^2\varepsilon} = -\frac{1}{e}\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2} - \varepsilon\right).F\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\varpi i}{2} - \varepsilon\right);$$

on trouve de plus

$$\frac{2f\beta}{\varphi^2\beta+\frac{1}{e^2c^2\varphi^2\varepsilon}}=\frac{2f\beta}{\varphi^2\beta-\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}-\varepsilon\right)};$$

donc on aura

$$f(\beta+\varepsilon)+f(\beta-\varepsilon)=-\frac{1}{e}\cdot\frac{2\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}-\varepsilon\right).F\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}-\varepsilon\right)f\beta}{\varphi^2\beta-\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}-\varepsilon\right)}.$$

Cette équation donne la valeur de $\psi(m,\mu)$.

Soit $\frac{(m+\frac{1}{2})\omega+(\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}=\frac{\varepsilon_m}{2n+1}$, on aura

$$\psi(m,\mu)=-\frac{1}{e}\cdot\frac{2\varphi\left(\frac{\varepsilon_m}{2n+1}\right).F\left(\frac{\varepsilon_m}{2n+1}\right).f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{(2n+1)\left[\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_m}{2n+1}\right)\right]},$$

$$\frac{1}{e}\theta(m,\mu)=-\frac{1}{e}\cdot\frac{\left(\frac{2\varepsilon_m}{2n+1}\right)}{(2n+1)\left(\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}-\frac{\varepsilon^2_m}{(2n+1)^2}\right)};$$

donc

$$-\left(\psi(m,\mu)-\frac{1}{e}\theta(m,\mu)\right)=\frac{2}{e(2n+1)}\left\{\frac{\varphi\left(\frac{\varepsilon_m}{2n+1}\right).F\left(\frac{\varepsilon_m}{2n+1}\right).f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)-\varphi^2\left(\frac{\varepsilon_m}{2n+1}\right)}-\frac{\frac{\varepsilon_m}{2n+1}}{\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}-\frac{\varepsilon^2_m}{(2n+1)^2}}\right\},$$

ou bien en faisant pour abréger $\frac{\varepsilon_m}{2n+1}=k$

$$\psi(m,\mu)-\frac{1}{e}\theta(m,\mu)=\frac{2}{e(2n+1)}\left\{\frac{\varphi k.Fk.f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2k-\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}-\frac{k}{k^2-\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}}\right\}=\frac{2}{e(2n+1)}.R_m.$$

Maintenant en remarquant que

$$\frac{\varphi k.Fk.f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi^2k-\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}=\frac{Fk.f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi k}+\frac{Fk.f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)}{\varphi k\left[\varphi^2k-\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)\right]},$$

$$f\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=1+\frac{A.\alpha^2}{(2n+1)^2},$$

$$\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2n+1}\right)=\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}+\frac{B.\alpha^4}{(2n+1)^4}$$

où A et B sont finis,

$$\frac{k}{k^2-\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}}=\frac{1}{k}+\frac{\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}}{k\left(k^2-\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}\right)},$$

il est clair que R_m peut être mis sous la forme

$$R_m=\frac{Fk}{\varphi k}-\frac{1}{k}+\frac{v_m}{2n+1};$$

donc, en remarquant que $\frac{\varepsilon_{m+1}}{2n+1}=\frac{\varepsilon_m+\omega}{2n+1}=k+\frac{\omega}{2n+1}$, on aura en faisant pour abréger $\frac{\omega}{2n+1}=l$,

$$R_{m+1}=\frac{F(k+l)}{\varphi(k+l)}-\frac{1}{k+l}+\frac{v_{m+1}}{2n+1}.$$

On tire de là

$$R_m-R_{m+1}=\frac{Fk}{\varphi k}-\frac{F(k+l)}{\varphi(k+l)}-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+l}\right)+\frac{v}{2n+1}.$$

Or $F(k+l)=\frac{Fk.Fl+e^2\varphi k.\varphi l.fk.fl}{1+e^2c^2\varphi^2k.\varphi^2l}=Fk+e^2\varphi k.fk.\varphi l+\frac{v}{2n+1}$.

$$\varphi(k+l)=\frac{\varphi k.fl.Fl+fk.Fk.\varphi l}{1+e^2c^2\varphi^2k.\varphi^2l}=\varphi k+fk.Fk.\varphi l+\frac{v'}{2n+1}.$$

Donc

$$\frac{Fk}{\varphi k}-\frac{F(k+l)}{\varphi(k+l)}=\frac{(F^2k-e^2\varphi^2k)fk.\varphi l}{\varphi^2k+\varphi k fk.Fk.\varphi l}+\frac{v}{2n+1}.$$

mais $F^2k-e^2\varphi^2k=1$, donc

$$\frac{Fk}{\varphi k}-\frac{F(k+l)}{\varphi(k+l)}=\frac{fk.\varphi l}{\varphi^2k+\varphi k.fk.Fk.\varphi l}+\frac{v}{2n+1}.$$

Le second membre de cette équation est de la forme

$$\frac{\omega}{2n+1}\cdot\frac{fk}{\varphi^2k}+\frac{v}{2n+1},$$

en remarquant que $\varphi l=\varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)=\frac{\omega}{2n+1}+\frac{A.\omega^3}{(2n+1)^3}$, où A est fini.

De plus $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+l}=\frac{l}{k^2+kl}=\frac{l}{k^2}+\frac{v}{2n+1}=\frac{\omega}{2n+1}\cdot\frac{1}{k^2}+\frac{v}{2n+1}$.

On conclut de là

$$R_m-R_{m+1}=\frac{\omega}{2n+1}\left(\frac{fk}{\varphi^2k}-\frac{1}{k^2}\right)+\frac{v}{2n+1}.$$

Cette équation a lieu, soit que la limite de $k=\frac{\varepsilon_m}{2n+1}$ soit finie ou zéro. Dans le dernier cas on a

$$\frac{fk}{\varphi^2k}-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2fk-\varphi^2k}{k^2\varphi^2k}=\frac{k^2(1+Ak^2)-k^2-Bk^4}{k^2(k^2+Bk^4)}=\frac{A-B}{1+Bk^2}.$$

Or on trouvera aisément que $\lim (A - B) = -\left(\frac{c^2 + 2e^2}{2.3}\right)$. Donc dans tous les cas la quantité $R_m - R_{m+1}$ est de la forme

$$\frac{A_m}{2n+1} + \frac{v}{2n+1},$$

où A_m est différent de zéro.

Cela posé, considérons l'expression

$$\frac{2}{e}\sum_0^{n-1}{}_m \frac{(-1)^m}{2n+1}.R_m = \frac{2}{e}\cdot\frac{1}{2n+1}(R_0 - R_1 + R_2 - R_3 + \ldots + (-1)^{n-1}R_{n-1}).$$

En vertu de ce qui précède, on a

$$\frac{2}{e}\sum_0^{n-1}{}_m \frac{(-1)^m}{2n+1}.R_m = \frac{2}{e}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}(A_0 + A_2 + A_4 + \ldots + A_k + B) + \frac{v}{2n+1}.$$

où k est égal à $n-2$ ou à $n-3$ selon que n est pair ou impair; dans le premier cas on a $B = 0$ et dans le second $B = R_{n-1}$. Dans l'un et l'autre cas on aura

$$\frac{2}{2n+1}(A_0 + A_2 + A_4 + \ldots + A_k + B) = \frac{(k+2)A+B}{2n+1} = A'_\mu,$$

où A'_μ est indépendant de α.

Donc

$$\frac{2}{e}\sum_0^{n-1}{}_m \frac{(-1)^m}{2n+1}.R_m = \frac{1}{e}\cdot\frac{A'_\mu}{(2n+1)} + \frac{v}{2n+1};$$

et par suite

$$\frac{2}{e}\sum_0^{n-1}{}_\mu \sum_0^{n-1}{}_m \frac{(-1)^m}{2n+1}.R_m = \frac{1}{e}\cdot\sum_0^{n-1}{}_\mu \frac{A'_\mu}{2n+1} + \sum_0^{n-1}{}_\mu \frac{v}{2n+1} = A'' + v;$$

donc faisant n croître à l'infini,

$$\frac{2}{e}\sum_0^{\infty}{}_\mu \sum_0^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m}{2n+1} R_m = A'',$$

où A'' est indépendant de α.

C'est-à-dire l'expression

$$\sum_0^{\infty}{}_\mu \sum_0^{\infty}{}_m (-1)^m \left(\psi(m,\mu) - \frac{1}{e}\theta(m,\mu)\right)$$

est indépendante de α.

En changeant le signe de i, on voit de même que la quantité

$$\sum_0^{\infty}{}_\mu \sum_0^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m}{2n+1}\left(\psi_1(m,\mu) - \frac{1}{e}\theta_1(m,\mu)\right)$$

est indépendante de α.

On conclut de là que

$$\lim \sum_{0}^{n-1}{}_{\mu}\sum_{0}^{n-1}{}_{m}(-1)^{m}(\psi(m,\mu)+\psi_1(m,\mu)) = \frac{1}{e}\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\sum_{0}^{\infty}{}_{m}(-1)^{m}(\theta(m,\mu)+\theta_1(m,\mu)) + K,$$

K étant indépendant de α.

En vertu de ce qui précède, la dernière équation de la page 202 donne

$$f\alpha = \pm C + K + \frac{1}{e}\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\sum_{0}^{\infty}{}_{m}(-1)^{m}(\theta(m,\mu)+\theta_1(m,\mu)).$$

En substituant ici les valeurs de $\theta(m,\mu)$ et $\theta_1(m,\mu)$ et en réduisant, on aura

$$f\alpha = \pm C + K + \frac{1}{e}\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\left\{\sum_{0}^{\infty}{}_{m}(-1)^{m}.\frac{2[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha-(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2} - \sum_{0}^{\infty}{}_{m}(-1)^{m}.\frac{2[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]}{[\alpha+(m+\frac{1}{2})\omega]^2+(\mu+\frac{1}{2})^2\varpi^2}\right\}.$$

Faisant maintenant $\alpha = \frac{\omega}{2}$, on trouvera $\pm C + K = 0$, ce qui donne l'équation (161) de la page 204.

Pag. 204. L'équation (162) peut aussi se déduire de (161) en changeant α, e, ω, ϖ, $f(\alpha i)$ respectivement en αi, c, ϖ, ω, $F\alpha$.

Pag. 207. On a en général $\dfrac{1-\frac{p+q}{r+s}}{1-\frac{p}{r}} = 1 + \dfrac{ps-qr}{r(r+s)}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{p}{r}}$,

donc

$$\frac{1-\dfrac{\dfrac{\alpha^2}{(2n+1)^2}+\dfrac{A'\alpha^4}{(2n+1)^4}}{\dfrac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}{(2n+1)^2}+A.\dfrac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^4}{(2n+1)^4}}}{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}} =$$

$$1+\frac{\alpha^2}{(2n+1)^2}\left\{\frac{A-A'\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}{1+A.\dfrac{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}{(2n+1)^2}}\right\}.\frac{1}{1-\dfrac{\alpha^2}{(m\omega+\mu\varpi i+k)^2}}.$$

Pag. 209. Ayant $\sum_{1}^{\mu}{}_{\mu}\theta\left(\frac{\mu}{n}\right) = \theta\left(\frac{1}{n}\right)+\theta\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+\theta\left(\frac{\mu}{n}\right)$,

on en tire

$$\sum_{1}^{\mu}{}_{\mu}\theta\left(\frac{\mu+1}{n}\right) - \sum_{1}^{\mu}{}_{\mu}\theta\left(\frac{\mu}{n}\right) = \theta\left(\frac{\mu+1}{n}\right).$$

Soit $\frac{\mu}{n} = x$, on aura

$$\Sigma\theta\left(x+\frac{1}{n}\right) - \Sigma\theta(x) = \theta\left(x+\frac{1}{n}\right);$$

ou bien

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{\Sigma\theta\left(x+\frac{1}{n}\right)-\Sigma\theta(x)}{\frac{1}{n}}\right\}=\theta\left(x+\frac{1}{n}\right);$$

donc en faisant n infini

$$\lim\frac{1}{n}\cdot\frac{d\Sigma\theta(x)}{dx}=\theta(x),$$

et en intégrant

$$\lim\frac{1}{n}\Sigma\theta(x)=\int\theta(x)dx,$$

c'est-à-dire

$$\lim\frac{1}{n}\sum_1^{\mu}{}_{\mu}\theta\left(\frac{\mu}{n}\right)=\int_0^x\theta(x)dx.$$

Pag. 212. Il faut ici se rappeler que $\prod_1^n{}_m\psi(n-m)=\prod_1^n{}_m\psi(m-1)$, donc

$$\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu\left\{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{(n-m+\frac{1}{2})\omega+(n-\mu+\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}=\prod_1^n{}_m\prod_1^n{}_\mu\left\{1-\frac{\varphi^2\beta}{\varphi^2\left(\frac{(m-\frac{1}{2})\omega+(\mu-\frac{1}{2})\varpi i}{2n+1}\right)}\right\}.$$

Pag. 214. Voyez *Cauchy* Cours d'analyse de l'école royale polytechnique pag. 568 et 570.

Pag. 215. $\tang(a+b).\tang(a-b).\cot^2 b=\frac{\sin^2 a-\sin^2 b}{\cos^2 a-\sin^2 b}\cdot\frac{\cos^2 b}{\sin^2 b}$

$$=\frac{\left(\frac{\sin^2 a}{\sin^2 b}-1\right)}{\left(\frac{1-\sin^2 b-\sin^2 a}{\sin^2 b}\right)\cdot\frac{\sin^2 b}{\cos^2 b}}=-\frac{1-\frac{\sin^2 a}{\sin^2 b}}{1-\frac{\sin^2 a}{\cos^2 b}}.$$

Pag. 217. On a (voyez pag. 574 de l'ouvrage cité ci-dessus de *M. Cauchy*)

$$\frac{h^v+h^{-v}}{2}=\prod_0^{\infty}{}_\mu\left(1+\frac{4v^2}{(2\mu+1)^2\pi^2}\right).$$

Par cette formule il est clair qu'on aura

$$\frac{2}{h^v+h^{-v}}=\sum_0^{\infty}{}_\mu\frac{A_{2\mu+1}}{1+\frac{4v^2}{(2\mu+1)^2\pi^2}},$$

où $A_{2\mu+1}$ est déterminé par l'équation

$$A_{2\mu+1}=\frac{2\left(1+\frac{4v^2}{(2\mu+1)^2\pi^2}\right)}{h^v+h^{-v}}\text{ pour }1+\frac{4v^2}{(2\mu+1)^2\pi^2}=0,$$

or cette valeur de $A_{2\mu+1}$ est de la forme $\frac{0}{0}$; donc

$$A_{2\mu+1} = \frac{2.\frac{8v}{(2\mu+1)^2\pi^2}}{k^v - k^{-v}} \text{ pour } 1 + \frac{4v^2}{(2\mu+1)^2\pi^2} = 0,$$

d'où l'on tire en réduisant

$$A_{2\mu+1} = \frac{2(-1)^\mu}{(\mu+\frac{1}{2})\pi},$$

donc en substituant cette valeur dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$\frac{2}{k^v + k^{-v}} = \sum_0^\infty {}_\mu (-1)^\mu . \frac{(2\mu+1)\pi}{v^2 + (\mu+\frac{1}{2})^2\pi^2}.$$

Pag. 221. En remarquant que $\dfrac{k^{m\frac{\pi}{2}}}{k^{m\pi}-1} = \sum_0^\infty {}_n \dfrac{1}{k^{(2n+1).m\frac{\pi}{2}}}$, on voit aisément qu'on pourra aussi mettre la valeur de $\frac{\omega}{2}$ sous la forme suivante

$$\frac{\omega}{2} = 2\pi \left\{ \frac{k^{\frac{\pi}{2}}}{k^\pi + 1} + \frac{k^{\frac{3\pi}{2}}}{k^{3\pi}+1} + \frac{k^{\frac{5\pi}{2}}}{k^{5\pi}+1} + \dots \right\}.$$

Pag. 223 Tout nombre premier de la forme $4\nu + 1$ est une somme de deux carrés. Voyez *Legendre* théorie des nombre pag. 60 ou pag. 178.

Pag. 228. On voit que v est une fonction rationnelle de θ et $\sqrt{-1}$, en se rappelant que les coefficiens de l'équation $R = 0$ sont de la forme $A + B\sqrt{-1}$, où A et B sont des nombres rationnels.

Pag. 229. Il faut observer que les nombres $n_1, n_2, \dots n_\mu$ doivent être différents entre eux, car si p. ex. $n_\mu = n_\nu$, on aurait $\dfrac{m_\mu}{1+2^{n_\mu}} + \dfrac{m_\nu}{1+2^{n_\nu}} = \dfrac{m'}{1+2^{n_\mu}}$. Donc la valeur de la fonction $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ ne peut pas être exprimée par des racines carrées, si n contient un facteur de la forme $(1+2^{n'})^p$, p étant plus grand que l'unité.

Pag. 233. La valeur de $\frac{\varphi_1 \varepsilon}{\varphi \varepsilon}$ pour $\varepsilon = 0$ se tire de l'équation (235).

Pag. 235. On a $e_1 = \pm \dfrac{i}{k.\varphi_1\left(\frac{\varpi i}{2}\right)}$ et $y = k\psi x$, donc $\mp e_1 iy = \dfrac{\psi x}{\varphi_1\left(\frac{\varpi i}{2}\right)}$, $1 \pm e_1 iy = 1 - \dfrac{\psi x}{\varphi_1\left(\frac{\varpi i}{2}\right)}$. Si maintenant dans l'équation (237) on fait $\varepsilon = \frac{\varpi i}{2}$ on aura

$$1-\frac{\psi x}{\varphi_1\left(\frac{\varpi i}{2}\right)}=\left\{1-\frac{x}{\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\right)}\right\}\cdot\frac{s^2}{\rho}=(1+eix)\cdot\frac{s^2}{\rho}$$

en remarquant qu'en vertu de (230) on a $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}+(2n-m')\alpha\right)=\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}-(m'+1)\alpha\right)$, et que $\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\right)=-\frac{1}{ei}$. Donc

$$1\pm e_1 iy=(1+eix)\cdot\frac{s^2}{\rho},$$

et en changeant le signe de i

$$1\mp e_1 iy=(1-eix)\cdot\frac{s_1^2}{\rho}.$$

Pag. **236.** Les équations (238) et et 243) donnent

$$R=\left(1-\frac{\psi x}{\varphi_1\varepsilon}\right)\rho=\rho-\frac{gx}{\varphi_1\varepsilon}\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2 2\alpha}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\varphi^2 n\alpha}\right),$$

donc en remarquant que ρ est seulement du degré $2n$, on voit que le coefficient de x^{2n+1} dans cette expression de R est

$$\frac{-(-1)^n}{\varphi_1\varepsilon}\cdot\frac{g}{(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^2}.$$

$\varphi_1\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{kc_1}$ et $\varphi_1\left(\frac{\varpi i}{2}\right)=\pm\frac{i}{ke_1}$ en vertu de (247) et (251).

Pag. **239.** L'équation (273) se tire de (272) et (268).

Pag. **240.** L'auteur dit que $\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)}$ est positif par ce que tt_1 est réel, mais il me semble que tt_1 pourrait être réel quand même la quantité $\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)}$ serait négative, car en vertu de (249) on a $tt_1=\pm\rho\sqrt{\left(\frac{1-y^2}{1-x^2}\right)}$. La raison pourquoi $\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)}$ est toujours positif c'est que y est égal à zéro en même temps que x, que $\sqrt{(1-x^2)}$ et $\sqrt{(1-y^2)}$ sont tous deux positifs lorsque x et y sont très petits, et enfin que y devient égal à l'unité en même temps que x. En effet l'équation (271) donne pour $x=1$

$$y=(-1)^n\cdot\frac{f.\left[\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)-1\right]\left[\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)-1\right]\ldots\left[\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)-1\right]}{\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)\right]\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right)\right]\ldots\left[1+e^2\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)\right]}.$$

Or $1-\varphi^2\alpha=f^2\alpha$ et $1+e^2\varphi^2\alpha=F^2\alpha$, donc

$$y = f \cdot \frac{f^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot f^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) \ldots f^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot F^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) \ldots F^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)},$$

de plus $\frac{f\alpha}{F\alpha} = c\varphi\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right) = \varphi\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right)$, c étant $= 1$, donc

$$y = f \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2\omega}{2n+1}\right) \ldots \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{n\omega}{2n+1}\right),$$

$$f = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n+\frac{1}{2}} \cdot \varphi^2\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \ldots \varphi^2\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)}, \text{ donc}$$

$$y = \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2\omega}{2n+1}\right) \ldots \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\varphi^2\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \ldots \varphi^2\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)}.$$

Or il est facile de voir que cette fraction est égale à l'unité, en remarquant que $\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\mu\omega}{2n+1}\right) = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\mu\omega}{2n+1}\right) = \varphi^2\left(\frac{2n-2\mu+1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$, d'où l'on voit qu'en donnant à μ toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à n, les facteurs du numérateur seront les mêmes que ceux du dénominateur, mais dans l'ordre inverse. Donc $x = 1$ donne $y = 1$.

Pag. 241. En faisant dans l'équation (271) $x = \varphi\left(\frac{\omega}{2(2n+1)}\right)$ et ayant égard à la valeur de f, on voit que cette valeur de x donne $y = (-1)^n$. En effet, soit pour abréger $\frac{\omega}{2n+1} = \alpha$, on a

$$\frac{\varphi^2(\mu\alpha) - \varphi^2\frac{\alpha}{2}}{1 + e^2\varphi^2(\mu\alpha)\varphi^2\frac{\alpha}{2}} = \varphi\left((2\mu+1)\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \varphi\left((2\mu-1)\frac{\alpha}{2}\right), \text{ donc}$$

$$y = (-1)^n \cdot \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}}\, \varphi\frac{\alpha}{2} \cdot \varphi\frac{3\alpha}{2} \cdot \varphi\frac{\alpha}{2} \cdot \varphi\frac{5\alpha}{2} \cdot \varphi\frac{3\alpha}{2} \ldots \varphi(2n+1)\frac{\alpha}{2} \cdot \varphi(2n-1)\frac{\alpha}{2},$$

or $\varphi(2n+1)\frac{\alpha}{2} = \varphi\frac{\omega}{2} = 1$, et $\sqrt{e_1} = e^{n+\frac{1}{2}} \cdot \left(\varphi\frac{\alpha}{2} \cdot \varphi\frac{3\alpha}{2} \ldots \varphi(2n-1)\frac{\alpha}{2}\right)^2$, donc $y = (-1)^n$.

Suivant la définition de la fonction $\varphi\alpha$ on a

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}} \text{ lorsque } x = \varphi\alpha; \text{ donc}$$

$$\int_0^{(-1)^n}\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y^2)]}}=a\int_0^{\varphi\frac{\alpha}{2}}\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}}=a.\frac{\alpha}{2}=\frac{a\omega}{2(2n+1)};$$

donc

$$\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2y)]}}=\frac{\omega}{2(2n+1)}(-1)^n$$

en remarquant que

$$\int_0^{-1}\psi(x)dx=-\int_0^1\psi(x)dx,\ \text{lorsque}\ \psi(-x)=-\psi(x).$$

L'expression de y (280) s'obtient en éliminant f de (271) et (272), et en mettant ensuite pour $a.(-1)^n$ sa valeur $(2n+1).\frac{\pi}{\omega}$.

Dans le cas $\alpha=\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}$ l'équation (263) donnera en y faisant $c=c_1=1$ et $\pm(-1)^n=1$:

$$\frac{1}{e_1}=e^{2n-1}.\left[\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}+\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right).\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}+2.\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\dots\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}+n.\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)\right]^4.$$

Soit $m.2\mu=(2n+1)t\pm a_m$ où t est entier, et a_m entier positif et moindre que $\frac{2n+1}{2}$, on aura

$$\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}+m.\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\pm\frac{a_m\varpi i}{2n+1}+t\varpi i\right)=(-1)^t\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\pm\frac{a_m\varpi i}{2n+1}\right)$$
$$=\pm\varphi\left(\frac{2n-2a_m+1}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right).$$

On peut donc écrire la valeur de $\frac{1}{e_1}$ comme suit:

$$\frac{1}{e_1}=e^{2n-1}.\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right).\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right)\dots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right)\right]^4.$$

Pag. **242.** On a

$$a'=\frac{1}{f.\delta^2(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{f.\left[\varphi\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right).\varphi\left(\frac{2\varpi i}{2n+1}\right)\dots\varphi\left(\frac{n\varpi i}{2n+1}\right)\right]^2},$$

en remarquant que $\varphi\left(m.\frac{2\mu\varpi i}{2n+1}\right)=\varphi\left(t\varpi i+\frac{a_m\varpi i}{2n+1}\right)=\pm\varphi\left(\frac{a_m\varpi i}{2n+1}\right)$ lorsque $m.2\mu=(2n+1)t\pm a_m$. Or

$$f=\frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}}=e^{2n}.\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right).\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right)\dots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right)\right]^2;$$

donc

$$a'=\frac{(-1)^n}{e^{2n}.\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right).\varphi\left(\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right).\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right)\dots\varphi\left(\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{\varpi i}{2}\right)\right]^2}.$$

Pag. **243.** **La première des équations (284) donne**

$$e^n = \frac{1}{e.\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\dots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\right]^2}; \quad x=\varphi\left(\frac{\omega}{4n+2}\right) \text{ donne}$$

$$y=\sqrt{-1}.e^n.\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\dots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\right]^2,$$

donc en substituant la valeur de e^n,

$$y=\frac{\sqrt{-1}}{e}=z\sqrt{-1},$$

et par suite $x=\varphi\left(\frac{\omega}{4n+2}\right)$ donne $z=\frac{1}{e}$.

Lorsque $x=z\sqrt{-1}$, $z=0$ donne $x=0$ et $y=0$, et $z=\frac{1}{e}$ donne $x=\frac{\sqrt{-1}}{e}$ et, en faisant pour abréger $\frac{\omega}{2n+1}=\alpha$,

$$y=\frac{1}{e^{n+1}}\cdot\frac{(e^2\varphi^2\alpha+1)(e^2\varphi^2 2\alpha+1)\dots(e^2\varphi^2 n\alpha+1)}{(1-\varphi^2\alpha)(1-\varphi^2 2\alpha)\dots(1-\varphi^2 n\alpha)};$$

or $\frac{1-\varphi^2\mu\alpha}{1+e^2\varphi^2\mu\alpha}=\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\varphi\left(\frac{\omega}{2}-\alpha\right)=\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)$ (Voyez (13), (17)) donc

$$y=\frac{1}{e^{n+1}}\cdot\frac{1}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\dots\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)}=1,$$

en substituant la valeur de $\frac{1}{e^{n+1}}$ et ayant égard à la formule

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\mu\omega}{2n+1}\right)=\varphi^2\left(\frac{2n-2\mu+1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right).$$

Pag. **251.** **L'expression de $\frac{t}{t_1}$ se tire de (248).**

Lorsque $\alpha=\frac{2m\omega}{2n+1}$ et $m=-1$, on a $\alpha=-\frac{2\omega}{2n+1}$,

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\mu\alpha\right)=\varphi\left(\frac{2n-4\mu+1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right), \text{ donc}$$

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)=\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right),\quad \varphi\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)=-\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)=\varphi\left(\frac{2n-7}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right),\quad \varphi\left(\frac{\omega}{2}+(n-1)\alpha\right)=-\varphi\left(\frac{2n-5}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right).$$

etc.

Pag. **252.** **Si l'on fait dans l'équation (257) $c=1$ et $e^2=-k^2$, on a**

$$\left.\begin{array}{l}(-k^2)^n.(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha\dots\varphi n\alpha)^2.\varphi\varepsilon.\varphi(\varepsilon+\alpha).\varphi(\varepsilon+2\alpha)\dots\varphi(\varepsilon+2n\alpha)\\ =\varphi\varepsilon+\varphi(\varepsilon+\alpha)+\varphi(\varepsilon+2\alpha)+\dots+\varphi(\varepsilon+2n\alpha)\end{array}\right\}\text{(a)}$$

où $\alpha=\frac{(m+\mu)\omega+(m-\mu)\varpi i}{2n+1}$. Si l'on fait $m=\mu=-1$, on aura $\alpha=-\frac{2\omega}{2n+1}$ et par suite

$$(\varphi\alpha.\varphi 2\alpha\ldots\varphi n\alpha)^2=\left(\varphi\frac{2\omega}{2n+1}.\varphi\frac{4\omega}{2n+1}\ldots\varphi\frac{2n\omega}{2n+1}\right)^2. \quad \text{(b)}$$

En faisant maintenant $\varepsilon=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}$, on aura

$$\varphi(\varepsilon+\mu\alpha)=-\varphi\left(\frac{4\mu-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)=\varphi\left(\frac{4(\mu-n)-3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\varphi\left(\varepsilon+\frac{n+1}{2}\alpha\right)=-\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=-1 \text{ lorsque } n \text{ est impair}$$

$$\text{et}\quad \varphi\left(\varepsilon+\frac{3n+2}{2}\alpha\right)=1 \text{ lorsque } n \text{ est pair.}$$ On tire de là

$$\left.\begin{array}{l}\varphi\varepsilon.\varphi(\varepsilon+\alpha).\varphi(\varepsilon+2\alpha)\ldots\varphi(\varepsilon+2n\alpha)=\\ \pm\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right).\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right).\varphi\left(\frac{5}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\ldots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\right]^2\end{array}\right\}\text{(c)}$$

Donc si l'on fait $\varphi\left(\frac{\mu}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)=\sin\theta^{(\mu)}$, on tirera des équations (a), (b) et (c)

$$\left.\begin{array}{l}(-k^2)^n.(\sin\theta''.\sin\theta''''\ldots\sin\theta^{(2n)})^2.(\sin\theta'.\sin\theta'''\ldots\sin\theta^{(2n-1)})^2\\ =\pm\left(1-2\varphi\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}+2\varphi\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\ldots\pm2\varphi\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\\ =\pm2(\tfrac{1}{2}-\sin\theta'+\sin\theta'''-\ldots\pm\sin\theta^{(2n-1)})\end{array}\right\}\text{(d)}$$

Si l'on fait ensuite $\varepsilon=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}$, en se rappelant que

$$iec\varphi\left(\alpha+\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}\right)=iec\varphi\left(\alpha-\frac{\omega}{2}-\frac{\varpi i}{2}\right)=\frac{1}{\varphi\alpha}=k.\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}-\alpha\right),$$

on aura $k.\varphi(\varepsilon+\mu\alpha)=k.\varphi\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi i}{2}-\frac{4\mu-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)=\frac{1}{\varphi\left(\frac{4\mu-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}$,

$$k.\varphi\left(\varepsilon+\frac{n+1}{2}\alpha\right)=\ 1 \text{ lorsque } n \text{ est impair}$$

$$\text{et}\quad k.\varphi\left(\varepsilon+\frac{3n+2}{2}\alpha\right)=-1 \text{ lorsque } n \text{ est pair.}$$

Donc

$$k^{2n+1}.\varphi\varepsilon.\varphi(\varepsilon+\alpha).\varphi(\varepsilon+2\alpha)\ldots\varphi(\varepsilon+2n\alpha)=\frac{1}{\left[\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right).\varphi\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\ldots\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\right]^2} \quad \text{(e)}$$

$$k(\varphi\varepsilon+\varphi(\varepsilon+\alpha)+\varphi(\varepsilon+2\alpha)+\cdots\varphi(\varepsilon+2n\alpha))=\pm2\left\{\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}-\frac{1}{\left(\varphi\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}+\cdots\pm\frac{1}{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)}\mp\tfrac{1}{2}\right\} \text{(f)}$$

Donc on tirera des équations (a), (b), (e(et (f):

$$(-1)^n\cdot\frac{(\sin\theta''\sin\theta''''\ldots\sin\theta^{(2n)})^2}{(\sin\theta'.\sin\theta'''\ldots\sin\theta^{(2n-1)})^2}=2(\text{cosec}\,\theta'-\text{cosec}\,\theta'''+\cdots\mp\text{cosec}\,\theta^{(2n-1)}\pm\tfrac{1}{2}).\ (g)$$

Donc l'identité des deux expressions de μ, celle de *Mr. Jacobi* et celle de l'auteur est démontrée. Si l'on divise l'équation (d) membre à membre par l'équation (g), il viendra

$$k^{2n}.(\sin\theta'.\sin\theta'''\ldots\sin\theta^{(2n-1)})^4=\frac{\sin\theta'-\sin\theta'''+\ldots\mp\sin\theta^{(2n-1)}\pm\frac{1}{2}}{\text{cosec}\,\theta'-\text{cosec}\,\theta'''+\ldots\mp\text{cosec}\,\theta^{(2n-1)}\pm\frac{1}{2}}.$$

En multipliant cette équation de part et d'autre par k, on aura l'égalité des deux expressions de λ.

Pag. 258. Dans l'équation

$$\frac{fg'-f'g}{\sqrt{[(g'^2-c_1^2f'^2)(g'^2-e_1^2f'^2)]}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\left[\left(1+\frac{g+c_1f}{g'+c_1f'}.x\right)\left(1+\frac{g-c_1f}{g'-c_1f'}.x\right)\left(1+\frac{g+e_1f}{g'+e_1f'}x\right)\left(1+\frac{g-e_1f}{g'-e_1f'}x\right)\right]}}$$

$$=\pm a.\frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)]}},$$

soit pour abréger $\frac{fg'-f'g}{\sqrt{(g'^2-c_1^2f'^2)(g'^2-e_1^2f'^2)}}=A$ et les coefficiens de x sous le radical du premier membre suivant leur ordre k, k', l, l', on aura

$$A^2(1-c^2x^2)(1-e^2x^2)=a^2(1+kx)(1+k'x)(1+lx)(1+l'x).$$

$$(1+kx)(1+k'x)=1+\frac{2(gg'-c_1^2ff')}{g'^2-c_1^2f'^2}.x+\frac{g^2-c_1^2f^2}{g'^2-c_1^2f'^2}.x^2,$$

$$(1+lx)(1+l'x)=1+\frac{2(gg'-e_1^2ff')}{g'^2-e_1^2f'^2}.x+\frac{g^2-e_1^2f^2}{g'^2-e_1^2f'^2}.x^2.$$

Soit de plus pour abréger

$$\left.\begin{aligned}\frac{2(gg'-c_1^2ff')}{g'^2-c_1^2f'^2}&=B,\\ \frac{g^2-c_1^2f^2}{g'^2-c_1^2f'^2}&=C,\\ \frac{2(gg'-e_1^2ff')}{g'^2-e_1^2f'^2}&=B',\\ \frac{g^2-e_1^2f^2}{g'^2-e_1^2f'^2}&=C',\end{aligned}\right\}\ (\alpha)$$

on aura

$$A^2(1-(c^2+e^2)x^2+c^2e^2x^4)=a^2(1+(B+B')x+(C+BB'+C')x^2+(B'C+BC')x^3+CC'x^4).$$

On tire de cette équation

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= a^2, \\ B + B' &= 0, \\ C + BB' + C' &= -(e^2 + c^2), \\ B'C + BC' &= 0, \\ CC' &= c^2e^2 \end{aligned}\right\} (\beta)$$

En éliminant B' des équations $B + B' = 0$ et $B'C + BC' = 0$, on obtient

$$B(C' - C) = 0; \quad (\gamma)$$

donc, ou $B = 0 = B'$, ou $C' - C = 0$.

Soit d'abord $B = 0 = B'$, on aura

$$gg' - c_1^2 ff' = 0 \text{ et } gg' - e_1^2 ff' = 0.$$

Ces deux équations donnent, en remarquant que c_1 ne doit pas être égal à e_1,

$$gg' = 0 \text{ et } ff' = 0.$$

On en conclut,

$$\text{ou } g = 0 \text{ et } f' = 0$$

$$\text{ou } g' = 0 \text{ et } f = 0,$$

car g et f ne peuvent pas être égaux à zéro à la fois, ni g' et f', puisque ces valeurs rendraient y constant.

a) $g = 0$ et $f' = 0$ donne $C = -\frac{c_1^2 f^2}{g'^2}$, $C' = -\frac{e_1^2 f^2}{g'^2}$, $a^2 = \frac{f^2}{g'^2}$,

donc

$$C + C' = -\frac{(c_1^2 + e_1^2)f^2}{g'^2} = -(c^2 + e^2),$$

$$CC' = \frac{c_1^2 \cdot e_1^2 \cdot f^4}{g'^4} = c^2e^2,$$

d'où l'on tire

$$\text{ou } c_1^2 = \frac{c^2}{a^2} \text{ et } e_1^2 = \frac{e^2}{a^2},$$

$$\text{ou } c_1^2 = \frac{e^2}{a^2} \text{ et } e_1^2 = \frac{c^2}{a^2},$$

$$y = \frac{f}{g'}x = \pm ax.$$

b) $g' = 0$ et $f = 0$ donne les mêmes valeurs pour c_1^2 et e_1^2 que dans le cas précédent, et pour y celle-ci

$$y = \pm \frac{a}{ecx}.$$

Si B est différent de zéro, on aura $C' = C$ et $B' = -B$, c'est-à-dire

$$\frac{g^2 - c_1^2 f^2}{g'^2 - c_1^2 f'^2} = \frac{g^2 - e_1^2 f^2}{g'^2 - e_1^2 f'^2} = C \quad (\delta)$$

et $\frac{2(gg'-c_1^2ff')}{g'^2-c_1^2f'^2} = -\frac{2(gg'-e_1^2ff')}{g'^2-e_1^2f'^2} = B \quad (\varepsilon)$

En éliminant successivement c_1^2 et e_1^2 de ces équations et remarquant que $fg'-f'g$ ne peut pas être égal à zéro par ce que cela rendrait y constant, on obtiendra

$$2fg-(fg'+f'g)B+2f'g'C=0, \quad (\zeta)$$
$$2fg+(fg'+f'g)B+2f'g'C=0, \quad (\eta)$$

La somme de ces équations donne

$$fg+f'g'.C=0, \quad (\theta)$$

et en retranchant (ζ) de (η) et remarquant que B est différent de zéro, on aura

$$fg'+f'g=0. \quad (\iota)$$

Les deux dernières équations donnent

$$f'=\pm\frac{f}{\sqrt{C}} \text{ et } g'=\mp\frac{g}{\sqrt{C}}. \quad (\varkappa)$$

Substituant ces valeurs dans les équations (ε) on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{g^2+c_1^2f^2}{g^2-c_1^2f^2} &= \mp\frac{B}{2\sqrt{C}}, \\ \frac{g^2+e_1^2f^2}{g^2-e_1^2f^2} &= \pm\frac{B}{2\sqrt{C}}, \end{aligned}\right\} \quad (\lambda)$$

d'où l'on tire en ajoutant et réduisant

$$g^4=e_1^2c_1^2f^4, \text{ donc } g^2=\pm e_1c_1f^2. \quad (\mu)$$

Maintenant les équations (β) donnent, lorsque B est différent de zéro:

$$\left.\begin{aligned} &\text{ou } B=\pm(c+e) \text{ et alors } C= \quad ce, \\ &\text{ou } B=\pm(c-e) \text{ et alors } C=-ce \end{aligned}\right\} \quad (\nu)$$

Supposons d'abord $\mp B=c+e$, $\sqrt{C}=\sqrt{ce}$, substituons ces valeurs dans (λ) et pour g^2 la valeur $e_1c_1f^2$, nous en tirerons

$$e_1=\left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{e}}{\sqrt{c}-\sqrt{e}}\right)^2.c_1.$$

Faisant maintenant $\left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{e}}{\sqrt{c}-\sqrt{e}}\right).c_1=\frac{1}{m}$, on aura

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{m}\left(\frac{\sqrt{c}-\sqrt{e}}{\sqrt{c}+\sqrt{e}}\right), \\ e_1 &= \frac{1}{m}\left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{e}}{\sqrt{c}-\sqrt{e}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (\xi)$$

Des équations $(\varkappa)$ et (μ) on tire

$$(fg'-f'g)^2=\frac{4e_1c_1f^4}{ce}$$

$$(g'^2-c_1^2f'^2)(g'^2-e_1^2f'^2)=-\frac{e_1c_1(e_1-c_1)^2.f^4}{e^2c^2}, \text{ donc}$$

$$\frac{(fg'-f'g)^2}{(g'^2-c_1^2f'^2)(g'^2-e_1^2f'^2)}=-\frac{4ce}{(e_1-c_1)^2}=a^2.$$

Or les équations (ξ) donnent $e_1-c_1=\frac{4}{m}\cdot\frac{\sqrt{ce}}{c-e}$; donc on trouvera

$$a=\frac{m\sqrt{-1}}{2}(c-e).$$

En substituant dans l'équation

$$y=\frac{f'+fx}{g'+gx}$$

les valeurs de f', g' et g, et réduisant on aura

$$y=\pm m\left(\frac{1\pm x\sqrt{ce}}{1\mp x\sqrt{ce}}\right).$$

Les équation ($\varkappa$), (λ), (μ) et (ν) montrent qu'on peut prendre les quantités c, e, $\sqrt{c}$, $\sqrt{e}$ avec quel signe qu'on voudra. En remarquant que les 6 quantités f', f, g', g, e_1, c_1 ne doivent satisfaire qu'à 5 équations (β), on peut les faire dépendre d'une quantité indéterminée m.

Pag 261. L'équation (28) a lieu non seulement pour une valeur quelconque de θ, mais aussi pour une valeur quelconque de δ. (Voyez l'équation (237) pag. 232).

Pag. 263. En vertu de (32) on a $1-c_1y=\frac{P}{\rho}$, où P est une fonction du degré $2n+1$, on aura donc en différentiant

$$\rho^2.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{c_1}\left(\frac{Pd\rho}{dx}-\rho\frac{dP}{dx}\right);$$

or ρ étant du degré $2n$, il est clair que $\rho^2.\frac{dy}{dx}$ est du degré $4n$. Que cette fonction est divisible par t et t', on en trouve la démonstration pag. 235.

Pag. 265. Lorsque $\alpha_1=\frac{2\omega}{2n+1}$, on aura $\alpha_\mu=\frac{2\mu\omega}{2n+1}$; car $\lambda(\theta+\alpha)$ étant une quelconque des quantités $\lambda(\theta+\alpha_1)$, $\lambda(\theta+\alpha_2)$ etc. on sait que $\lambda(\theta+\mu\alpha)$ sera égale à l'une d'entre elles. Donc si $\alpha_1=\frac{2\omega}{2n+1}$, $\lambda\left(\theta+\frac{2\mu\omega}{2n+1}\right)$ sera une de ces fonctions pour toute valeur entière de μ.

La valeur de k se déduit de la première des équations (47). La valeur de e_1 se trouve en divisant la 1re par la 2de des équations (47) et remarquant qu'en vertu de (18) et (16) on a $\frac{\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\theta\right)}{\lambda\left(\frac{\omega'}{2}-\theta\right)}=ec\lambda^2\left(\frac{\omega}{2}-\theta\right)$.

L'équation (41) donne

$$a = \frac{e^{2n}}{k}(\lambda\alpha_1 . \lambda\alpha_2 \ldots \lambda\alpha_n)^4.$$

Soit pour abréger $\lambda\left(\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right).\lambda\left(\frac{3}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right)\ldots\lambda\left(\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\omega}{2}\right) = N$, on a

$$k = b.e^{2n}.N^2, \text{ donc}$$

$$a = \frac{(\lambda\alpha_1 . \lambda\alpha_2 \ldots \lambda\alpha_n)^4}{bN^2},$$

or $b = (\lambda\alpha_1 . \lambda\alpha_2 \ldots \lambda\alpha_n)^2$, donc lorsque $\alpha_1 = \frac{2\omega}{2n+1}$,

$$a = \left\{\frac{\lambda\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right).\lambda\left(\frac{4\omega}{2n+1}\right)\ldots\lambda\left(\frac{2n\omega}{2n+1}\right)}{N}\right\}^2;$$

donc en substituant la valeur de N et remarquant que $\lambda\left(\frac{2n-2\mu}{2n+1}.\omega\right) = \lambda\left(\frac{2\mu+1}{2n+1}.\omega\right)$, on aura l'expression de a.

L'expression de y se trouve en substituant dans (45) la valeur de α_1 et celle de k.

Pag. 267. $\lambda(\theta+\alpha)$ et $\lambda(\theta+\alpha_1)$ étant deux quelconques des fonctions λ où α et α_1 sont de la forme $\mu\omega+\mu'\omega'$, μ et μ' étant des nombres rationnels, on sait (Théorème IV) que $\lambda(\theta+k_1\alpha+k_2\alpha_1)$ où k_1 et k_2 sont des nombres entiers quelconques, sera de même l'une d'entre elles. Donc α étant égal à $\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}$ et α_1 égal à $\frac{\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}$, on en conclut, en faisant $k_1 = 1$ et $k_2 = -1$, que $\lambda\left(\theta+\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}-\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = \lambda(\theta+\omega)$ se trouvera nécessairement parmi ces fonctions.

$\lambda(\theta+\beta) = \pm\frac{1}{ce}\cdot\frac{1}{x}$ (voyez 19). L'équation (55) se tire de (24), (25), (26).

Pag. 268. On obtiendra l'équation (61) en faisant dans (24) et (26) $\varepsilon = \frac{\omega-\beta}{2}$, $\varepsilon' = -\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)$ et en concluant comme on l'a fait pour obtenir l'expression de $1-c_1^2y^2$.

La valeur de a est

$$a = \pm\frac{fg'-f'g}{\sqrt{(g'^2-e_1^2f'^2)(g'^2-c_1^2f'^2)}};$$

$$\text{or}\quad f = g' = 0, \text{ donc } a = \mp\frac{f'g}{e_1c_1f'^2} = \frac{k}{e_1c_1};$$

mais (voyez (11)) $e_1c_1 = \frac{ec}{a^2}$, donc $a = \frac{ec}{k}$.

Lorsqu'on fait $n=0$, $c_1=c=1$, $\beta=\frac{3\omega}{2}+\frac{\omega'}{2}$, on trouvera

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=1+\frac{1}{e},\quad 1=k\left(1+\frac{1}{e}\right),\quad \text{donc } k=\frac{e}{1+e}; \text{ (voy. 62)}$$

$$\lambda\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)=-\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right),\ \lambda\left(\frac{\omega-\beta}{2}+\beta\right)=-\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right);$$

donc

$$\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)=-2\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=\pm\frac{2}{\sqrt{e}}.$$ En effet on a

$$\lambda(2\theta)=\frac{2\lambda\theta.\Delta\theta}{1-e^2\lambda^4\theta}.$$

Faisant donc $\theta=\frac{\omega+\omega'}{4}$, $\lambda\theta=\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)=x$, on aura

$$\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right)=\frac{2x\sqrt{[(1-x^2)(1-e^2x^2)]}}{1-e^2x^4}=\frac{1}{0},$$

et par suite $1-e^2x^4=0$, d'où $x=\pm\frac{1}{\sqrt{e}}=\lambda\left(\frac{\omega+\omega'}{4}\right)$.

On aura par conséquent $e_1=\frac{2\sqrt{e}}{1+e}$.

Pag. 269. On a $\lambda\theta=-\lambda(\theta+\omega)$ et $\lambda(\theta+\alpha)+\lambda(\theta-\alpha)=-\big(\lambda(-\theta+\alpha)+\lambda(-\theta-\alpha)\big)$; donc $\varphi(-\theta)=-\varphi\theta=\varphi\theta$, et par conséquent $\varphi\theta=0$.

On sait qu'en nommant S_1 la somme des racines d'une équation algébrique du m^{me} degré, S_2 la somme de leurs carrés, A_1 le coefficient de x^{m-1}, A_2 le coefficient de x^{m-2}, on aura

$$S_2+A_1S_1+2A_2=0;$$

donc lorsque $S_1=0$,

$$A_2=-\tfrac{1}{2}S_2=\tfrac{1}{2}(f'-g'y).$$

La formule (65) est démontrée dans le mémoire suivant pag. 279.

Pag. 273. En faisant $z=\frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}$ on aura

$$\int_0^{\frac{1}{e}}\frac{dz}{\sqrt{[(1+z^2)(1+e_1^2z^2)]}}=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-e^2y^2)]}}=\frac{\omega}{2}$$

en remarquant que $e_1^2=1-e^2$.

Pag. 276. Lorsque $\lambda\theta'=\lambda\theta$ on en tire

$$\theta'=(-1)^{\mu+\mu'}.\theta+\mu\omega+\mu'(\omega+\varpi\sqrt{-1}),\ \text{c'est-à-dire}$$

$$\theta'=(-1)^{\mu+\mu'}.\theta+(\mu+\mu')\omega+\mu'\varpi\sqrt{-1};$$

donc en faisant $\mu+\mu'=m$, $\mu'=m'$,

$$\theta'=(-1)^m.\theta+m\omega+m'\varpi\sqrt{-1}.$$

Pag. 280. $x = \sqrt{(1-y^2)}$ donne

$$\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} = -\frac{1}{b} \cdot \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}}, \text{ donc}$$

$$b\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} = -\int_1^0 \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}}$$

c'est-à-dire $b \cdot \frac{\omega}{2} = \frac{\omega'}{2}$.

On a $\frac{\varpi}{2} = \int_1^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{[(x^2-1)(1-c^2x^2)]}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-b^2y^2)]}}$ en faisant $x = \frac{1}{\sqrt{(1-b^2y^2)}}$. Si l'on fait $x = \sqrt{(1+z^2)}$, on trouvera

$$b\int_1^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\sqrt{[(x^2-1)(1-c^2x^2)]}} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dz}{\sqrt{[(1+z^2)(1-e^2z^2)]}} = b\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-b^2x^2)]}},$$

c'est-à-dire $\frac{\varpi'}{2} = b \cdot \frac{\varpi}{2}$.

En mettant $b\left(\frac{\omega}{2} - \alpha\right)$ au lieu de α dans l'équation (28) et réduisant, il viendra successivement:

$$\lambda\alpha = \overset{\infty}{\underset{0}{\Pi}}_m \left\{\frac{1 - \left(\frac{r^{-\frac{1}{2}}.t - r^{\frac{1}{2}}t^{-1}}{r^{-m-\frac{1}{2}} - r^{m+\frac{1}{2}}}\right)^2}{1 + \left(\frac{r^{-\frac{1}{2}}.t - r^{\frac{1}{2}}t^{-1}}{r^{-m-\frac{1}{2}} + r^{m+\frac{1}{2}}}\right)^2}\right\} = \overset{\infty}{\underset{0}{\Pi}}_m \left\{\frac{1 - \frac{(r^mt - r^{m+1}t^{-1})^2}{(1-r^{2m+1})^2}}{1 + \frac{(r^mt - r^{m+1}t^{-1})^2}{(1+r^{2m+1})^2}}\right\};$$

$$\lambda\alpha = \overset{\infty}{\underset{0}{\Pi}}_m \left[\left(\frac{1+r^{2m+1}}{1-r^{2m+1}}\right)^2 \left(\frac{(1-r^{2m+1})^2 - (r^mt - r^{m+1}t^{-1})^2}{(1+r^{2m+1})^2 + (r^mt - r^{m+1}t^{-1})^2}\right)\right];$$

$$\lambda\alpha = \overset{\infty}{\underset{0}{\Pi}}_m \left[\left(\frac{1+r^{2m+1}}{1-r^{2m+1}}\right)^2 \left(\frac{1 - r^{2m}t^2 + r^{4m+2} - r^{2m+2}t^{-2}}{1 + r^{2m}t^2 + r^{4m+2} + r^{2m+2}t^{-2}}\right)\right];$$

$$\lambda\alpha = \overset{\infty}{\underset{0}{\Pi}}_m \left[\left(\frac{1+r^{2m+1}}{1-r^{2m+1}}\right)^2 \left(\frac{(1-r^{2m}t^2)(1-r^{2m+2}t^{-2})}{(1+r^{2m}t^2)(1+r^{2m+2}t^{-2})}\right)\right],$$

ce qui est l'équation (34) de l'auteur en faisant

$$\overset{\infty}{\underset{0}{\Pi}}_m \left(\frac{1+r^{2m+1}}{1-r^{2m+1}}\right)^2 = A.$$

Pag. 281. L'équation (36) peut s'écrire ainsi:

$$\lambda\alpha = A.\psi\left(\alpha\frac{\pi}{\varpi}\right) . \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_m \psi(m\omega + \alpha)\frac{\pi}{\varpi} . \psi(m\omega - \alpha)\frac{\pi}{\varpi}.$$

En y mettant $\theta + \frac{\mu}{n}\omega$ à la place de α on aura

$$\lambda\left(\theta + \frac{\mu}{n}\omega\right) = A.\psi\left(\theta + \frac{\mu}{n}\omega\right)\frac{\pi}{\varpi} . \overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}_m \psi\left[\left(m + \frac{\mu}{n}\right)\omega + \theta\right]\frac{\pi}{\varpi} . \psi\left[\left(m - \frac{\mu}{n}\right)\omega - \theta\right]\frac{\pi}{\varpi};$$

c'est-à-dire

$$\lambda\left(\theta+\frac{\mu}{n}\omega\right)=A.\psi(\mu\omega_1+\delta)\frac{\pi}{\varpi_1}.\prod_1^{\infty}{}_m\psi((mn+\mu)\omega_1+\delta)\frac{\pi}{\varpi_1}.\psi((mn-\mu)\omega_1-\delta)\frac{\pi}{\varpi_1}$$

On en conclut en faisant pour abréger $\frac{\pi}{\varpi_1}=k$

$$\prod_0^{n-1}{}_\mu\lambda\left(\theta+\frac{\mu}{n}\omega\right)=A^n.\prod_0^{n-1}{}_\mu\psi(\mu\omega_1+\delta)k.\prod_0^{n-1}{}_\mu\prod_1^{\infty}{}_m[\psi((mn+\mu)\omega_1+\delta)k.\psi((mn-\mu)\omega_1-\delta)k];$$

donc en développant

$$\prod_0^{n-1}{}_\mu\lambda\left(\theta+\frac{\mu}{n}\omega\right)=A^n.\prod_0^{n-1}{}_\mu\psi(\mu\omega_1+\delta)k.\psi((n+\mu)\omega_1+\delta)k.\psi((2n+\mu)\omega_1+\delta)k\dots$$
$$\times\prod_0^{n-1}{}_\mu\psi((n-\mu)\omega_1-\delta)k.\psi((2n-\mu)\omega_1-\delta)k.\psi((3n-\mu)\omega_1-\delta)k\dots$$

mais

$$\prod_0^{n-1}{}_\mu\psi((n+\mu)\omega_1+\delta)k=\prod_n^{2n-1}{}_\mu\psi(\mu\omega_1+\delta)k;\ \prod_0^{n-1}{}_\mu\psi((2n+\mu)\omega_1+\delta)k=\prod_{2n}^{3n-1}{}_\mu\psi(\mu\omega_1+\delta)k\text{ etc.}$$

donc

$$\prod_0^{n-1}{}_\mu\psi(\mu\omega_1+\delta)k.\psi((n+\mu)\omega_1+\delta)k.\psi((2n+\mu)\omega_1+\delta)k\dots$$
$$=\prod_0^{\infty}{}_\mu\psi(\mu\omega_1+\delta)k=\psi\delta k.\prod_0^{\infty}{}_\mu\psi((\mu+1)\omega_1+\delta)k;$$

on aura de même

$$\prod_0^{n-1}{}_\mu\psi((n-\mu)\omega_1-\delta)k=\prod_0^{n-1}{}_\mu\psi((\mu+1)\omega_1-\delta)k;\ \prod_0^{n-1}{}_\mu\psi((2n-\mu)\omega_1-\delta)k=\prod_0^{n-1}{}_\mu\psi((n+\mu+1)\omega_1-\delta)k=$$
$$\prod_n^{2n-1}{}_\mu\psi((\mu+1)\omega_1-\delta)k;\ \prod_0^{n-1}{}_\mu\psi((3n-\mu)\omega_1-\delta)k=\prod_0^{n-1}{}_\mu\psi((2n+\mu+1)\omega_1-\delta)k=\prod_{2n}^{3n-1}{}_\mu\psi((\mu+1)\omega_1-\delta)k\text{ etc.}$$

donc

$$\prod_0^{n-1}{}_\mu\psi((n-\mu)\omega_1-\delta)k.\psi((2n-\mu)\omega_1-\delta)k.\psi((3n-\mu)\omega_1-\delta)k\dots=\prod_0^{\infty}{}_\mu\psi((\mu+1)\omega_1-\delta)k;$$

on en conclut

$$\prod_0^{n-1}{}_\mu\lambda\left(\theta+\frac{\mu}{n}\omega\right)=A^n.\psi\delta k.\prod_0^{\infty}{}_\mu[\psi((\mu+1)\omega_1+\delta).\psi((\mu+1)\omega_1-\delta)],$$

ce qui est la formule (37).

En faisant $\lambda\theta=x$ on aura

$$\lambda\left(\frac{\mu\omega}{n}+\theta\right).\lambda\left(\frac{\mu\omega}{n}-\theta\right)=\frac{\lambda^2\left(\frac{\mu\omega}{n}\right)-x^2}{1-e^2\lambda^2\left(\frac{\mu\omega}{n}\right).x^2}.$$

Cette formule, en remarquant que $\lambda\left(\theta+\frac{n-\mu}{n}\omega\right)=\lambda\left(\frac{\mu\omega}{n}-\theta\right)$, et, si n est un nombre pair, que le produit $\lambda\theta.\lambda\left(\theta+\frac{\omega}{n}\right)\ldots\lambda\left(\theta+\frac{n-1}{n}\omega\right)$ contiendra le facteur $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\theta\right)=\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-c^2x^2}\right)}$, donne les équations (43) et (44).

Pag. 283. Si dans l'équation (34) on fait $\alpha=\frac{\omega}{2}$, on aura $\lambda\alpha=1$ et $t=r^{\frac{1}{4}}$, donc

$$1=A\left(\frac{1-r}{1+r}\cdot\frac{1-r^3}{1+r^3}\cdot\frac{1-r^5}{1+r^5}\cdots\right)^2 \quad \text{(a)}$$

En vertu de l'équation $\frac{\omega'}{2}=\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1}$, où

$$\frac{\omega'}{2}=\int_0^{\frac{1}{c}}\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

on trouvera, en posant dans l'équation (34) $\alpha=\frac{\omega}{2}+\frac{\varpi}{2}\sqrt{-1}$,

$$\lambda\alpha=\frac{1}{c},\ t=-r^{\frac{1}{4}}.\sqrt{-1};\ \text{donc}\ t^2=-r,\ \text{et par là}$$

$$\frac{1}{c}=A\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{1+r^3}{1-r^3}\cdot\frac{1+r^5}{1-r^5}\cdots\right)^2 \quad \text{(b)}$$

Les équations (a) et (b) donnent $\frac{1}{c}=A^2$, et par suite $A=\frac{1}{\sqrt{c}}$.

Pag. 286. Les équations (a) et (b) ci-dessus donnent immédiatement

$$\sqrt[4]{c}=\frac{1-r}{1+r}\cdot\frac{1-r^3}{1+r^3}\cdot\frac{1-r^5}{1+r^5}\cdots \quad \text{où}\ r=e^{-\pi.\frac{\omega}{\varpi}};$$

de cette formule on obtient la valeur de $\sqrt[4]{b}$ en échangeant ω et ϖ entre eux.

Pag. 291. On a $\frac{1}{F\alpha}=\frac{1}{A(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\ldots(\alpha-x_\mu)}$, donc

$$\frac{1}{F\alpha}=\frac{C_1}{\alpha-x_1}+\frac{C_2}{\alpha-x_2}+\ldots\frac{C_\mu}{\alpha-x_\mu},\ \text{où}\ C_\nu=\frac{1}{F'x_\nu},$$

donc

$$\frac{1}{F\alpha}=\frac{1}{(\alpha-x_1)F'x_1}+\frac{1}{(\alpha-x_2)F'x_2}+\ldots+\frac{1}{(\alpha-x_\mu)F'x_\mu}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{F\alpha}=\sum_1^\mu{}_\nu\frac{1}{(\alpha-x_\nu)F'x_\nu}=-\Sigma\frac{1}{(x-\alpha)F'x}.$$

La fonction $\frac{\lambda\alpha}{(x-\alpha)Fx}$ étant de là forme $\frac{A}{x^{\mu+1}+a_1x^{\mu}+a_2x^{\mu-1}+\ldots+a_{\mu+1}}$, le développement de cette fonction selon les puissances ascendantes de $\frac{1}{x}$ sera de la forme

$$\frac{b_1}{x^{\mu+1}}+\frac{b_2}{x^{\mu+2}}+\ldots;$$

$$\text{donc } \Pi\frac{\lambda\alpha}{(x-\alpha)Fx}=0,\ \mu \text{ étant } > 0.$$

Pag. 293 Si l'on suppose $fx=\alpha x^n+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}+\ldots$, le degré de cette fonction étant moindre que la moitié de celui de φx, on doit avoir

$$\sqrt{\varphi x}=\beta x^{n+1}+\beta_1x^n+\ldots$$

donc $$\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}=\frac{\alpha}{\beta x^2}+\ldots, \text{ et par suite}$$

$$\Pi\frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi x}}=0.$$

Pag. 294. L'auteur dit (7) que le second membre de l'équation (29) se réduit à une constante, lorsque le degré de $(fx)^2$ est moindre que celui de φx; mais cela ne suffit pas. Si le second membre de (29) doit se réduire à une constante, le degré de $(fx)^2$, augmenté de deux unités, doit être moindre que celui de φx, car les relations entre v' et v, établies dans le théorème VI, sont nécessaires.

Pag. 295. Le nombre des indéterminées $a_0, a_1, \ldots c_0, c_1, \ldots$ est égal à $m+n+2$, mais on peut diviser les deux membres de l'équation (3) par l'une quelconque de ces quantités, de sorte qu'après cette division le nombre des indéterminées se réduit à $m+n+1$.

Pag. 299. Les équations (16) et (17) de la page 148 donnent

$$f\left(\frac{\omega}{2}-b\alpha\right)=\frac{\varphi(b\alpha).\sqrt{(1+e^2)}}{\sqrt{[1+e^2\varphi^2(b\alpha)]}}=\frac{v\sqrt{(1+e^2)}}{\sqrt{(1+e^2v^2)}}=\lambda\alpha=x,$$

en faisant pour abréger $\varphi(b\alpha)=v$.

On tire de là

$$\frac{dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1+e^2v^2)]}}=\frac{bdx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

donc $$\int_0\frac{dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1+e^2v^2)]}}=b.\int_0\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}=b\alpha$$

et

$$\int_0^1\frac{dv}{\sqrt{[(1-v^2)(1+e^2v^2)]}}=b\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}=b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}}=\frac{\omega}{2}.$$

On a en général

$$\int_a^b \psi x . dx = \int_{\frac{a}{m}}^{\frac{b}{m}} \psi(mx).mdx,$$

et par suite

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-b^2x^2)]}} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{edx}{\sqrt{[(1-e^2x^2)(1-c^2x^2)]}};$$

$$\text{or} \quad ex = \frac{ev\sqrt{(1+e^2)}}{\sqrt{(1+e^2v^2)}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{u}{\sqrt{(1+u^2)}} \quad \text{en faisant } ev = u.$$

On en tire

$$\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{edx}{\sqrt{[(1-e^2x^2)(1-c^2x^2)]}} = \frac{1}{b}\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{du}{\sqrt{[(1+u^2)(1-e^2u^2)]}},$$

et de la

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-b^2x^2)]}} = \frac{1}{b}\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{du}{\sqrt{[(1+u^2)(1-e^2u^2)]}} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\varpi}{2},$$

d'où

$$\frac{\varpi}{2} = b\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-b^2x^2)]}}.$$

$$\lambda''\alpha = \sqrt{\left[1 - c^2 f^2\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right)\right]} = \sqrt{\left[1 - c^2 + c^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right)\right]}$$

$$= b\sqrt{\left[1 + e^2\varphi^2\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right)\right]} = bF\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right).$$

Pag. 300. L'équation (9) est la même que l'équation (34) de la page 280. En faisant dans l'équation (184) p. 216, $\alpha = \frac{\omega}{2} - b\theta$, on aura

$$\lambda'\theta = \frac{1}{2}\frac{\varpi}{\pi}(\varrho r^{-\frac{1}{2}} - \varrho^{-1}r^{\frac{1}{2}}) \prod_1^\infty{}_m \left\{\frac{1 - \left(\frac{\rho r^{-\frac{1}{2}} - \rho^{-1}.r^{\frac{1}{2}}}{r^{-m} - r^m}\right)^2}{1 + \left(\frac{\rho r^{-\frac{1}{2}} - \rho^{-1}.r^{\frac{1}{2}}}{r^{-(m-\frac{1}{2})} + r^{m-\frac{1}{2}}}\right)^2}\right\},$$

et de là en réduisant

$$\lambda'\theta = \frac{1}{2}\frac{\varpi}{\pi}(\varrho r^{-\frac{1}{2}} - \varrho^{-1}r^{\frac{1}{2}}) \prod_1^\infty{}_m \left[\left(\frac{1+r^{2m-1}}{1-r^{2m}}\right)^2 \left(\frac{(1-\rho^2 r^{2m-1})(1-\rho^{-2}r^{2m+1})}{(1+\rho^2 r^{2m-2})(1+\rho^{-2}r^{2m})}\right)\right];$$

c'est-à-dire

$$\lambda'\theta = \frac{1}{2}\frac{\varpi}{\pi}\prod_1^\infty{}_m \left(\frac{1+r^{2m-1}}{1-r^{2m}}\right)^2 . (\varrho r^{-\frac{1}{2}} - \varrho^{-1}r^{\frac{1}{2}}) \left(\frac{(1-\rho^2 r)(1-\rho^{-2}r^3)(1-\rho^2 r^3)(1-\rho^{-2}r^5)(1-\rho^2 r^5)\ldots}{(1+\rho^2)(1+\rho^{-2}r^2)(1+\rho^2 r^2)(1+\rho^{-2}r^4)(1+\rho^2 r^4)\ldots}\right)$$

ou bien

$$\lambda'\theta = \frac{1}{2}\frac{\varpi}{\pi} . \prod_1^\infty{}_m \left(\frac{1+r^{2m-1}}{1-r^{2m}}\right)^2 . \left(\frac{\rho r^{-\frac{1}{2}} - \rho^{-1}r^{\frac{1}{2}}}{1-\rho^{-2}r}\right) . \left(\frac{(1-\rho^2 r)(1-\rho^{-2}r)(1-\rho^2 r^3)(1-\rho^{-2}r^3)\ldots}{(1+\rho^2)(1+\rho^2 r^2)(1+\rho^{-2}r^2)(1+\rho^2 r^4)(1+\rho^{-2}r^4)\ldots}\right);$$

or $$\frac{\rho r^{-\frac{1}{2}}-\rho^{-1}r^{\frac{1}{2}}}{1-\rho^{-2}r}=\rho r^{-\frac{1}{2}},$$ donc

$$\lambda'\theta=\tfrac{1}{2}\frac{\varpi}{\pi}\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi_m}}\left(\frac{1+r^{2m-1}}{1-r^{2m}}\right)^2\cdot\frac{\rho\cdot r^{-\frac{1}{2}}}{1+\rho^2}\left(\frac{(1-\rho^2 r)(1-\rho^{-2}r)(1-\rho^2 r^3)(1-\rho^{-2}r^3)\dots}{(1+\rho^2 r^2)(1+\rho^{-2}r^2)(1+\rho^2 r^4)(1+\rho^{-2}r^4)\dots}\right).$$

On peut donc poser (10)

$$\lambda'\theta=A'.\frac{2\rho}{1+\rho^2}\left(\frac{(1-\rho^2 r)(1-\rho^{-2}r)(1-\rho^2 r^3)(1-\rho^{-2}r^3)\dots}{(1+\rho^2 r^2)(1+\rho^{-2}r^2)(1+\rho^2 r^4)(1+\rho^{-2}r^4)\dots}\right),$$

où A' est constant. Si l'on fait $\theta=0$, on aura $\lambda'\theta=1$ et $\rho=1$, et par suite

$$1=A'\left(\frac{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\dots}{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\dots}\right)^2,$$

d'où l'on tire l'équation (12) de l'auteur.

En faisant dans l'équation (186) p. 216 $\alpha=\frac{\omega}{2}-b\theta$, on trouvera

$$\lambda''\theta=\frac{b}{2}(r^{-\frac{1}{2}}\rho+r^{\frac{1}{2}}\rho^{-1})\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi_m}}\left\{\frac{1-\left(\frac{r^{-\frac{1}{2}}\rho-r^{\frac{1}{2}}\rho^{-1}}{r^{-m}+r^m}\right)^2}{1+\left(\frac{r^{-\frac{1}{2}}\rho-r^{\frac{1}{2}}\rho^{-1}}{r^{-(m-\frac{1}{2})}+r^{m-\frac{1}{2}}}\right)^2}\right\}$$

d'où en réduisant

$$\lambda''\theta=B(\rho r^{-\frac{1}{2}}+\rho^{-1}r^{\frac{1}{2}})\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi_m}}\left(\frac{(1+\rho^2 r^{2m-1})(1+\rho^{-2}r^{2m+1})}{(1+\rho^2 r^{2m-2})(1+\rho^{-2}r^{2m})}\right),$$

où B est constant. Donc en développant

$$\lambda''\theta=B\left(\frac{\rho r^{-\frac{1}{2}}+\rho^{-1}r^{\frac{1}{2}}}{1+\rho^{-2}r}\right).\frac{1}{1+\rho^2}.\left(\frac{(1+\rho^2 r)(1+\rho^{-2}r)(1+\rho^2 r^3)(1+\rho^{-2}r^3)\dots}{(1+\rho^2 r^2)(1+\rho^{-2}r^2)(1+\rho^2 r^4)(1+\rho^{-2}r^4)\dots}\right).$$

Donc en remarquant que $\frac{\rho r^{-\frac{1}{2}}+\rho^{-1}r^{\frac{1}{2}}}{1+\rho^{-2}r}=\rho r^{-\frac{1}{2}}$, on peut poser (11)

$$\lambda''\theta=A''.\frac{2\rho}{1+\rho^2}\left(\frac{(1+\rho^2 r)(1+\rho^{-2}r)(1+\rho^2 r^3)(1+\rho^{-2}r^3)\dots}{(1+\rho^2 r^2)(1+\rho^{-2}r^2)(1+\rho^2 r^4)(1+\rho^{-2}r^4)\dots}\right),$$

où A'' est constant. Faisant $\theta=0$, on aura $\lambda''\theta=b.F\left(\frac{\omega}{2}\right)=b\sqrt{(1+e^2)}=1$, et $\rho=1$, donc

$$1=A''\left(\frac{(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\dots}{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\dots}\right)^2;$$

d'où l'on tire l'équation (13) de l'auteur.

Pag. 301. Ayant $\lambda\alpha=f\left(\frac{\omega}{2}-b\alpha\right)$, on a en faisant $\alpha=\frac{\omega'}{2}+\frac{\varpi'}{2}i$,

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{2}+\frac{\varpi'}{2}i\right)=f\left(b.\frac{\varpi'}{2}i\right)=f\left(\frac{\varpi}{2}i\right)=\frac{\sqrt{(1+e^2)}}{e}.$$

$$\rho^2=e^{-\frac{\omega'}{\varpi'}\pi-\pi i}=r.e^{-\pi i}=r.(\cos\pi-i\sin\pi)=-r.$$

On trouvera

$$\frac{ib}{c}=A'.\frac{2i\sqrt{r}}{1-r}.\frac{(1+r^2)(2)(1+r^4)(1+r^2)\ldots}{(1-r^3)(1-r)(1-r^5)(1-r^3)\ldots}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$\frac{b}{c}=4A'.\sqrt{r}\left(\frac{(1+r^2)(1+r^4)\ldots}{(1-r)(1-r^3)\ldots}\right)^2.$$

L'équation (12) donne

$$A'=\left(\frac{(1+r^2)(1+r^4)\ldots}{(1-r)(1-r^3)\ldots}\right)^2,$$

donc $$4A'^2\sqrt{r}=\frac{b}{c}, \text{ d'où } A'=\frac{1}{2\sqrt[4]{r}}\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

Pag 302. $$\rho^2=e^{-\frac{2\theta\pi}{\varpi'}}=1-\frac{2\theta\pi}{\varpi'}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{2\theta\pi}{\varpi'}\right)^2-\ldots$$

donc $$1-\rho^2=\frac{2\theta\pi}{\varpi'}-\ldots$$

On a

$$\frac{1}{1-r}=\frac{1+r}{1-r^2}$$

$$\frac{1}{1-r^3}=\frac{1+r^3}{1-r^6}$$

$$\frac{1}{1-r^5}=\frac{1+r^5}{1-r^{10}}$$

. . . .

donc

$$\frac{1}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\ldots}=\frac{(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\ldots}{(1-r^2)(1-r^6)(1-r^{10})\ldots},$$

et par conséquent

$$\frac{1}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\ldots}=(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\ldots=PP'.$$

Pag. 303. Les formules (24, 25, 26) que l'auteur a déduites des formules (10, 9, 11) peuvent, ce me semble, se tirer plus aisément des formules (189, 187, 188) pag. 218, 217. Si dans l'équation (189) on fait $\alpha=\frac{\omega}{2}-b.\frac{\omega'}{\pi}x$, on aura $f\alpha=\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)$, $\frac{\alpha\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}-x$, donc

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\sin x.\prod_1^\infty{}_m\left\{\frac{1-\frac{4\cos^2 x}{(q^{-m}+q^m)^2}}{1-\frac{4\cos^2 x}{(q^{-(m-\frac{1}{2})}+q^{m-\frac{1}{2}})^2}}\right\}$$

$$=\sin x.\prod_1^\infty{}_m\left(\frac{q^{-(m-\frac{1}{2})}+q^{m-\frac{1}{2}}}{q^{-m}+q^m}\right)^2\left(\frac{(q^{-m}+q^m)^2-4\cos^2 x}{(q^{-(m-\frac{1}{2})}+q^{m-\frac{1}{2}})^2-4\cos^2 x}\right);$$

or $$\frac{(q^{-m}+q^m)^2-4\cos^2 x}{(q^{-(m-\frac{1}{2})}+q^{m-\frac{1}{2}})^2-4\cos^2 x}=\frac{q^{2m-1}}{q^{2m}}\left(\frac{1-2q^m.\cos 2x+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}.\cos 2x+q^{4m-2}}\right)$$

donc

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=B.\sin x\,\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left(\frac{1-2q^{2m}.\cos 2x+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}.\cos 2x+q^{4m-2}}\right),\quad \text{(a)}$$

où B est indépendant de x.

Si l'on fait $x=\frac{\pi}{2}$, on aura $\lambda\left(\frac{\omega'}{2}\right)=f\left(\frac{\omega}{2}-b\frac{\omega'}{2}\right)=f0=1$, donc

$$1=B\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left(\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\right)^2.\quad \text{(b)}$$

Si l'on fait $x=\frac{\pi}{2}+\frac{\varpi'}{\omega'}\cdot\frac{\pi i}{2}$, on aura $\sin x=\frac{q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1+q}{2q^{\frac{1}{2}}}$, $2\cos 2x$ $=-(q+q^{-1})$, $\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=f\frac{\varpi i}{2}=\frac{1}{c}$, donc

$$\frac{1}{c}=\frac{B(1+q)}{2q^{\frac{1}{2}}}\cdot\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left(\frac{1+q^{2m+1}+q^{2m-1}+q^{4m}}{1+q^{2m}+q^{2m-2}+q^{4m-2}}\right)=\frac{B(1+q)}{2q^{\frac{1}{2}}}\cdot\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left(\frac{(1+q^{2m-1})(1+q^{2m+1})}{(1+q^{2m})(1+q^{2m-2})}\right);$$

or $\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m(1+q^{2m+1})=\frac{1}{1+q}\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m(1+q^{2m-1})$ et $\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m(1+q^{2m-2})=2\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m(1+q^{2m})$, donc

$$\frac{1}{c}=\frac{B}{4q^{\frac{1}{2}}}\cdot\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left(\frac{1+q^{2m-1}}{1+q^{2m}}\right)^2.$$

En multipliant cette équation membre à membre par l'équation (b) ci-dessus, on obtient

$$\frac{1}{c}=\frac{B^2}{4q^{\frac{1}{2}}},\ \text{d'ou}\ B=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{c}}.$$

Cette valeur de B étant substituée dans l'équation (a) donne la formule (24) de l'auteur.

Si dans l'équation (187) on fait $\alpha=\frac{\omega}{2}-b\frac{\omega'}{\pi}x$, on aura $\varphi\alpha=\lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)$, donc

$$\lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=\frac{\omega}{\pi}\cos x\,\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left\{\frac{1+\frac{4\cos^2 x}{(q^{-m}-q^m)^2}}{1-\frac{4\cos^2 x}{(q^{-(m-\frac{1}{2})}+q^{m-\frac{1}{2}})^2}}\right\},\ \text{ou bien}$$

$$\lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)=B'\cos x\,\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left(\frac{1+2q^{2m}.\cos 2x+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}.\cos 2x+q^{4m-2}}\right),\quad \text{(c)}$$

où B' est indépendant de x.

$x=0$ donne $1=B'.\overset{\infty}{\underset{1}{\Pi}}{}_m\left(\frac{1+q^{2m}}{1-q^{2m-1}}\right)^2.$

$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\varpi}{\omega'} \cdot \frac{\pi i}{2}$ donne $\lambda^{\prime}\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = -\varphi\left(\frac{\varpi i}{2}\right) = -\frac{i}{e}$, $\cos x = \frac{i}{2} \cdot (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})$,
donc

$$\frac{-i}{e} = B' \cdot \frac{i}{2}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) \prod_{1}^{\infty}{}_{m} \left(\frac{1 - q^{2m}(q + q^{-1}) + q^{4m}}{1 + q^{2m-1}(q + q^{-1}) + q^{4m-2}}\right),$$

et de là en réduisant

$$\frac{1}{e} = \frac{B'}{4q^{\frac{1}{2}}} \prod_{1}^{\infty}{}_{m} \left(\frac{1 - q^{2m-1}}{1 + q^{2m}}\right)^2; \text{ donc}$$

$$\frac{1}{e} = \frac{B'^2}{4q^{\frac{1}{2}}} = \frac{b}{c}; \quad \text{donc } B' = 2\sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt[4]{q}.$$

Cette valeur de B' étant substituée dans l'équation (c) donne la formule (25) de l'auteur.

En faisant les mêmes substitutions dans l'équation (188) on aura

$$\lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = b \prod_{0}^{\infty}{}_{m} \left\{\frac{1 + \frac{4\cos^2 x}{(q^{-(m+\frac{1}{2})} - q^{m+\frac{1}{2}})^2}}{1 - \frac{4\cos^2 x}{(q^{-(m+\frac{1}{2})} + q^{m+\frac{1}{2}})^2}}\right\} = B'' \prod_{0}^{\infty}{}_{m} \left(\frac{1 + 2q^{2m+1} \cdot \cos 2x + q^{4m+2}}{1 - 2q^{2m+1} \cdot \cos 2x + q^{4m+2}}\right),$$

où B'' est constant.

$$x = 0 \text{ donne } \lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = b.F\left(\frac{\omega}{2}\right) = b.\sqrt{(1 + e^2)} = 1, \text{ donc}$$

$$1 = B'' . \prod_{0}^{\infty}{}_{m} \left(\frac{1 + q^{2m+1}}{1 - q^{2m+1}}\right)^2.$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ donne } \lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \lambda''\left(\frac{\omega'}{2}\right) = b.F\left(\frac{\omega}{2} - b.\frac{\omega'}{2}\right) = b.F0 = b;$$

donc

$$b = B'' . \prod_{0}^{\infty}{}_{m} \left(\frac{1 - q^{2m+1}}{1 + q^{2m+1}}\right)^2, \text{ d'où l'on tire}$$

$$b = B''^2 \text{ ou } B'' = \sqrt{b}.$$

Cette valeur de B'' étant substituée dans l'expression de $\lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)$ ci-dessus donne la formule (26) de l'auteur.

Pag. 304. On a

$$\log \prod_{1}^{\infty}{}_{m} \left(\frac{1 - 2q^{2m} . \cos 2x + q^{4m}}{1 - 2q^{2m-1} . \cos 2x + q^{4m-2}}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{m} \log\left(\frac{(1 - q^{2m} . e^{2xi})(1 - q^{2m} . e^{-2xi})}{(1 - q^{2m-1} . e^{2xi})(1 - q^{2m-1} . e^{-2xi})}\right).$$

Or $\quad \log(1 - pe^{2xi}) = -(pe^{2xi} + \frac{1}{2}p^2 e^{4xi} + \frac{1}{3}p^3 e^{6xi} + \ldots)$,

$\quad \log(1 - pe^{-2xi}) = -(pe^{-2xi} + \frac{1}{2}p^2 e^{-4xi} + \frac{1}{3}p^3 e^{-6xi} + \ldots)$;

donc $\quad \log(1 - pe^{2xi})(1 - pe^{-2xi}) = \log(1 - 2p\cos 2x + p^2)$

$$= -2(p\cos 2x + \tfrac{1}{2}p^2 \cos 4x + \tfrac{1}{3}p^3 \cos 6x + \ldots).$$

On tire de là

$$\log\left(\frac{1-2q^{2m}.\cos 2x+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}.\cos 2x+q^{4m-2}}\right)=$$

$$-2(q^{2m-1}.(q-1)\cos 2x+\tfrac{1}{2}q^{4m-2}.(q^2-1)\cos 4x+\tfrac{1}{3}q^{6m-3}.(q^3-1)\cos 6x+\ldots).$$

Or en remarquant que $\sum\limits_{1}^{\infty}{}_m q^{2\alpha m-\alpha}=\frac{q^\alpha}{1-q^{2\alpha}}$,

et que par suite

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m q^{2\alpha m-\alpha}.(q^\alpha-1)=\frac{q^\alpha(q^\alpha-1)}{1-q^{2\alpha}}=-\frac{q^\alpha}{1+q^\alpha}, \text{ on aura}$$

$$\log\prod_{1}^{\infty}{}_m\left(\frac{1-2q^{2m}.\cos 2x+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}.\cos 2x+q^{4m-2}}\right)=2\left(\cos 2x.\frac{q}{1+q}+\tfrac{1}{2}\cos 4x.\frac{q^2}{1+q^2}+\tfrac{1}{3}\cos 6x.\frac{q^3}{1+q^3}+\ldots\right).$$

En changeant le signe de p on aura

$$\log(1+2p\cos 2x+p^2)=2(p.\cos 2x-\tfrac{1}{2}p^2.\cos 4x+\tfrac{1}{3}p^3.\cos 6x-\ldots).$$

On obtiendra par là et en remarquant que $\sum\limits_{1}^{\infty}{}_m q^{2\alpha m-\alpha}.(q^\alpha+1)=\frac{q^\alpha}{1-q^\alpha}$:

$$\log\frac{1+2q^{2m}.\cos 2x+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}.\cos 2x+q^{4m-2}})=2(q^{2m-1}.(q+1)\cos 2x-\tfrac{1}{2}q^{4m-2}.(q^2-1)\cos 4x+\tfrac{1}{3}q^{6m-3}.(q^3+1)\cos 6x-\ldots);$$

$$\log\prod_{1}^{\infty}{}_m\frac{1+2q^{2m}.\cos 2x+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}.\cos 2x+q^{4m-2}})=2\left(\cos 2x.\frac{q}{1-q}+\tfrac{1}{2}\cos 4x.\frac{q^2}{1+q^2}+\tfrac{1}{3}\cos 6x.\frac{q^3}{1-q^3}+\ldots\right)$$

De la même manière on trouvera

$$\log\left(\frac{1+2q^{2m+1}.\cos 2x+q^{4m+2}}{1-2q^{2m+1}.\cos 2x+q^{4m+2}}\right)=4(q^{2m+1}.\cos 2x+\tfrac{1}{3}q^{6m+3}.\cos 6x+\tfrac{1}{5}q^{10m+5}.\cos 10x+\ldots)$$

et de là

$$\log\prod_{0}^{\infty}{}_m\left(\frac{1+2q^{2m+1}.\cos 2x+q^{4m+2}}{1-2q^{2m+1}.\cos 2x+q^{4m+2}}\right)=4\left(\cos 2x.\frac{q}{1-q^2}+\tfrac{1}{3}\cos 6x.\frac{q^3}{1-q^6}+\ldots\right).$$

De ce qui précède on tirera immédiatement les formules (28), (29) et (30). Il faut observer que dans les formules (204) et (205) p. 219 la quantité r est la même chose que $r^{-\frac{1}{2}}$ dans les formules (35) et (36) ici.

Pag. 308. Ayant

$$\sqrt{\frac{\omega'}{\pi}}=1+2q+2q^4+2q^9+\ldots=Q,$$

on aura

$$\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}}=1+2r+2r^4+2r^9+\ldots=R;$$

donc

$$\frac{\varpi'}{\omega'}=\frac{R^2}{Q^2},$$

or

$$r=e^{-\frac{\omega'}{\varpi'}\pi},\quad q=e^{-\frac{\varpi'}{\omega'}\pi};$$

donc $\frac{\omega'}{\varpi'}\pi = \log\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\varpi'}{\omega'}\pi = \log\left(\frac{1}{q}\right),$

et de là

$$\frac{\varpi'^2}{\omega'^2} = \frac{\log\left(\frac{1}{q}\right)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{R^4}{Q^4};$$

donc $\frac{1}{2} Q \sqrt[4]{\log\left(\frac{1}{q}\right)} = \frac{1}{2} R \sqrt[4]{\log\left(\frac{1}{r}\right)},$

ce qui est la formule de Mr. *Cauchy*.

Pag. 310. L'expression de c^1 se tire des deux équations (47) p. 264 en divisant la première par la seconde, remarquant que $\lambda\left(\frac{\omega'}{2}+\theta\right).\lambda\left(\frac{\omega'}{2}-\theta\right)=\frac{1}{ec}$, $\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\theta\right)=\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\theta\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega'}{2}+\theta\right)=\lambda\left(\frac{\omega'}{2}-\theta\right)$, faisant $c=c^1=1$ et écrivant ensuite c pour e.

L'expression de a se tire de l'équation (41) p. 264. Cette équation donne en faisant $c=1$, écrivant c au lieu de e et substituant les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$

$$a = \frac{c^{2n}}{k} \lambda^4(\alpha).\lambda^4(2\alpha)\ldots\lambda^4(n\alpha).$$

Les équations (47) donnent après les mêmes substitutions, en faisant leur produit et substituant la valeur de b de (46),

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{c^{n-\frac{1}{2}}.c'^{\frac{1}{2}}.\lambda^2(\alpha).\lambda^2(2\alpha)\ldots\lambda^2(n\alpha)};$$

donc

$$a = \frac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} \lambda^2\alpha.\lambda^2(2\alpha)\ldots\lambda^2(n\alpha).$$

Pag. 313. $\omega^1-\omega$ étant égal à ϖi on voit que $\lambda^2\left(\frac{\omega'-\omega}{2n+1}\right)$ est réel; donc e et par suite c^1 est réel pour cette valeur de α, en remarquant que

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right) = \frac{\frac{1}{c}\Delta\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}{1-e^2\lambda^2\left(\frac{\mu\varpi i}{2n+1}\right)}$$ est une quantité réelle.

Pag. 314. En vertu de l'équation $\lambda^2\theta=\lambda^2(\theta\pm m\omega)$, où m est un entier, on a

$$\lambda^2\left(\frac{\varpi i+(2\mu+1)\omega}{2n+1}\right) = \lambda^2\left(\frac{\varpi i+2(n+\mu+1)\omega}{2n+1}\right) = \lambda^2\left(\frac{\varpi i-2(n-\mu)\omega}{2n+1}\right);$$

donc

$$\lambda^2\left(\frac{\varpi i+\omega}{2n+1}\right)=\lambda^2\left(\frac{\varpi i+2(n+1)\omega}{2n+1}\right),\ \lambda^2\left(\frac{\varpi i+3\omega}{2n+1}\right)=\lambda^2\left(\frac{\varpi i+2(n+2)\omega}{2n+1}\right)\ldots\lambda^2\left(\frac{\varpi i+(2n+1)\omega}{2n+1}\right)=\lambda^2\left(\frac{\varpi i}{2n+1}\right).$$

L'équation (12) est la même que l'équation (24) pag. 303 en faisant dans celle-ci $x = \frac{\pi}{\omega}\theta$.

En vertu du théorème de Moivre on a

$$\frac{x^{2n+1}+1}{x+1} = \overset{n-1}{\underset{0}{\Pi_\mu}} \left(x^2 - 2x.\cos\frac{(2\mu+1)\pi}{2n+1} + 1\right). \quad (\alpha)$$

$$\frac{x^{2n+1}-1}{x-1} = \overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}} \left(x^2 - 2x.\cos\frac{2\mu\pi}{2n+1} + 1\right). \quad (\beta)$$

En multipliant ces deux équations membre à membre il viendra

$$\frac{x^{4n+2}-1}{x^2-1} = \overset{2n}{\underset{0}{\Pi_\mu}} \left(x^2 - 2x.\cos\frac{\mu\pi}{2n+1} + 1\right).$$

Faisant dans cette équation $x^2 = -1$. on aura

$$1 = \overset{2n}{\underset{0}{\Pi_\mu}} \left(-2\sqrt{-1}.\cos\frac{\mu\pi}{2n+1}\right);$$

c'est-à-dire

$$2^{2n}(-1)^n.\cos\frac{\pi}{2n+1}.\cos\frac{2\pi}{2n+1}.\cos\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1}.\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1} = 1.$$

Or $\cos\left(\frac{(n+\mu)\pi}{2n+1}\right) = -\cos\left(\frac{(n-\mu+1)\pi}{2n+1}\right)$, donc

$$\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}.\cos\frac{(n+2)\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{2n\pi}{2n+1} = (-1)^n.\cos\frac{\pi}{2n+1}.\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1};$$

donc en substituant

$$2^{2n}.\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}.\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1}\right)^2 = 1,$$

et de là

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}.\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}. \quad (\gamma)$$

En changeant le signe de x dans l'équation (β) on aura

$$\frac{x^{2n+1}+1}{x+1} = \overset{n}{\underset{1}{\Pi_\mu}} \left(x^2 + 2x.\cos\frac{2\mu\pi}{2n+1} + 1\right). \quad (\delta)$$

Cela posé, si l'on fait dans l'équation (12) successivement $\theta = \frac{\omega}{2} + \alpha, \frac{\omega}{2} + 2\alpha, \ldots \frac{\omega}{2} + n\alpha$ et $\alpha = \frac{\omega}{2n+1}$, on aura

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right) = \frac{2}{\sqrt{c}}.\sqrt[4]{q}.\cos\frac{\pi}{2n+1}\left\{\frac{1+2q^2.\cos\frac{2\pi}{2n+1}+q^4}{1+2q.\cos\frac{2\pi}{2n+1}+q^2}.\frac{1+2q^4.\cos\frac{2\pi}{2n+1}+q^8}{1+2q^3.\cos\frac{2\pi}{2n+1}+q^6}\ldots\right\}$$

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)=\frac{2}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt[4]{q}.\cos\frac{2\pi}{2n+1}\left\{\frac{1+2q^2.\cos\frac{4\pi}{2n+1}+q^4}{1+2q.\cos\frac{4\pi}{2n+1}+q^2}\cdot\frac{1+2q^4.\cos\frac{4\pi}{2n+1}+q^8}{1+2q^3.\cos\frac{4\pi}{2n+1}+q^6}\cdots\right\}$$

. . . .

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)=\frac{2}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt[4]{q}.\cos\frac{n\pi}{2n+1}\left\{\frac{1+2q^2.\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+q^4}{1+2q.\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+q^2}\cdot\frac{1+2q^4.\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+q^8}{1+2q^3.\cos\frac{2n\pi}{2n+1}+q^6}\cdots\right\}.$$

Donc en ayant égard aux équations (γ) et (δ) on obtiendra

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right).\lambda\left(\frac{\omega}{2}+2\alpha\right)\ldots\lambda\left(\frac{\omega}{2}+n\alpha\right)=$$

$$\frac{2^n}{c^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{\sqrt[4]{q^n}}{2^n}\left(\frac{(q^{2(2n+1)}+1)(q^{4(2n+1)}+1)\ldots}{(q^{2n+1}+1)(q^{3(2n+1)}+1)\ldots}\right)\left(\frac{(1+q)(1+q^3)\ldots}{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}\right).$$

Or (voyez l'équation (16) pag. 302 où le changement de b en c entraine celui de r en q)

$$\left(\frac{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}\right)^2=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{c}}.\quad(\varepsilon)$$

Donc on déduit de là

$$\varepsilon=2\sqrt[4]{q^{2n+1}}\left(\frac{(q^{2(2n+1)}+1)(q^{4(2n+1)}+1)\ldots}{(q^{2n+1}+1)(q^{3(2n+1)}+1)\ldots}\right)^2.$$

Lorsque $\alpha=\frac{\varpi i+2\mu\omega}{2n+1}$, **on aura**

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2}+m\alpha\right)=\frac{2}{\sqrt{c}}.\sqrt[4]{q}.\cos\left(m.\frac{\varpi}{\omega}.\frac{\pi i}{2n+1}+m.\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right)\prod_1^\infty{}_\nu\left\{\frac{1+2q^{2\nu}.\cos\left(m.2\frac{\varpi}{\omega}.\frac{\pi i}{2n+1}+m.\frac{4\mu\pi}{2n+1}\right)+q^{4\nu}}{1+2q^{2\nu-1}\cos\left(m.2\frac{\varpi}{\omega}.\frac{\pi i}{2n+1}+m.\frac{4\mu\pi}{2n+1}\right)+q^{4\nu-2}}\right\}.$$

Or $\cos\left(m.\frac{\varpi}{\omega}.\frac{\pi i}{2n+1}+m.\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}(q^{\frac{1}{2n+1}}.\delta_1^\mu)^{-m}(1+(q^{\frac{1}{2n+1}}.\delta_1^\mu)^{2m})$;

$$1+2q^p.\cos\left(2m.\frac{\varpi}{\omega}.\frac{\pi i}{2n+1}+2m.\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right)+q^{2p}=(q^p+(q^{\frac{1}{2n+1}}.\delta_1^\mu)^{2m})(q^p+(q^{\frac{1}{2n+1}}.\delta_1^\mu)^{-2m}).$$

Donc si l'on fait pour abréger

$q^{\frac{1}{2n+1}}.\delta_1^\mu=k$, **on aura**

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2}+m\alpha\right)=\frac{2}{\sqrt{c}}.\sqrt[4]{q}.\tfrac{1}{2}k^{-m}(1+k^{2m})\prod_1^\infty{}_\nu\left(\frac{(q^{2\nu}+k^{2m})(q^{2\nu}+k^{-2m})}{(q^{2\nu-1}+k^{2m})(q^{2\nu-1}+k^{-2m})}\right),$$

et de là

$$\prod_1^n{}_m\lambda\left(\frac{\omega}{2}+m\alpha\right)=\frac{\sqrt[4]{q^n}}{c^{\frac{n}{2}}}.k^{-\frac{n(n+1)}{2}}.\prod_1^n{}_m(1+k^{2m}).\prod_1^n{}_m\prod_1^\infty{}_\nu\left(\frac{(q^{2\nu}+k^{2m})(q^{2\nu}+k^{-2m})}{(q^{2\nu-1}+k^{2m})(q^{2\nu-1}+k^{-2m})}\right).$$

En remarquant maintenant que $q = k^{2n+1}$ et faisant pour abréger $2\nu(2n+1) = \sigma$ et $(2\nu-1)(2n+1) = \tau$, on trouvera en substituant réduisant et carrant

$$\left[\prod_{1}^{n}{}_{m}\lambda\left(\frac{\omega}{2}+m\alpha\right)\right]^2 = \frac{\sqrt{q^n}}{c^n}.k^{-n(n+1)}.\left[\prod_{1}^{n}{}_{m}(1+k^{2m})\prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\frac{(1+k^{\sigma-2m})(1+k^{\sigma+2m})}{(1+k^{\tau-2m})(1+k^{\tau+2m})}\right)\right]^2;$$

en vertu de (ε) ci-dessus on a

$$1 = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{c}}\cdot\left[\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\frac{1+k^{\sigma}}{1+k^{\tau}}\right)\right]^2.$$

Multipliant les deux dernières équations membre par membre il viendra

$$\left[\prod_{1}^{n}{}_{m}\lambda\left(\frac{\omega}{2}+m\alpha\right)\right]^2 = \frac{2q^{\frac{2n+1}{4}}}{c^{n+\frac{1}{2}}}.k^{-n(n+1)}.\left[\prod_{1}^{n}{}_{m}(1+k^{2m}).\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\prod_{-n}^{n}{}_{m}\left(\frac{1+k^{\sigma+2m}}{1+k^{\tau+2m}}\right)\right]^2. \quad (\zeta)$$

Or on a

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\prod_{-n}^{n}{}_{m}\left(\frac{1+k^{\sigma+2m}}{1+k^{\tau+2m}}\right) = \frac{\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{\sigma+2m})}{\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{\tau+2m})};$$

mais

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{2\nu(2n+1)+2m}) = \prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{4n+2+2m}).\prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{8n+4+2m}).\prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{12n+6+2m})\ldots$$

$$\prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{4n+2+2m}) = \prod_{n+1}^{3n+1}{}_{m}(1+k^{2m}),$$

$$\prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{8n+4+2m}) = \prod_{3n+2}^{5n+2}{}_{m}(1+k^{2m}),$$

$$\prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{12n+6+2m}) = \prod_{5n+3}^{7n+3}{}_{m}(1+k^{2m}),$$

. . . .

donc $$\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{\sigma+2m}) = \prod_{n+1}^{\infty}{}_{m}(1+k^{2m}),$$

et par conséquent

$$\prod_{1}^{n}{}_{m}(1+k^{2m})\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{\sigma+2m}) = \prod_{1}^{\infty}{}_{m}(1+k^{2m}) \quad (\eta)$$

De la même manière on aura

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{(2\nu-1)(2n+1)+2m}) = \prod_{-n}^{n}{}_{m}(1+k^{2n+1+2m})(1+k^{3(2n+1)+2m})(1+k^{5(2n+1)+2m})\ldots$$

$$\prod_{-n}^{n}{}_m(1+k^{2n+1+2m})=\prod_{1}^{2n+1}{}_m(1+k^{2m-1}),$$

$$\prod_{-n}^{n}{}_m(1+k^{3(2n+1)+2m})=\prod_{2n+2}^{4n+2}{}_m(1+k^{2m-1}),$$

. . . .

donc
$$\prod_{1}^{\infty}{}_\nu\prod_{-n}^{n}{}_m(1+k^{\nu+2m})=\prod_{1}^{\infty}{}_m(1+k^{2m-1}) \quad (\theta)$$

En vertu des formules (η) et (θ) l'équation (ζ) deviendra

$$\left[\prod_{1}^{n}{}_m \lambda\left(\frac{\omega}{2}+m\alpha\right)\right]^2=\frac{2q^{\frac{2n+1}{4}}}{c^{n+\frac{1}{2}}}.k^{-n(n+1)}.\left[\prod_{1}^{\infty}{}_m\left(\frac{1+k^{2m}}{1+k^{2m-1}}\right)\right]^2$$

Or $q=k^{2n+1}$, donc $q^{\frac{2n+1}{4}}=k^{n^2+n+\frac{1}{4}}$, et par suite $q^{\frac{2n+1}{4}}.k^{-n^2-n}=k^{\frac{1}{4}}$.
On aura par conséquent

$$\varepsilon=c^{n+\frac{1}{2}}\left[\prod_{1}^{n}{}_m \lambda\left(\frac{\omega}{2}+m\alpha\right)\right]^2=2\sqrt[4]{k}\left[\prod_{1}^{\infty}{}_m\left(\frac{1+k^{2m}}{1+k^{2m-1}}\right)\right]^2.$$

En substituant dans cette équation la valeur de k on a la formule (14) de l'auteur,

Pag. 316. Si dans l'équation (β) on fait $x=1$, on trouvera aisément

$$2^n.\sin\frac{\pi}{2n+1}.\sin\frac{2\pi}{2n+1}.\sin\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\sqrt{(2n+1)}$$

et de là

$$\prod_{1}^{n}{}_m\sin\frac{m\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{(2n+1)}}{2^n} \quad (\iota)$$

Cela posé, en faisant dans la formule (12) $\theta=\frac{\omega}{2n+1}=\alpha$, on aura

$$\lambda(m\alpha)=\frac{2}{\sqrt{c}}.\sqrt[4]{q}.\sin\frac{m\pi}{2n+1}\prod_{1}^{\infty}{}_\nu\left\{\frac{1-2q^{2\nu}.\cos\frac{2m\pi}{2n+1}+q^{4\nu}}{1-2q^{2\nu-1}.\cos\frac{2m\pi}{2n+1}+q^{4\nu-2}}\right\}.$$

Donc ayant égard aux formules (β) et (ι)

$$\lambda\alpha.\lambda(2\alpha)\ldots\lambda(n\alpha)=\frac{2^n.\sqrt[4]{q^n}}{c^{\frac{n}{2}}}.\frac{\sqrt{(2n+1)}}{2^n}\left(\frac{q^{2(2n+1)}-1}{q^{2n+1}-1}.\frac{q^{4(2n+1)}-1}{q^{3(2n+1)}-1}\ldots\right)\left(\frac{q-1}{q^2-1}.\frac{q^3-1}{q^4-1}\ldots\right). \quad (\varkappa)$$

Si dans l'équation (12) on divise les deux membres par θ et qu'on fasse ensuite $\theta=0$, on obtiendra en remarquant que $\frac{\lambda\theta}{\theta}=1$ pour $\theta=0$:

$$1=\frac{2}{\sqrt{c}}.\sqrt[4]{q}.\frac{\pi}{\omega}\left(\frac{1-q^2}{1-q}.\frac{1-q^4}{1-q^3}\ldots\right)^2. \quad (\lambda)$$

En multipliant cette équation membre par membre par le carré de l'équation (*), on trouvera

$$\delta = 2(2n+1).\sqrt[4]{q^{2n+1}}.\frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{q^{2(2n+1)}-1}{q^{2n+1}-1}.\frac{q^{4(2n+1)}-1}{q^{3(2n+1)}-1}\dots\right)^2.$$

Lorsque $\alpha = \frac{\varpi i + 2\mu\omega}{2n+1}$, on aura

$$\lambda(m\alpha) = \frac{2}{\sqrt{c}}.\sqrt[4]{q}.\sin\left(m.\frac{\varpi}{\omega}.\frac{\pi i}{2n+1}+m.\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right)\left\{\frac{1-2q^2.\cos\left(m.\frac{2\pi}{\omega}\alpha\right)+q^4}{1-2q.\cos\left(m.\frac{2\pi}{\omega}\alpha\right)+q^2}.\frac{1-2q^4.\cos\left(m.\frac{2\pi}{\omega}\alpha\right)+q^8}{1-2q^3.\cos\left(m.\frac{2\pi}{\omega}\alpha\right)+q^6}\dots\right\}.$$

Or en faisant pour abréger comme précédemment

$$q^{\frac{1}{2n+1}}.\delta_1^{\mu} = k,$$

on trouvera

$$\sin\left(m.\frac{\varpi}{\omega}.\frac{\pi i}{2n+1}+m.\frac{2\mu\pi}{2n+1}\right) = \frac{k^m-k^{-m}}{2\sqrt{-1}} = \frac{k^{-m}}{2\sqrt{-1}}(k^{2m}-1).$$

$$1-2q^p.\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\alpha\right)+q^{2p} = (q^p-k^{2m})(q^p-k^{-2m});$$

donc

$$\lambda(m\alpha) = \frac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt{c}}.\frac{k^{-m}}{\sqrt{-1}}.(k^{2m}-1)\left(\frac{q^2-k^{2m}}{q-k^{2m}}.\frac{q^2-k^{-2m}}{q-k^{-2m}}.\frac{q^4-k^{2m}}{q^3-k^{2m}}.\frac{q^4-k^{-2m}}{q^3-k^{-2m}}\dots\right);$$

c'est-à-dire

$$\lambda(m\alpha) = \frac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt{c}}.\frac{k^{-m}}{\sqrt{-1}}.(k^{2m}-1)\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\frac{q^{2\nu}-k^{2m}}{q^{2\nu-1}-k^{2m}}.\frac{q^{2\nu}-k^{-2m}}{q^{2\nu-1}-k^{-2m}}\right);$$

donc

$$\prod_{1}^{n}{}_{m}\lambda(m\alpha) = \frac{q^{\frac{n}{4}}}{c^{\frac{n}{2}}}.\frac{k^{\frac{-n(n+1)}{2}}}{(-1)^{\frac{n}{2}}}.\prod_{1}^{n}{}_{m}(k^{2m}-1)\prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\frac{q^{2\nu}-k^{2m}}{q^{2\nu-1}-k^{2m}}.\frac{q^{2\nu}-k^{-2m}}{q^{2\nu-1}-k^{-2m}}\right).$$

Soit comme précédemment $2\nu(2n+1)=\sigma$, $(2\nu-1)(2n+1)=\tau$ on aura

$$\left(\prod_{1}^{n}{}_{m}\lambda(m\alpha)\right)^2 = \frac{q^{\frac{n}{2}}}{c^n}.\frac{k^{-n(n+1)}}{(-1)^n}.\left\{\prod_{1}^{n}{}_{m}(k^{2m}-1).\prod_{1}^{n}{}_{m}\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left(\frac{k^{\sigma-2m}-1}{k^{\tau-2m}-1}.\frac{k^{\sigma+2m}-1}{k^{\tau+2m}-1}\right)\right\}^2;$$

or (voy. (λ)) $\quad 1 = \frac{2}{\sqrt{c}}.\sqrt[4]{q}.\frac{\pi}{\omega}.\left(\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\frac{k^{\sigma}-1}{k^{\tau}-1}\right)^2;$

on tire de là en multipliant et remarquant que $q^{\frac{2n+1}{4}}.k^{-n(n+1)} = k^{\frac{1}{4}}$,

$$\left(\prod_{1}^{n}{}_{m}\lambda(m\alpha)\right)^2 = \frac{2\sqrt[4]{k}}{c^{n+\frac{1}{2}}(-1)^n}.\frac{\pi}{\omega}\left\{\prod_{1}^{n}{}_{m}(k^{2m}-1)\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu}\prod_{-n}^{n}{}_{m}\left(\frac{k^{\sigma+2m}-1}{k^{\tau+2m}-1}\right)\right\}^2.$$

En traitant cette équation entièrement de la même maniére que l'équation (ζ) ci-dessus, on trouvera

$$c^{n+\frac{1}{2}}\left(\prod_{1}^{n}{}_{m}\lambda(m\alpha)\right)^2 = \delta = 2\sqrt[4]{k}\cdot\frac{\pi}{\omega}\left(\frac{1-k^2}{1-k}\cdot\frac{1-k^4}{1-k^3}\cdots\right)^2,$$

où $k = q^{\frac{1}{2n+1}}.\delta_1^{\mu}$.

Pag. 317. Le théorème portant le numéro XVIII est démontré dans le mémoire XXI.

Pag. 321. Pour $\varphi\theta$ infini on a $\varphi(2n+1)\theta = B\varphi\theta$, où B est une constante; car le numérateur de la fraction rationnelle en $\varphi\theta$ qui exprime la valeur de la fonction $\varphi(2n+1)\theta$ est d'un degré d'une unité plus élevé que le dénominateur.

Pag. 322. On a

$$\psi\theta = \sum_{0}^{2n}{}_{m}\sum_{0}^{2n}{}_{\mu}\,\pi(\theta + m\alpha + \mu\beta),$$

$$\psi(\theta+\alpha) = \sum_{0}^{2n}{}_{m}\sum_{0}^{2n}{}_{\mu}\,\pi(\theta+(m+1)\alpha+\mu\beta).$$

Le second membre de la première équation contient le terme $\pi(\theta+\mu\beta)$ qui répond à $m=0$ et qui ne se trouve pas dans le second membre de la dernière équation. Celui-ci au contraire contient le terme $\pi(\theta+(2n+1)\alpha+\mu\beta)$ répondant à $m=2n$, et qui ne se trouve pas dans la première équation. Ces deux termes étant égaux, et tous les autres termes communs aux deux équations, il est clair que $\psi\theta = \psi(\theta+\alpha)$.

L'équation (1) $\psi(2n+1)\theta = R$, peut se mettre sous la forme (voyez p. 187)

$$(Ax^{(2n+1)^2} + \ldots + Bx) - \varphi(2n+1)\theta.(Cx^{(2n+1)^2-1} + \ldots + D) = 0,$$

On voit par là que le coefficient de toute puissance impair de x est indépendant de θ, et que le coefficient de toute puissance paire de x contient le facteur $\varphi(2n+1)\theta$. Donc la somme de toutes les racines est de la forme $C.\varphi(2n+1)\theta$, où C est constant; la somme de tous les produits de deux racines est indépendante de θ etc., d'où il est clair que dans l'équation (16) $A=0$ si le nombre des facteurs de $\pi\theta$ est impair, et $B=0$ si ce nombre est pair.

Pag. 329. Les expressions de $\lambda(\theta\varpi)$ sont les mêmes que les expressions (24) et (33) pag. 303 et 304, en remarquant que $\frac{\omega}{2} = b.\frac{\omega'}{2}$ dans ces dernières formules signifie la même chose que $b\frac{\varpi}{2}$ ici, et que $\frac{\varpi}{2} = b.\frac{\varpi'}{2}$ dans

les formules citées est la même chose que $b.\frac{\omega}{2}$ ici. En ayant égard à ces significations l'équation (9) pag. 300 deviendra:

$$\lambda(\theta)=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1-e^{-\frac{2\theta\pi}{\omega}}}{1+e^{-\frac{2\theta\pi}{\omega}}}\cdot\frac{1-p^2e^{-\frac{2\theta\pi}{\omega}}}{1+p^2e^{-\frac{2\theta\pi}{\omega}}}\cdot\frac{1-p^2e^{\frac{2\theta\pi}{\omega}}}{1+p^2e^{\frac{2\theta\pi}{\omega}}}\cdot\frac{1-p^4e^{-\frac{2\theta\pi}{\omega}}}{1+p^4e^{-\frac{2\theta\pi}{\omega}}}\cdot\frac{1-p^4e^{\frac{2\theta\pi}{\omega}}}{1+p^4e^{\frac{2\theta\pi}{\omega}}}\cdots$$

En mettant ici $\frac{\varpi}{2}-\theta\omega$ à la place de θ et remarquant que $e^{-\frac{2\pi}{\omega}\left(\frac{\varpi}{2}-\theta\omega\right)}=pe^{2\pi\theta}$, on aura l'expression de $\lambda\left(\frac{\varpi}{2}-\theta\omega\right)$.

Pag. 331. Pour les expressions de $\sqrt[4]{c^1}$, voyez les équations (16) et (14) pag. 302 et 301.

Pag, 333. L'équation $\lambda'(\varepsilon\varpi-\varepsilon\theta+a)=\lambda'(\varepsilon\theta+a)$ donne

$$\varepsilon\varpi-\varepsilon\theta+a=(-1)^{m'}\varepsilon\theta+(-1)^{m'}a+m'\varpi'+\mu'\omega' i,$$

où m' et μ' sont des entiers; on en tire

$$a\left(1-(-1)^{m'}\right)=\left((-1)^{m'}+1\right)\varepsilon\theta+m'\varpi'-\varepsilon\varpi+\mu'\omega' i.$$

Il faut donc que m' soit un nombre impair $2\mu+1$; donc en remarquant que $\varepsilon\varpi=m\varpi'$, on aura

$$2a=(2\mu+1-m)\varpi'+\mu'\omega' i.$$

Pag. 334. Les deux équations

$$\varphi(\theta'+\theta).\varphi(\theta'-\theta)=(\varphi\theta.f\theta')^2-(\varphi\theta'.f\theta)^2,$$
$$f(\theta'+\theta).f(\theta'-\theta)=(f\theta.f\theta')^2-c^2(\varphi\theta.\varphi\theta')^2$$

se tirent immédiatement de l'équation

$$\lambda(\theta'+\theta).\lambda(\theta'-\theta)=\frac{\lambda^2\theta'-\lambda^2\theta}{1-c^2\lambda^2\theta'\lambda^2\theta};$$

en y faisant $\lambda\theta=\frac{\varphi\theta}{f\theta}$, $\lambda\theta'=\frac{\varphi\theta'}{f\theta'}$.

Pag. 337. Ayant $\psi a=A(a^2-x_1^2)(a^2-x_2^2)\dots(a^2-x_\mu^2)$, on peut faire

$$\frac{\theta a}{2\psi a}=\frac{B_1}{a+x_1}+\frac{C_1}{a-x_1}+\frac{B_2}{a+x_2}+\frac{C_2}{a-x^2}+\dots+\frac{B_\mu}{a+x_\mu}+\frac{C_\mu}{a-x_\mu}$$

où $$B_k=\frac{\theta(-x_k)}{2\psi'(-x_k)},\quad C_k=\frac{\theta x_k}{2\psi' x_k}.$$

Or θx et $\psi' x$ étant des fonctions impaires, on a

$\theta(-x)=-\theta x$ et $\psi'(-x)=-\psi' x$, donc on aura

$$\frac{B_k}{a+x_k}+\frac{C_k}{a-x_k}=\frac{2a\theta x_k}{2(a^2-x^2{}_k)\psi' x_k}.$$

On tire de là

$$\frac{a\theta a}{\psi a}=\sum_1^\mu{}_k\frac{a^2\theta x_k}{(a^2-x^2{}_k)\psi' x_k}=\sum_1^\mu{}_k\frac{\theta x_k}{\left(1-\frac{x^2{}_k}{a^2}\right)\psi' x_k}.$$

Pag. 338.

$$\Pi x=\int\frac{dx}{\Delta x}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{a^2}}=\int\frac{dx}{\Delta x}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\dots\right)$$

donc

$$\sum_1^\mu{}_k\Pi x_k=\sum_1^\mu{}_k\int\frac{dx_k}{\Delta x_k}+\frac{1}{a^2}\sum_1^\mu{}_k\frac{x^2{}_k\,dx_k}{\Delta x_k}+\dots$$

donc

$$\sum_1^\mu{}_k\int\frac{x^2{}_k\,dx_k}{\Delta x_k}=\varpi_0 x_1+\varpi_0 x_2+\dots+\varpi_0 x_\mu=C-p,$$

où p est le coefficient de $\frac{1}{a^2}$ dans le développement de la fonction $\frac{a}{2\Delta a}.\log\left(\frac{fa+\varphi a.\Delta a}{fa-\varphi a.\Delta a}\right)$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$.

Pag. 340.

$$\frac{a}{2\Delta a}.\log\left(\frac{fa+\varphi a\,\Delta a}{fa-\varphi a\,\Delta a}\right)=\frac{a.\varphi a}{fa}+\frac{a}{3}.\left(\frac{\varphi a}{fa}\right)^3(\Delta a)^2+\frac{a}{5}.\left(\frac{\varphi a}{fa}\right)^5(\Delta a)^4+\dots$$

Substituant ici les valeur de $\varphi\alpha$, $f\alpha$ et $\Delta\alpha$, et développant suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$, on verra que le coefficient de $\frac{1}{a^2}$ du développement sera b_{n-2}.

Pag. 341. Si fx est impair, et φx pair, on aura

$$fx=(a_0+a_1x^2+a_2x^4+\dots+a_{n-1}x^{2n-2})x,$$
$$\varphi x=b_0+b_1x^2+b_2x^4+\dots+b_{n-2}x^{2n-4}+x^{2n-2},$$
$$(fx)^2-(\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2)=-c^2(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\dots(x^2-x_{2n-1}^2)(x^2-y^2).$$

$x=0$ donne $b_0^2=c^2x_1^2x_2^2\dots x_{2n-1}^2.y^2$, d'où l'on tire

$$y=-\frac{b_0}{cx_1x_2\dots x_{2n-1}}.$$

Si l'on substitue dans cette équation la valeur de b_0 tirée des équations (13'), on trouvera par exemple pour $n=2$:

$$y=\frac{1}{c}.\frac{(x^2{}_1-x^2{}_2)x_3\Delta x_3+(x^2_3-x^2{}_1)x_2\Delta x_2+(x^2_2-x^2{}_3)x_1\Delta x_1}{(x^2{}_1-x^2{}_2)x_1x_2\Delta x_3+(x^2{}_3-x^2{}_1)x_1x_3\Delta x_2+(x^2{}_2-x^2{}_3)x_2x_3\Delta x_1}.$$

En désignant par y' la valeur de y déterminée par l'équation (14) on trouvera de la même manière pour $n=2$:

$$y' = \frac{(x_1^2 - x_2^2)x_1 x_2 \Delta x_3 + (x_3^2 - x_1^2)x_1 x_3 \Delta x_2 + (x_2^2 - x_3^2)x_2 x_3 \Delta x_1}{(x_1^2 - x_2^2)x_3 \Delta x_3 + (x_3^2 - x_1^2)x_2 \Delta x_2 + (x_2^2 - x_3^2)x_1 \Delta x_1},$$

donc $y' = \dfrac{1}{cy}$.

Pag. 347. Les équations (42) et (43) donnent

$$x_{\mu+1} - x_{\mu-1} = \frac{2x\Delta x_\mu}{1 - c^2 x^2 x_\mu^2},$$

donc

$$\Delta x_\mu = \frac{(x_{\mu+1} - x_{\mu-1})(1 - c^2 x^2 x_\mu^2)}{2x}.$$

On voit par là que Δx_μ est rationnel, lorsque μ est un nombre pair.

Pag. 349. A_0 est la valeur de $\dfrac{x_{2m-1}}{x}$ pour $x=0$; donc $A_0 = \dfrac{dx_{2m-1}}{dx}$ $= \dfrac{d\lambda[(2m-1)\theta]}{d\lambda\theta} = \dfrac{(2m-1).\Delta[\lambda(2m-1)\theta]}{\Delta(\lambda\theta)} = 2m-1$ pour $x=0$ qui donne $\theta=0$.

On trouve de la même manière $B_0 = 2\mu = \dfrac{x_{2\mu}}{x}$ pour $x=0$.

Les équations (42) et (43) donnent, comme on le voit aisément,

$$\left.\begin{aligned}(x_{2\mu+1} + x_{2\mu-1})(1 - c^2 x^2 . x_{2\mu}^2\ \ ) &= 2x_{2\mu}\ \ .\Delta x\\ (x_{2\mu}\ \ + x_{2\mu-2})(1 - c^2 x^2 . x_{2\mu-1}^2) &= 2x_{2\mu-1}.\Delta x\end{aligned}\right\}\ \text{(a)}$$

La première équation est la même chose que

$$\left(\frac{p_{2\mu+1}}{q_{2\mu+1}} + \frac{p_{2\mu-1}}{q_{2\mu-1}}\right)\left(1 - c^2 x^2 . \frac{p_{2\mu}^2}{q_{2\mu}^2}\right) = 2\Delta x . \frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}}.$$

Réduisant les fractions du premier membre au même dénominateur et remarquant qu'après cette réduction les dénominateurs des deux membres doivent être égaux séparément, on aura

$$q_{2\mu+1} \cdot q_{2\mu-1} \cdot q_{2\mu} - 1 = 0. \quad \text{(b)}$$

Soit maintenant

$$\begin{aligned} q_{2\mu+1} &= 1 + A'_{2,2\mu+1} . x^2 + \dots \\ q_{2\mu-1} &= 1 + A'_{2,2\mu-1} . x^2 + \dots \\ q_{2\mu}\ \ &= 1 + B'_{2,2\mu} . x^2 + \dots \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans (b), on en tirera

$$A'_{2,2\mu+1} + A'_{2,2\mu-1} + B'_{2,2\mu} = 0. \quad \text{(c)}$$

La seconde des équations (a) donne de la même manière

$$B'_{2,2\mu} + B'_{2,2\mu-2} + A'_{2,2\mu-1} = 0. \quad \text{(d)}$$

L'équation (d) fait voir que si $A'_{2,2\mu-1}=0$ et $B'_{2,2\mu-2}=0$, $B'_{2,2\mu}$ sera aussi égal à zéro; et l'équation (c) que si $B'_{2,2\mu}=0$ et $A'_{2,2\mu-1}=0$, $A'_{2,2\mu+1}$ doit de même être égal à zéro Or les équations (53) montrent que $B'_{2,2}=0$ et $A'_{2,2}=0$. Donc il est clair que $B'_{2,2\mu}=0$ et $A'_{2,2\mu+1}=0$ pour toute valeur de μ.

Pag. 351. Soit $$\theta=\begin{cases} au+b_1v_1+b_2v_2+\dots+b_\nu v_\nu \\ +b'_1t_1+b'_2t_2+\dots+b'_\varkappa t_\varkappa \\ +b''_1\Delta_1(t_1)+b''_2\Delta_2(t_2)+\dots+b''_\varkappa\Delta_\varkappa(t_\varkappa). \end{cases}$$
Supposons qu'on demande p. ex. t_m exprimé rationnellement en θ, x_1, $x_2,\dots x_\mu$, y_1, $y_2,\dots y_\mu$; on fera

$$\theta=b'_mt_m+\psi$$

en désignant pour abréger, par ψ la somme des autres termes dont θ est composé. Donc

$$b'_mt_m=\theta-\psi=\chi(x_1,\ x_2,\dots x_\mu,\ y_1,\ y_2,\dots y_\mu),$$

où χ est une fonction algébrique des quantités comprises entre les parenthèses parce que t_m qui par l'hypothèse est une fonction algébrique de x_1, $x_2,\dots x_m$, peut s'exprimer en fonction algébrique de x_1, $x_2,\dots x_\mu$, y_1, $y_2,\dots y_\mu$. On en déduit

$$f(\theta-\psi)=\text{fonc. rat. de } x_1,\ x_2,\dots x_\mu,\ y_1,\ y_2,\dots y_\mu=F.$$

En développant on aura

$$f(\theta-\psi)=P+Q.\psi,$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de θ, x_1, $x_2,\dots x_\mu$, y_1, $y_2,\dots y_\mu$. Donc

$$P+Q\psi=F;$$

et de là

$$\psi=\frac{F-P}{Q};$$

et par suite

$$b'_mt_m=\theta-\frac{F-P}{Q}=\text{fonc. rat. de } \theta,\ x_1,\ x_2,\dots x_\mu,\ y_1,\ y_2,\dots y_\mu.$$

Pag. 352. Le théorème en vertu duquel les équations (68) seront satisfaites en mettant au lieu de θ une racine quelconque de l'équation $V=0$, lorsque cette équation est irréductible, est démontré pag. 115, 116.

Pag. 363. Désignons pour abréger le degré d'une fonction par la lettre D, et soit

$$Dfx=m,$$
$$D\varphi x=n, \text{ on aura}$$
$$Dv=m+n+3,$$

$$D\theta x = 2m, \text{ si } m > n+2,$$
et
$$D\theta x = 2n+4, \text{ si } m < n+2.$$
On ne peut pas avoir $m = n+2$ en remarquant que des nombres m et n l'un doit être pair et l'autre impair.

Soit d'abord $m > n+2$,
donc $2m > m+n+2$,
donc $2m = \text{ou} > m+n+3$,
c'est-à-dire $D\theta x = \text{ou} > Dv$.
Soit ensuite $n+2 > m$,
donc $2n+4 > m+n+2$,
donc $2n+4 = \text{ou} > m+n+3$,
c'est-à-dire $D\theta x = \text{ou} > Dv$.

Pag. 366. Lorsque $m = 2$, l'équation (109) devient
$$(fx)^2 - (\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha^2)^2.$$
En faisant $fx = ax$, $\varphi x = b$, on aura
$$-b^2c^2x^4 + (b^2(1+c^2)+a^2)x^2 - b^2 = x^4 - 2\alpha^2x^2 + \alpha^4;$$
donc
$$b^2c^2 = -1,\ b^2(1+c^2) + a^2 = -2\alpha^2,\ b^2 = -\alpha^4,$$
et de là
$$b = \pm\frac{1}{c}\sqrt{-1},\ \alpha^2 = \pm\frac{1}{c},\ a^2 = \left(1 \mp \frac{1}{c}\right)^2.$$
Donc
$$\frac{\alpha}{2m\Delta\alpha} = \frac{-\sqrt{-c}}{4(c-1)},\ \text{lorsque } \alpha^2 = \frac{1}{c},$$
et
$$\frac{\alpha}{2m\Delta\alpha} = \frac{-\sqrt{-1}}{4(c+1)},\ \text{lorsque } \alpha^2 = -\frac{1}{c}.$$

Pag. 367. On a en général $(r^2-s^2)(t^2-u^2) = (rt \pm su)^2 - (st \pm ru)^2$. En faisant $x = 1$ ou $x = \frac{1}{c}$ dans l'équation (108), la partie logarithmique disparait. On voit par là que β ne peut pas être zéro; car cela donnerait
$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\Delta x} = 0 \text{ et } \int_0^{\frac{1}{c}} \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\Delta x} = 0,$$
ce qui n'a pas lieu.

En différentiant l'équation (112) on trouve $\beta = \frac{1}{2}k$, k étant la partie entière de $\frac{v}{\theta x}$. Or $\frac{v}{\theta x} = \frac{2bc^2 . x^6 + ..}{x^6 + ..}$, dont la partie entière est $2bc^2$; donc $\beta = \frac{1}{2}k$ $= bc^2 = c^2 \alpha \alpha_1 \alpha_2$.

Lorsque $\alpha_2 = \frac{1}{0}$, on a $\alpha = \pm \frac{1}{c\alpha_1}$, $\Pi'\alpha_2 = \varpi x$, $\frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1} = \pm \frac{\Delta\alpha}{\alpha}$.
La seconde des équations (114) donne a sous la forme $\infty - \infty$. Or on a

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \Delta\alpha_2 + \alpha_2 \Delta\alpha_1}{1 - c^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2},$$

et lorsque $\alpha_2 = \infty$,

$$\alpha = -\frac{\Delta\alpha_2}{c^2 \alpha_1 \alpha_2^2} - \frac{\Delta\alpha_1}{c^2 \alpha_1^2 \alpha_2};$$

on tire de là

$$c^2 \alpha^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 - \alpha_2^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2} + \frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1}\right)^2 - \alpha_2^2 = \frac{1}{c^2}\left(c\alpha_2 + \frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right)^2 - \alpha_2^2 = \frac{2\alpha_2 \Delta\alpha}{c\alpha};$$

donc on aura

$$a = \frac{\alpha_2 \Delta\alpha}{c\alpha}.$$

Cette valeur de a étant substituée dans l'équation

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + a}{\alpha \alpha_1 \alpha_2}$$

fait voir que la supposition de α_2 infini ne change pas la valeur de $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$.

En substituant les valeurs trouvées ci-dessus dans l'équation (112) on en déduira l'équation (115), où il faut observer que le coefficient de ϖx deviendra $\pm c^2 \alpha \alpha_1 \alpha_2 \pm \frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2}$ qui est de la forme $\pm \infty \pm \infty$. Or en prenant les signes convenables ce coefficient se réduit à $-\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$. En effet on a

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \Delta\alpha_2 + \alpha_2 \Delta\alpha_1}{1 - c^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2} = -\frac{\Delta\alpha_2}{c^2 \alpha_1 \alpha_2^2} - \frac{\Delta\alpha_1}{c^2 \alpha_1^2 \alpha_2},$$

donc

$$c^2 \alpha \alpha_1 \alpha_2 = -\frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2} - \frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1},$$

et par là

$$c^2 \alpha \alpha_1 \alpha_2 + \frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2} = -\frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1} = -\frac{\Delta\alpha}{\alpha}.$$

Pag. 369. Si y et r_1 avaient un facteur commun, y et r l'auraient de même; mais la valeur de x qui ferait évanouir ce facteur, rendrait $(1 - x^2)$ $(1 - c^2 x^2)$ infini, ce qui est impossible. r_1 et r_2 ne peuvent s'évanouir en même temps, par ce que $1 - y^2$ et $1 - c'^2 y^2$ ne le peuvent pas.

Lorsque $y=\frac{p}{q}$, soit $r=\frac{\theta}{q'}$, où θ et q' sont des fonctions entières de x sans diviseur commun, on aura

$$\frac{q^2-p^2}{q^2}\cdot\frac{q^2-c'^2p^2}{q^2}=\frac{\theta^2(1-x^2)(1-c^2x^2)}{q'^2}.$$

Or ces deux fractions étant irréductibles, on aura séparément

$$(q^2-p^2)(q^2-c'^2p^2)=\theta^2(1-x^2)(1-c^2x^2)$$

et
$$q^4=q'^2,$$

donc
$$q'=q^2 \text{ et } r=\frac{\theta}{q^2}.$$

Le numérateur de la fraction rationnelle $\frac{dy}{dx}$ étant divisible par r, il est divisible par θ, donc

$$v=\frac{qdp-pdq}{\theta.dx}$$

est une fonction entière.

Pag. 370. Dans le cas de $n=m$, si $k=0$, on aura

$$p=\alpha x^m+\alpha_1 x^{m-1}+\alpha_2 x^{m-2}+\dots,\ \frac{dp}{dx}=m\alpha x^{m-1}+(m-1)\alpha_1 x^{m-2}+\dots$$

$$q=\beta x^m+\beta_1 x^{m-1}+\dots$$

$$q-p=(\beta-\alpha)x^m+(\beta_1-\alpha_1)x^{m-1}+\dots=\varphi,\ \frac{d\varphi}{dx}=m(\beta-\alpha)x^{m-1}+(m-1)(\beta_1-\alpha_1)x^{m-2}+\dots$$

$$\frac{pd\varphi}{dx}=m\alpha(\beta-\alpha)x^{2m-1}+m\alpha_1(\beta-\alpha)x^{2m-2}+\dots$$
$$+(m-1)\alpha(\beta_1-\alpha_1)x^{2m-2}+\dots$$

$$\frac{\varphi dp}{dx}=m\alpha(\beta-\alpha)x^{2m-1}+m\alpha(\beta_1-\alpha_1)x^{2m-2}+\dots$$
$$+(m-1)\alpha_1(\beta-\alpha)x^{2m-2}+\dots$$

d'où l'on voit que le degré de $\frac{pd\varphi-\varphi dp}{dx}$, si $k=0$, est égal à $2m-2$.

Pag. 371. Les formules du paragraphe 2 sont les mêmes que les formules (10), (11) et (12) de la page 258 en y faisant $e=e_1=1$ et $a=\varepsilon$. La formule (10) donne alors $a=\pm 1=\varepsilon$, $y=\pm x$, $c_1=\pm c$; et la formule (11) donne $a=\pm 1=\varepsilon$, $y=\pm\frac{1}{cx}$, $c_1=\pm c$. Mais il faut remarquer que dans les formules (10) et (11) on peut aussi avoir (voyez les notes pag. 446) $c_1^2=\frac{e^2}{a^2}$ et $e_1^2=\frac{c^2}{a^2}$, ce qui donne, en faisant $e=e_1=1$:

$$a=\pm c=\varepsilon,\ c_1=\pm\frac{1}{c},\ y=\pm cx,\ y=\pm\frac{1}{x}.$$

Les quatre dernières formules du paragraphe 2 sont comprises dans la formule (12) pag. 258, où la supposition de $e = e_1 = 1$ donne

$$m = \pm\left(\frac{1 \pm \sqrt{\pm c}}{1 \mp \sqrt{\pm c}}\right).$$

Pag. 382. Les équations qui déterminent les valeurs des quantités a', b', a, b donnent

$$a' = b.\varphi(1) = \frac{b}{c'}.\varphi\left(\frac{1}{c}\right),$$

$$b' = a.\varphi(1) = ac'.\varphi\left(\frac{1}{c}\right).$$

Les deux premières équations donnent $\frac{a'}{b} = \varphi(1) = \frac{1}{c'}.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)$,

et les deux dernières $\frac{b'}{a} = \varphi(1) = c'.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)$.

Donc ou $a' = 0$ et $b = 0$, ou $b' = 0$ et $a = 0$.

On a $y = \frac{\varphi(x)}{\varphi(1)}$, donc $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(1)}$. En vertu de (154) on a $\varphi(x) = x.\psi(x)$, où $\psi(x)$ est une fonction rationnelle de x^2, et $\psi(0) = (-1)^\mu.e^2.e_2^2.e_3^2\ldots e_\mu^2$. Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi(1)}\left(x.\psi'(x) + \psi(x)\right),$$

donc pour $x = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi(1)}(-1)^\mu.e^2.e_2^2.e_3^2\ldots e_\mu^2.$$

Pag. 384. En éliminant e^2 des équations

$$0 = 3 - 4(1 + c^2)e^2 + 6c^2e^4 - c^4e^8,$$

et

$$c' = c^3\left(\frac{1 - e^2}{1 - c^2e^2}\right)^2,$$

on obtiendra

$$(1 - c^2)^2(c^2 + c'^2 + 6cc' - 4(1 + cc')\sqrt{cc'}) = 0,$$

d'où

$$c^2 - 2cc' + c'^2 + 8cc' - 4\sqrt{cc'} - 4cc'\sqrt{cc'} = 0,$$

et de là

$$(c' - c)^2 - 4\sqrt{cc'}(1 - 2\sqrt{cc'} + cc') = 0,$$

c'est-à-dire

$$(c' - c)^2 = 4\sqrt{cc'}.(1 - \sqrt{cc'})^2.$$

Pag. 386. Lorsqu'on divise les deux équations

$$(q^2 - p^2)(q^2 - c'^2p^2) = (1 - z^2)(1 - c^2z^2)r^2,$$

$$q^2 - p^2 = (1 - z^2)(1 - c^2z^2)(\varrho\varrho')^2,$$

membre par membre, on obtient

$$q^2 - c'^2 p^2 = \left(\frac{r}{\rho\rho'}\right)^2;$$

donc $q^2 - c'^2 p^2$ doit être un carré parfait.

Pag. 388. L'expression de q donne en faisant $z = 0$:

$$1 = b(-1)^{2\mu}.\delta.\theta\delta.\theta^2\delta\ldots\theta^{2\mu-1}\delta,$$
$$q' = b(x-\delta)(x-\theta\delta)\ldots(x-\theta^{2\mu-1}\delta);$$

donc en divisant membre par membre

$$q' = \left(1-\frac{x}{\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\theta\delta}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\theta^{2\mu-1}\delta}\right)$$

Pag. 395. Soit

$$p = A_0 + A_1 z + \ldots + A_\mu z^\mu$$
$$q = B_0 + B_1 z + \ldots + B_\mu z^\mu,$$

on aura

$$p - qy = A_0 - B_0 y + (A_1 - B_1 y)z + (A_2 - B_2 y)z^2 + \ldots + (A_\mu - B_\mu y)z^\mu$$
$$= (a - by)(z - x)(z - x')\ldots(z - x^{(\mu-1)}).$$

On voit par la que $A_\mu = a$, $B_\mu = b$; donc si $b = 0$, q sera du degré $\mu - 1$.

Si $x' = \frac{x\Delta e + e\Delta x}{1 - c^2e^2x^2}$ est une racine de $y = \psi x$, la quantité $\frac{x\Delta e - e\Delta x}{1 - c^2e^2x^2}$ le sera également, en vertu des équations (142).

Soit l'équation (183): $\quad a' - b'y = \varphi x,$

on aura $\quad a' - b' = \varphi(1)$

et $\quad a' + b' = \varphi(-1) = -\varphi(1),$

donc $a' = 0$.

On tire de (142) en y faisant $x = 0$ et écrivant $2n+1$ pour n:

$$\theta^m(0) = e_m,$$
$$\theta^{2n+1-m}(0) = e_{-m},$$

donc $\quad p = az(z^2 - e_1^2)\ldots(z^2 - e_n^2).$

Pag. 396. Si $a = 0$, p sera du degré $\mu - 1$ et q du degré μ. En égalant les coefficiens de $z^{\mu-1}$ dans l'équation

$$p - qy = \pm by(x - z)(x' - z)\ldots(x^{(\mu-1)} - z), \quad (\alpha)$$

on aura

$$a' - b'y = \mp by(x + x' + x'' + \ldots + x^{(\mu-1)}),$$

où a' et b' sont des constantes. On trouvera sous la même condition que dans le cas précédent, qu'en faisant $\mu = 2n+1$, on aura

$$a' - b'y = \mp by\left(x + \frac{2x\Delta e_1}{1-c^2e^2_1x^2} + \ldots + \frac{2x\Delta e_n}{1-c^2e^2_nx^2}\right).$$

Or $x = \pm 1, \pm \frac{1}{c}$ donne $y = \pm 1, \pm \frac{1}{c'}$, d'où l'on tire $b' = 0$. y aura donc la forme

$$y = \frac{a'}{bx\left(1 + \frac{2\Delta e}{1-c^2e^2_1x^2} + \ldots + \frac{2\Delta e_n}{1-c^2e^2_nx^2}\right)}.$$

Cette équation fait voir que $x = 0$ rend y infini. Si l'on divise les deux membres de l'équation (α) ci-dessus par y et qu'on fasse ensuite $x = 0$ ou y infini, on aura

$$q = \pm bz(e_1^2 - z^2)(e_2^2 - z^2)\ldots(e^2_n - z^2).$$

De ce qui précède on tire sur-le-champ l'équation (188).

Si μ est pair $= 2n$, on trouvera pour y la forme

$$y = \frac{a'}{\mp b\left(x \pm \frac{1}{cx} + \frac{2x\Delta e_1}{1-c^2e^2_1x^2} + \ldots + \frac{2x\Delta e_{n-1}}{1-c^2e^2_{n-1}x^2}\right)},$$

d'où l'on tire l'équation (189).

Pag. 397. Pour $x = \frac{1}{0}$ les équations (190) et (191) donnent

$$\frac{x_{2\mu+1}}{x} = \frac{a}{c^{2n}e^2_1e^2_2\ldots e^2_n} = A.$$

Pour $x = 0$ les mêmes équations donnent

$$\frac{x_{2\mu+1}}{x} = ae_1^2e_2^2\ldots e^2_n = A(1 + 2\Delta e_1 + 2\Delta e_2 + \ldots + 2\Delta e_n)$$

L'équation différentielle

$$\frac{dy}{\Delta y} = (2\mu + 1).\frac{dx}{\Delta x}$$

donne pour $x = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = (2\mu + 1).\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\mu + 1,$$

et $$\frac{dy}{dx} = \frac{dx_{2\mu+1}}{dx} = a.e_1^2e_2^2\ldots e^2_n \text{ pour } x = 0;$$

donc $$a.e_1^2e_2^2\ldots e^2_n = 2\mu + 1.$$

Lorsqu'on suppose x infini, on a $x_{2\mu+1} = Ax = y$, donc

$$\frac{dy}{dx} = (2\mu + 1)\frac{\sqrt{(1-A^2x^2)(1-c^2A^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = (2\mu + 1)\frac{c.A^2x^2}{cx^2} = A;$$

donc $A = \frac{1}{2\mu+1}$. On aura donc

$$a = \frac{c^{2n} . e^2_1 e^2_2 \dots e^2_n}{2\mu+1},$$

$$a = \frac{2\mu+1}{e^2_1 . e^2_2 \dots e^2_n}.$$

Le produit de ces deux équations membre par membre donne

$$a^2 = c^{2n}, \text{ donc } a = c^n.$$

Pag. 399. On a (voyez 135)

$$\theta^k{}_1 x = \frac{x\Delta e'_k + e'_k \Delta x}{1 - c^2 e'^2_k x^2} = x',$$

donc

$$\frac{dx'}{\Delta x'} = \frac{dx}{\Delta x} + k\frac{de'}{\Delta e'}.$$

Pag. 400. Les équations (196) et (197) se déduisent respectivement des équations (190) et (191) en remarquant que $a = c^{2\mu^2+2\mu}$, que $A = \frac{1}{2\mu+1}$, et en ayant égard aux équations (143) et (144).

Pag. 401. On a

$$p . \frac{de}{\Delta e} = \frac{de_p}{\Delta e_p} \quad (1)$$

$$k . \frac{de'}{\Delta e'} = \frac{de'_k}{\Delta e'_k} \quad (2)$$

$$\frac{de_{m,k}}{\Delta e_{m,k}} = \frac{de_m}{\Delta e_m} + \frac{de'_k}{\Delta e'_k} \quad (3)$$

Si dans (1) on met $e_{m,1}$ au lieu de e, on aura

$$p . \frac{de_{m,1}}{\Delta e_{m,1}} = p . \frac{de_m}{\Delta e_m} + p . \frac{de'}{\Delta e'}$$

$$= pm . \frac{de}{\Delta e} + p . \frac{de'}{\Delta e'}$$

$$= \frac{de_{pm}}{\Delta e_{pm}} + \frac{de'_p}{\Delta e'_p} = \frac{de_{pm,p}}{\Delta e_{pm,p}};$$

donc par cette substitution e_p se change en $e_{pm,p}$.

Pag. 405. On a

$$v_0 = x + \theta x + \theta^2 x + \dots + \theta^m x + \dots + \theta^{2\mu} x$$

$$v_1 = x + \delta\theta x + \delta^2\theta^2 x + \dots + \delta^m\theta^m x + \dots + \delta^{2\mu}\theta^{2\mu} x$$

$$v_2 = x + \delta^2\theta x + \delta^4\theta^2 x + \dots + \delta^{2m}\theta^m x + \dots + \delta^{4\mu}\theta^{2\mu} x$$

. . . .

$$v_{2\mu} = x + \delta^{2\mu}\theta x + \delta^{4\mu}\theta^2 x + \dots + \delta^{2m\mu}\theta^m x + \dots + \delta^{4\mu^2}\theta^{2\mu} x.$$

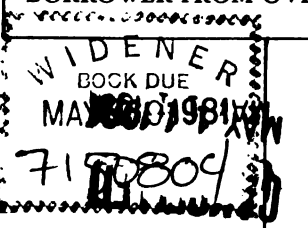
En ajoutant et divisant par $2\mu + 1$ on aura la valeur de x. En multipliant la seconde équation par δ^{-m}, la troisième par δ^{-2m} etc. ajoutant ensuite et divisant par $2\mu + 1$, on aura la valeur de $\theta^{m}x$. (Voyez pag. 124).

Pag. 408. *M. Crelle* remarque que c'est jusqu'ici que ce mémoire lui est parvenu, et que l'auteur est mort sans l'avoir fini.

FIN DU TOME PREMIER.

Fautes à corriger.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
1,2,3,4.		(*Plusieurs fois*) indépendentes.	indépendantes.
16.	23.	au dessus du plus grand nombre premier compris dans les facteurs de *n*.	au-dessus du plus grand nombre premier qui ne surpasse pas *n*.
84.	19.	$\mu = 0, 1, 2, 3 \ldots \mu$.	$\mu = 1, 2, 3 \ldots, \mu$.
95.			Le second membre de la première équation de cette page doit avoir le signe —, celui de la seconde équation le signe +; et celui de la troisième, le signe —.
99.	20.	$\frac{2}{\sqrt{(x+x^2)}}$.	$\frac{2}{\sqrt{(x-x^2)}}$.
108.	12.	$-\frac{dz(z+a')}{z^2}$.	$-\frac{dz(z+\alpha')}{z^2}$.
119.	8.	$y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$.	$y_2, y_3, \ldots y_m$.
132.	4.	$\lambda\psi\theta^{m-2}$.	$\lambda\psi\theta^{m-2}x$.
205.	12.	$\frac{\omega+\mu\varpi i}{2n+1}$.	$\frac{m\omega+\mu\varpi i}{2n+1}$.
221.	1.	*Dans le dénominateur du premier membre de l'équation* (172) $\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+k}{2n+1}\right)$.	$\varphi^2\left(\frac{m\omega+\mu\varpi i+l}{2n+1}\right)$.
308.	4.	*Chauchy*	*Cauchy*.
321.	13.	$\psi_1(\varphi\theta).f\theta.F\theta$	$\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta$.
337.	3.	fonction entière de x^2,	fonction entière de x.
365.	3.	$\beta_2 = -\frac{2m_1\Delta a_1}{a_1}$.	$\beta_1 = -\frac{2m_1\Delta a_1}{a_1}$.
—	24.	$\frac{m_2 d\alpha_2}{\Delta\alpha}$.	$\frac{m_2 d\alpha_2}{\Delta\alpha_2}$.
376.	1.	$\theta^n x$.	$\theta^{n-1}x$.
377.	1.	$\frac{\Delta e_n}{1-e\,e_n^2}$.	$\frac{\Delta e_n}{1-c^2e_n^2}$.
382.	2.	$\frac{1}{c}, \frac{1}{c}$.	$\frac{1}{c}, -\frac{1}{c}$.
383.	18.	paragraphe 1.	paragraphe 2.
390.	15.	θ^{n-1}	$\theta^{n-1}x$.
395.	26.	$\frac{x\Delta e+e\Delta x}{1-c^2e^2\Delta x}$.	$\frac{x\Delta e+e\Delta e}{1-c^2e^2x^2}$.
462.	7 et 9.	$\prod_0^{2n}\mu$	$\prod_1^{2n}\mu$


WIDENER
BOOK DUE